

DAN ŞTEFĂNESCU
MIRCEA MARINESCU
IOAN GANEA

Seria Termo-Frig

EDITURA TEHNICA

TERMOGAZODINAMICA TEHNICĂ

Dan Ştefănescu Mircea Marinescu Ioan Ganea

TERMOGAZODINAMICA TEHNICĂ



EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI, 1986

PREFAȚĂ

Nivelul tehnic de realizare a mașinilor și instalațiilor termice de performanță din ultimii ani a impus lărgirea sferei aplicațiilor inginerești, o pondere importantă avînd procesele de curgere ale fluidelor. Suprapunerea proceselor de schimb de energie peste aspectele pur gazodinamice a determinat necesitatea unei tratări unitare a acestor procese și menținerea corespunzătoare a metodelor specifice de analiză în lucrări de specialitate care să ușureze posibilitatea de asimilare a cunoaștințelor teoretice de bază în domeniu.

Termogazodinamica realizează sinteza proceselor de care se ocupă Termodinamica tehnică și Mecanica fluidelor, oferind metode specifice de studiu și posibilitatea de abordare a fenomenelor complexe care însoțesc transformările energetice ale fluidelor în curgere. De asemenea, valoarea ridicată a vitezei de curgere a fluidelor de lucru impune luarea în considerare a compresibilității, viscozității, frecării și perturbațiilor regimurilor de curgere manifestate prin unda de șoc.

Lucrarea prezintă aspectele fundamentale ale Termogazodinamicii, trecînd în revistă și unele aplicații teoretice ale proceselor de curgere, referitoare la ajutaje, difuzoare, curgerea prin paletele turbomașinilor, jeturi etc. Un capitol distinct este rezervat proceselor termogazodinamice din jeturile libere de gaz (izoterme și neizoterme, turbionate și neturbionate), iar altul termogazodinamicii proceselor de ardere. În încheiere, sînt prezentate principalele metode utilizate pentru studiul experimental al proceselor termogazodinamice, insistîndu-se asupra erorilor de măsură, determinate în principal de plasarea incorectă a elementului sensibil.

Prin modul de prezentare și conținut lucrarea constituie o carte de referință în literatura de specialitate. Ea reprezintă, totodată, un manual de sinteză în domeniu, care se adresează atît celor ce studiază termogazodinamica în scopul abordării unor cercetări teoretice, cît și celor care sînt confruntați cu probleme practice de optimizare a proceselor.

AUTORII

București, octombrie 1986

CUPRINS

Prefață 5

1. Noțiuni fundamentale de termogazodinamică 11

2. Ecuațiile fundamentale ale termogazodinamicii 15

2.1. Ecuația de continuitate 15
2.2. Ecuația conservării energiei 18
2.3. Ecuația conservării cantității de mișcare 23
2.4. Ecuația conservării momentului cantității de mișcare 24
2.5. Ecuația mișcării turbionare 25
2.6. Mărimi și ecuații caracteristice curgerii mediilor bifazice monocomponente . . . 26

3. Aplicații ale ecuațiilor de bază ale termogazodinamicii la curgerea unidirecțională a gazelor perfecte 37

3.1. Influența frecării asupra lucrului mecanic dezvoltat sau consumat de o turbomașină 37
3.2. Influența naturii gazului asupra lucrului mecanic al unei turbomașini 39
3.3. Randamentul termogazodinamic al turbomașinilor 40
3.4. Variația parametrilor de stare ai gazului în curgere, în procesele adiabate 42
3.5. Determinarea analitică a pierderilor de presiune accidentale . . . 47
3.6. Transformarea energiei cinetice în lucru mecanic și invers în canalele de palete ale turbmașinilor 48
3.7. Transformarea energiei potențiale în energie cinetică în ajutajul geometric 50
3.8. Transformarea energiei cinetice în energie potențială în difuzor . . . 54
3.9. Ajutajul de debit, mecanic și termic 56
3.10. Influența frecării la curgerea adiabată a gazelor prin conducte lungi . . . 60
3.11. Studiul proceselor de curgere cu ajutorul funcțiilor gazodinamice 65
3.12. Curgerea unui gaz printr-o conductă scurtă, cu schimb de căldură cu pereții 69
3.13. Principiile de măsurare a debitului unui gaz în curgere 71
3.14. Pierderile de presiune la curgerea unui gaz printr-un canal cu secțiune variabilă 75
3.15. Reacțiunile în coturile conductelor pentru transportul gazelor . . . 77
3.16. Calculul unui ejector cu gaze perfecte 78

4. Metode de studiere a proceselor termogazodinamice. Analiza dimensională și similitudinea ; stratul limită dinamic și termic 81

4.1. Teorema π 81
4.2. Criterii de similitudine 86
4.3. Analiza principalelor criterii de similitudine folosite în termogazodinamică . . 87
4.4. Realizarea unui model simil 91
4.5. Interpretarea rezultatelor cercetărilor experimentale pe un model simil, prin analiza dimensională 99
4.6. Criterii de similitudine folosite pentru curgerea mediului bifazic monocomponent 104
4.7. Criterii de similitudine energetică folosite pentru mediul bifazic monocomponent 108
4.8. Stratul limită dinamic 111
4.9. Stratul limită dinamic laminar 115
4.10. Stratul limită dinamic tranzitoriu 127
4.11. Stratul limită dinamic turbulent la curgerea cu viteză mică ($M < 0,5$) . . . 131
4.12. Stratul limită dinamic turbulent la curgerea subsonică cu viteză mare ($1 > M > 0,5$) 137
4.13. Stratul limită dinamic la curgerea gazelor prin conducte circulare 140
4.14. Stratul limită dinamic al mediului bifazic monocomponent 142
4.15. Stratul limită dinamic laminar al mediului bifazic cu o umiditate $y_0 > 6\%$ 145
4.16. Stratul limită dinamic tranzitoriu al mediului bifazic monocomponent cu o umiditate $y_0 > 6\%$ 148

4.17. Stratul limită dinamic turbulent al mediului bifazic monocomponent cu o umiditate $y_0 > 6\%$ . . . 150
4.18. Stratul limită termic al gazelor perfecte pentru viteze de curgere foarte mici ($0 < M \leq 0,3$) . . . 153
4.19. Stratul limită al gazelor perfecte pentru viteze de curgere subsonică (cu $M > 0,3$) şi supersonică . . . 162
4.20. Valorile caracteristice ale stratului limită dinamic şi termic . . . 172

5. Curgerea gazelor prin ajutaje şi difuzoare geometrice . . . 174

5.1. Ajutajul geometric axial pentru gazul perfect . . . 174
5.2. Ajutajul geometric axial, supersonic, pentru gazul perfect . . . 176
5.3. Ajutajlul geometric axial, subsonic, pentru gazul perfect . . . 181
5.4. Ajutajul geometric supersonic curb, pentru gazul perfect . . . 182
5.5. Ajutajul geometric subsonic sau supersonic, cu destindere incompletă, pentru gazul perfect . . . 191
5.6. Ajutajul geometric subsonic pentru mediul bifazic monocomponent . . . 195
5.7. Ajutajul geometric supersonic pentru mediul bifazic monocomponent . . . 200
5.8. Ajutaje geometrice prea lungi sau prea scurte pentru condiţiile reale de funcţionare (pentru gaze perfecte) . . . 202
5.9. Transformarea energiei cinetice a unui gaz perfect în energie potenţială. Difuzorul geometric subsonic . . . 213
5.10. Pierderi de presiune în difuzorul geometric subsonic . . . 215
5.11. Construcţia difuzoarelor geometrice subsonice . . . 219
5.12. Difuzorul geometric supersonic . . . 220

6. Curgerea cu frecare şi schimb de căldură a gazelor prin canale şi conducte . . . 223

6.1. Curgerea adiabat-neizenotropă (cu frecare) a gazului perfect . . . 224
6.2. Curgerea adiabată cu frecare a gazului perfect prin conducte sau canale foarte scurte . . . 228
6.3. Curgerea adiabată cu frecare a gazului perfect prin canale sau conducte foarte lungi . . . 233
6.4. Curgerea fără frecare gazelor perfecte prin canale sau conducte foarte lungi, cu schimb de căldură cu pereţii . . . 243
6.5. Curgerea fără frecare a gazelor perfect prin canale sau conducte scurte cu energie sau masă cu exteriorul. Ajutajul termic, de debit şi mecanic . . . 253
6.6. Curgerea gazelor perfecte prin labirinţi de etanşare . . . 265
6.7. Calculul mărimilor caracteristice ale unui gaz perfect în curgere cu ajutorul funcţiilor gazodinamice . . . 269
6.8. Curgerea prin canale sau conducte a mediului bifazic monocomponent cu o umiditate $2\% < y_0 < 6\%$ . . . 278
6.9. Modele de curgere a mediului bifazic monocomponent cu o umiditate $y_0 > 6\%$ 286
6.10. Curgerea mediului bifazic monocomponent cu o umiditate mare ($y_0 > 6\%$) 290
6.11. Curgerea mediului bifazic monocomponent cu o umiditate mare ($y_0 > 6\%$) prin conducte foarte lungi . . . 297

7. Perturbaţii în procesele de curgere. Unda de şoc . . . 301

7.1. Caracteristicile curgerii supersonice a gazelor perfecte . . . 301
7.2. Apariţia undei de şoc. Viteza de deplasare a undei de şoc . . . 302
7.3. Unda de şoc dreaptă . . . 306
7.4. Mărimile termofizice ale gazului perfect în adiabata de şoc dreaptă. Adiabata lui Huguenot . . . 309
7.5. Unda de şoc oblică . . . 313
7.6. Mărimile termofizice ale gazului în unda de şoc oblică . . . 314
7.7. Utilizarea tubului Pitot la măsurarea vitezelor supersonice . . . 323
7.8. Caracteristicile dinamice ale undei de şoc . . . 325
7.9. Propagarea perturbaţiilor în mediul bifazic monocomponent . . . 330
7.10. Viteza de propagare a undei de şoc în mediu bifazic monocomponent . . . 331

7.11. Unda de şoc dreaptă în mediu bifazic monocomponent 335
7.12. Unda de şoc oblică în mediu bifazic monocomponent 339

8. Termogazodinamica jeturilor de gaze 342

8.1. Mărimile caracteristice ale unui jet de gaz izoterm 345
8.2. Mărimile caracteristice ale jetului liber rotund, izoterm 346
8.3. Calculul analitic al mărimilor caracteristice ale jetului rotund (axial simetric) izoterm 355
8.4. Calculul analitic al mărimilor caracteristice ale jetului plan izoterm 364
8.5. Caracteristicile jetului limitat 366
8.6. Caracteristicile jeturilor concurente 368
8.7. Jeturi neizoterme cu temperatură puţin diferită de a mediului ambiant . . . 371
8.8. Calculul analitic al mărimilor caracteristice ale jetului axial simetric neizoterm cu temperatură puţin diferită de a mediului ambiant 373
8.9. Calculul analitic al mărimilor caracteristice ale jetului neizoterm, cu temperatură mult diferită de a mediului ambiant 376
8.10. Relaţii practice de calcul ale mărimilor caracteristice jeturilor calde 382
8.11. Jeturi supersonice calde 384
8.12. Jeturi limitate foarte calde 386
8.13. Jet de flacără difuzivă 389
8.14. Jeturi bifazice izoterme 391
8.15. Structura jeturilor turbionate şi tehnici folosite pentru generarea lor 395
8.16. Parametrii caracteristici jeturilor turbionate 397
8.17. Structura jeturilor turbionate 400
8.18. Procedee pentru generarea şi studiul jeturilor turbionate 401
8.19. Caracteristici geometrice ale jeturilor turbionate 404
8.20. Studiul teoretic al jetului turbionat 410
8.21. Aplicarea în tehnică a jeturilor turbionate 416

9. Calculul termogazodinamic al maşinilor energetice 419

9.1. Teoria curgerii unidirecţionale a gazului perfect prin treapta de turbină . . . 420
9.2. Teoria curgerii unidirecţionale a gazului perfect prin treapta unui turbocompresor 425
9.3. Definirea randamentului de curgere 428

10. Termogazodinamica proceselor de ardere 432

10.1. Unda de detonaţie 433
10.2. Regimuri detonate de ardere 438

11. Tehnici experimentale în termogazodinamică 440

11.1. Măsurarea temperaturii 441
11.2. Măsurarea presiunii 449
11.3. Măsurarea debitului 453
11.4. Stand experimental pentru determinarea repartiţiei de presiuni şi temperaturi într-un jet 455
11.5. Determinarea umidităţii unui mediu bifazic monocomponent 461
11.6. Determinarea gradului de dispersie a fazei lichide în faza gazoasă 461
11.7. Măsurarea presiunii în mediul bifazic 462
Bibliografie 463

1. NOŢIUNI FUNDAMENTALE DE TERMOGAZODINAMICĂ

Dezvoltarea motoarelor cu reacţie, a turbomaşinilor cu gaze şi a aerodinamicii vitezelor ridicate au determinat intensificarea preocupărilor pentru fundamentarea teoretică a cercetărilor experimentale din domeniul termogazodinamicii şi introducerea aplicaţiilor fizicii moderne în tehnică.

Termogazodinamica aplică legile generale ale termodinamicii şi mecanicii la studiul proceselor de curgere a fluidelor compresibile prin conducte, prin organele turbomaşinilor, în jurul profilelor etc. Aceste legi generale care sînt utilizate direct sau indirect sînt: legea conservării masei; a doua lege a lui Newton referitoare la cantitatea de mişcare; primul principiu al termodinamicii; al doilea principiu al termodinamicii; ecuaţia de stare a sistemului; ecuaţiile caracteristice schimbului de masă şi de căldură.

În mecanică, starea unui sistem format din N particule este perfect determinată dacă se cunosc $6N$ variabile (cîte 3 coordonate de poziţie şi 3 de viteză, pentru fiecare particulă). Termogazodinamica se referă la agenţi formaţi dintr-un număr mare de particule, astfel că definirea noţiunii de stare, ca în mecanică, prezintă o serie de inconveniente datorită imposibilităţii de stabilire a celor $6N$ variabile. De aceea, noţiunea de stare-stabilă la scară macroscopică în termodinamică prezintă un alt sens, anume legat de valorile medii ale mărimilor de stare care în general pentru un sistem neomogen sînt: masa, compoziţia chimică, starea de agregare, presiunea, volumul şi temperatura fiecărei părţi omogene. În mod evident nu toate aceste mărimi sînt independente; astfel, pentru fiecare parte omogenă şi de compoziţie chimică dată, temperatura, volumul şi presiunea sînt legate printr-o ecuaţie de stare diferită.

În cazul cînd sistemul se găseşte în mişcare, starea termodinamică nu dă informaţii asupra stării dinamice, sistemul putînd să treacă succesiv prin toate stările dinamice care corespund unei stări termodinamice date. Din acest motiv, pentru studierea din punct de vedere dinamic a fenomenelor termodinamice trebuie utilizată şi ecuaţia de mişcare. Pentru a simplifica forma ecuaţiilor care descriu fenomenele care însoţesc transformarea unui sistem, se consideră că stările prin care trece sistemul reprezintă o succesiune de stări de echilibru, ceea ce presupune ca viteza de desfăşurare a transformărilor de stare să fie foarte ridicată.

Pentru a face o analiză completă a unui sistem constituit dintr-un fluid în mişcare este necesar să fie cunoscute proprietăţile termofizice ale fluidului. În raport cu gradul de aproximare a fluidului real se deosebesc :

— fluide perfect incompresibile, care reprezintă modelul cel mai simplu de gaz fără frecare vîscoasă, caracterizat prin menţinerea constantă a densităţii. Această ipoteză corespunde mişcării gazului perfect cu o viteză de pînă la 150 m/s ;

— fluide compresibile, care reprezintă un model mai complex, la care deşi se neglijează frecarea vîscoasă se iau în considerare variaţiile de densitate ;

— fluide vîscoase, care presupun luarea în considerare şi a efectelor forţei de frecare vîscoasă.

Fluidul utilizat frecvent în termogazodinamică este gazul perfect, pentru care este valabilă ecuaţia de stare $pv = RT$, iar căldura specifică se consideră variabilă numai cu temperatura.

Legea conservării masei exprimă menţinerea constantă a cantităţii de fluid cuprinsă într-un volum V, iar *a doua lege a lui Newton* precizează că variaţia cantităţii de mişcare în unitatea de timp, este egală cu suma algebrică a forţelor exterioare.

Primul principiu al termodinamicii reprezintă legea generală de conservare a energiei ; pentru un ciclu acest principiu se exprimă prin relaţia $\int \delta Q = \int \delta L$, ceea ce exprimă echivalenţa între schimbul de energie cu mediul exterior numai sub formă de căldură şi de lucru mecanic. Dacă se introduce noţiunea de energie internă U, între două stări de echilibru infinit apropiate ale unui sistem cu masa $\dot{m}$ se obţine $\mathrm{d}U = \delta Q - \delta L - \dot{m}w\mathrm{d}w - \dot{m}g\,\mathrm{d}z$, relaţie care exprimă egalitatea între variaţia energiei interne U şi interacţiunile de natură termică şi mecanică ale sistemului cu mediul exterior, termenul $\dot{m}g \cdot \mathrm{d}z$ definind variaţia energiei potenţiale ca urmare a diferenţei de cotă $\mathrm{d}z$ între starea finală şi cea iniţială.

Conform celui de-*al doilea principiu al termodinamicii*, energia dezordonată caracteristică mişcării de agitaţie moleculară nu poate fi transformată integral într-o formă ordonată de energie, sau, folosind conceptul de entropie, stabilit la scară macroscopică, în cursul unei transformări de stare, realizată fără schimb de energie cu mediul ambiant, variaţia de entropie este pozitivă, cel mult ea putînd să rămînă nulă. Din punct de vedere matematic această exprimare a principiului al doilea al termodinamicii este echivalentă cu expresia

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\delta Q}{T} \tag{1.1}$$

Dacă relaţiile care exprimă matematic cele două principii ale termodinamicii se combină, se obţine expresia

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\mathrm{d}U + \delta L + \dot{m}w\mathrm{d}w + \dot{m}g\mathrm{d}z}{T} \tag{1.2}$$

sau, folosind variaţia de entalpie $dH = dU + p\,dV + V\,dp$:

$$dS \geqslant \frac{dH - V\,dp + m\,dw + mg\,dz}{T} \tag{1.3}$$

În cazul gazelor perfecte, variaţia infinit mică de energie internă, respectiv de entalpie, este

$$dU = m\,dU = m\,c_v\,dT \tag{1.4}$$

$$dH = m\,dh = m\,c_p\,dT \tag{1.5}$$

unde m reprezintă masa sistemului, c_p şi c_v căldura specifică la presiune, respectiv volum constant, iar dT variaţia infinit mică de temperatură.

Dacă un fluid se deplasează printr-o conductă, forţele de frecare vîscoasă şi mecanică condiţionează regimul de curgere şi ca urmare, distribuţia de viteză într-o secţiune oarecare. În cazul deplasării particulelor de fluid pe traiectorii care prezintă aceeaşi direcţie, iar liniile de curent sînt paralele cu axa conductei, curgerea se desfăşoară în *regım lamianar*, forţele de viscozitate fiind dominante în raport cu cele de frecare.

La creşterea vitezei, viscozitatea nu mai poate menţine un regim laminar de curgere şi, cu excepţia unei zone din vecinătatea pereţilor, valoarea vitezei în secţiune se menţine aproape constantă, curgerea avînd un caracter *turbulent*. Atît în cazul curgerii laminare cît şi al celei turbulente, forţele de frecare determină o pierdere de presiune. Desigur, densitatea, viscozitatea şi ceilalţi parametri termofizici ai fluidului reprezintă factori importanţi în procesul de trecere de la regimul laminar la cel turbulent, dar pe baza acestor proprietăţi nu poate fi stabilită o delimitare între cele două regimuri de curgere, rugozitatea pereţilor avînd rol determinant.

În general, curgerea laminară se realizează pentru o valoare a criteriului Reynolds sub 2 000, iar peste 10 000 curgerea este turbulentă, urmînd ca în acest interval curgerea să prezinte caracter laminar sau turbulent în funcţie de o serie de factori fizici între care şi rugozitatea pereţilor.

În cazul curgerii turbulente, coeficientul de frecare λ din expresia pierderii distribuite de presiune $\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2}$ nu mai are expresia simplă ca în cazul regimului laminar şi anume $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$ şi el nu poate fi teoretic evaluat pe aceleaşi baze. Pentru fluide incompresibile, sau pentru cele compresibile care se deplasează cu o viteză relativ mică în raport cu viteza sonică, în regim laminar coeficientul de frecare se poate considera cu expresia $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$.

La curgerea fluidelor compresibile în regim supersonic valoarea coeficientului de frecare depinde de parametrii curgerii și prezintă valori superioare comparativ cu fluidele incompresibile, pentru aceași mărime a criteriului Reynolds. O serie de caracteristici sugerează ca pentru regimul supersonic de viteză, valoarea coeficientului de frecare pentru fluidele incompresibile să se considere jumătate din valoarea corespunzătoare fluidelor compresibile.

Al *treilea principiu al termodinamicii* nu introduce nici o funcție termodinamică nouă, dar oferă posibilitatea de a calcula valorile absolute ale parametrilor de stare, evidențiind că pentru temperaturi care tind spre zero absolut (0 K = —273,15°C), variația de entalpie devine egală cu variația energiei libere $G = H - TS$; $\lim\limits_{T \to 0} \Delta H = \lim\limits_{T \to 0} \Delta G$. Aplicînd acest principiu variației de entropie, rezultă că pentru $T \to 0$ K nu numai variația entropiei se anulează, ci și valoarea absolută a ei.

Transferul de căldură reprezintă un proces spontan de schimb energetic între două sisteme caracterizate prin valori diferite ale temperaturii. El are loc în trei moduri distincte : conducție, convecție și radiație. Conform definiției, numai conducția și radiația constituie fenomene de transfer energetic (datorită exclusiv diferenței de temperatură) ; convecția reprezintă un proces mai complex care presupune atît transfer de căldură cît și de masă.

Transferul de masă este analog transferului de căldură, ambele fiind determinate de variația unui parametru motor : concentrația și respectiv temperatura. Transferul de masă se realizează în două moduri : prin difuzie moleculară (denumită termodifuzie) sau prin difuzie turbulentă (convecție) Relația de bază pentru difuzia moleculară este legea lui Fick, care definește fluxul de masă J determinat de variația de concentrație c pe o direcție oarecare $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\left(J = -\mathfrak{D}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right)$ [kg/m²s], $\mathfrak{D}$ fiind denumit *coeficient de difuzie.*

În numeroase cazuri are loc un transfer de substanță între două sau mai multe faze care se găsesc în contact. Pentru realizarea acestui transfer de masă trebuie să existe un grad de dezechilibru, constituit printr-un gradient de concentrație, presiune, temperatură, etc.

2. ECUAȚIILE FUNDAMENTALE ALE TERMOGAZODINAMICII

2.1. ECUAȚIA DE CONTINUITATE

Ecuația de continuitate sau de conservare a masei exprimă conservarea debitului masic de fluid corespunzător unui volum V care parcurge în intervalul de timp τ o porțiune dintr-un tub de curent ; expresia ei poate fi stabilită dacă se ia în considerație că : mișcarea are loc în regim permanent ; parametrii de stare și mărimile termofizice caracteristice au valori medii, deci constante dintr-o secțiune dată ; traiectoriile particulelor coincid cu liniile de curent. Dacă ne referim la un volum de control V, închis de o suprafață S, așa după cum rezultă din figura 2.1, masa de gaz

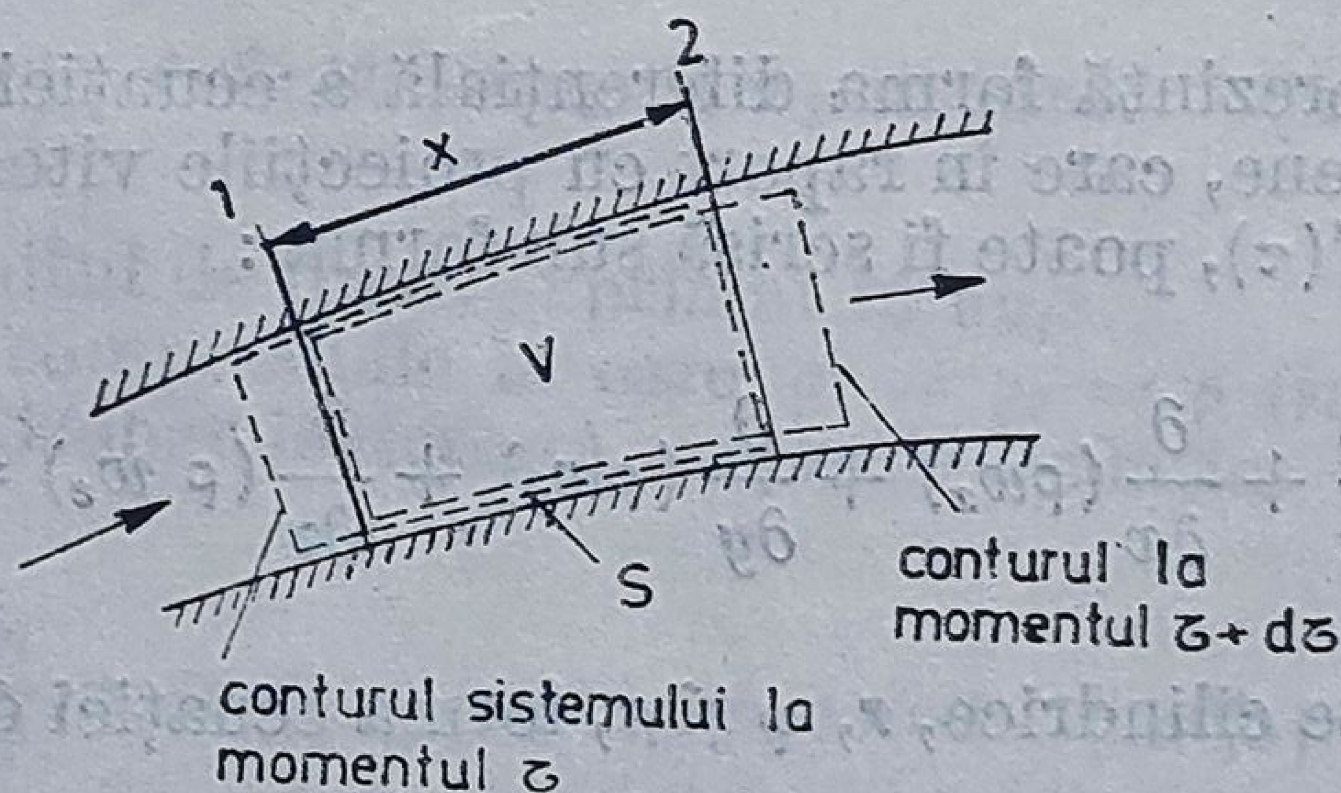


Fig. 2.1. Element de volum de fluid în curgere.

care intră în volumul de control în unitatea de timp — în cazul regimului permanent de curgere — este egală cu cea care iese ; deci în volumul V nu au loc procese generatoare de substanță, schimbări de fază sau reacții chimice sau nucleare care să ducă la modificarea compoziției. Cu aceste ipoteze, egalitatea între cantitatea de substanță care intră și cea care iese din volumul de control se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_V \rho \, dV = \int_S \rho \bar{w} \, \bar{n} \, dS \tag{2.1}$$

unde τ reprezintă timpul, ρ densitatea, $\bar{w}$ viteza, iar $\bar{n}$ versorul normalei la suprafaţa perpendiculară pe direcţia curgerii.

Proiecţia vectorului viteză $\bar{w}$ pe direcţia normalei este $w \cdot \cos\theta$ şi deci expresia ecuaţiei de continuitate devine

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_V \rho \, dV = \int_S \rho\, w \cos\theta \cdot dS \tag{2.2}$$

Aplicînd teorema lui Gauss, referitoare la posibilitatea de transformare a integralei de suprafaţă în cea de volum, se obţine

$$\int_S \rho\, w \cos\theta \cdot dS = -\int_V \text{div}\ (\rho w)\ dV \tag{2.3}$$

Prin înlocuirea acestei expresii în ecuaţia (2.2), rezultă

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_V \rho \, dV + \int_V \text{div}(\rho w)\, dV = 0$$

sau

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}\ (\rho w) = 0 \tag{2.4}$$

Această relaţie reprezintă forma diferenţială a ecuaţiei de continuitate în coordonate carteziene, care în raport cu proiecţiile vitezei pe cele trei axe, pentru cazul $\rho = f(\tau)$, poate fi scrisă sub forma :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\, w_z) = 0 \tag{2.5}$$

În coordonate cilindrice, r, φ şi z, forma ecuaţiei de continuitate este

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r\, w_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho\, w_\varphi) + \frac{\partial(\rho\, w_z)}{\partial z} = 0, \tag{2.6}$$

iar în coordonate sferice r, φ, ψ, se obţine forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 w_r) + \frac{1}{r \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho\, w_\varphi \sin\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{r \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \psi}(\rho\, w_\psi) = 0 \tag{2.7}$$

unde w_x, w_y, w_z;w_r w_φ și w_ψ reprezintă proiecțiile vitezei pe direcțiile corespunzătoare.

În regim permanent de curgere debitul masic se menține constant, astfel că

$$\frac{dm_1}{d\tau} = \frac{dm_2}{d\tau} = \frac{dm}{d\tau} = \text{const.},$$

iar cantitățile elementare de substanță care intră și respectiv ies prin secțiunile A_1 și A_2 (fig. 2.2) sînt

$$dm_1 = \rho_1 \cdot A_1 \cdot dl_1; \quad dm_2 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot dl_2.$$

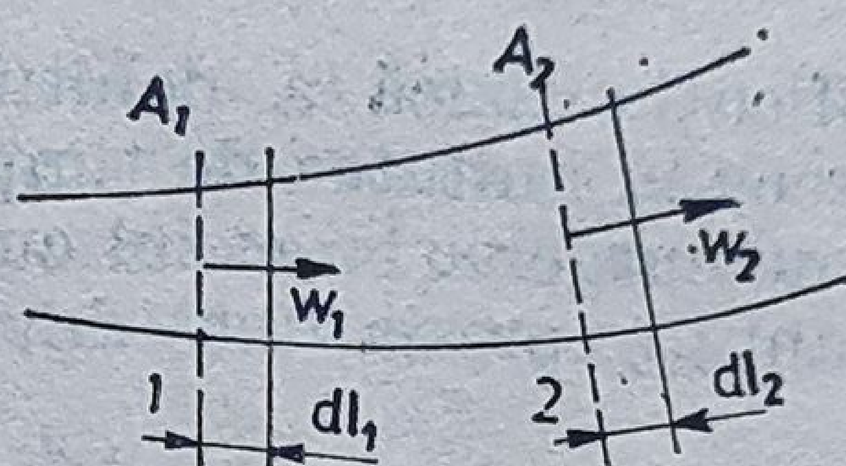


Fig. 2.2. Element de volum în curgere în regim permanent.

Deoarece $dl_1 = w_1 d\tau$ și $dl_2 = w_2 \cdot d\tau$ în care w_1 și w_2 reprezintă valorile vitezelor medii corespunzătoare secțiunilor A_1, A_2, rezultă că pentru regimul permanent

$$\frac{dm}{d\tau} = \dot{m} = \rho_1 A_1 w_1 = \rho_2 A_2 w_2 = \text{const.} \quad [\text{kg/s}]$$

unde $\dot{m}$ reprezintă debitul de fluid, exprimat în kg/s.

Pentru fluide incompresibile la care $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ (sau compresibile dar în cazul curgerii izobar-izoterme), expresia ecuației de continuitate devine

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = w_1 A_1 = w_2 A_2 = \text{const} \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

sau, sub formă diferențială, potrivit expresiei (2.5)

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Expresiile debitului masic și volumic permit determinarea vitezei medii a fluidului în funcție de valorile densității și secțiunii de curgere.

În cazul unui proces de curgere însoțit de transformări termodinamice ale fluidului, apar modificări ale mărimilor de stare și, deci, datorită schimburilor energetice cu mediul exterior viteza medie se va modifica (pentru

$\dot{m}$ şi A = const.). Rezultă deci că procesul de curgere a unui gaz printr-un canal sau o conductă poate avea loc în două situaţii distincte :

— curgerea nu este însoţită de transformări de stare, deci se produce fără schimb de energie cu mediul exterior (în acest caz are loc un proces pur gazodinamic) ;

— curgerea este însoţită de un schimb de energie care duce la modificarea parametrilor de stare, în care caz are loc un proces termogazodinamic.

Dacă se introduce noţiunea de debit masic specific $J = \rho \cdot w$, exprimamat în kg/m²s, expresia ecuaţiei de continuitate devine

$$J_1 = \rho_1 \cdot w_1 = \frac{\dot{m}}{A_1} \; ; \; J_2 = \rho_2 \cdot w_2 = \frac{\dot{m}}{A_2} \quad [\text{kg/m}^2\text{s}] \qquad (2.8)$$

Semnificaţia fizică a debitului masic J corespunde cantităţii de fluid care trece în unitatea de timp prin unitatea de secţiune transversală a canalului de curgere. În cazul curgerii adiabate a unui gaz printr-o secţiune constantă expresia (2.8) devine

$$J_1 = J_2 = \frac{\dot{m}}{A} = \rho_1 \cdot w_2 = \rho_2 \cdot w_2, \qquad (2.9)$$

adică modificarea vitezei medii de curgere a unui fluid intervine şi la schimbarea densităţii, chiar în condiţiile menţinerii constante a debitului şi secţiunii.

2.2. ECUAŢIA CONSERVĂRII ENERGIEI

Conform principiului conservării energiei, suma tuturor formelor de energie pe care le posedă sau le schimbă cu mediul exterior un sistem termodinamic se menţine constantă. În cazul sistemelor termodinamice deschise (în curgere), expresia primului principiu al termodinamicii pentru un debit masic $\dot{m}$ = 1 kg/s şi pentru două secţiuni de control 1 şi 2, este

$$\frac{w_1^2}{2} + p_1 v_1 + u_1 + g z_1 + q = \frac{w_2^2}{2} + p_2 v_2 + u_2 + g z_2 + l_t + l_{fr} \quad (2.10)$$

în care : $\frac{w_1^2}{2}$ şi $\frac{w_2^2}{2}$ reprezintă valorile energiilor cinetice specifice ; $p_1 v_1$ şi $p_2 v_2$ — energiile de deplasare ; u_1 şi u_2 — energiile interne ; $g z_1$ şi $g z_2$ — energiile potenţiale de poziţie ; q — schimbul de căldură între secţiunile 1 şi 2 ; l_t — lucrul mecanic schimbat cu mediul ambiant între secţiunile 1 şi 2 ; l_{fr} — lucrul mecanic de frecare între aceleaşi secţiuni.

La mașinile termice rotative, energia potențială de poziție prezintă valori apropiate ($gz_1 = gz_2$) și deci ecuația (2.10) poate fi scrisă sub forma

$$q - l_t = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + (u_2 - u_1) + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + l_{fr} \quad (2.11)$$

Expresia primului principiu se poate scrie și în funcție de variația de entalpie ($h = u + pv$) :

$$q - l_t = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + (h_2 - h_1) + l_{fr} \quad [\mathrm{J/kg}] \quad (2.12)$$

Sensul fizic al acestei expresii arată că la trecerea între două stări de echilibru, formele de energie se pot transforma una în cealaltă. Schimbul de căldură q între secțiunile 1 și 2, se realizează prin interacțiuni cu exteriorul q_{ext}, cît și prin transformări energetice interne q_{int}, deci :

$$q = q_{ext} + q_{int} \quad (2.13)$$

Lucrul mecanic de frecare l_{fr}, datorat procesului de frecare între agentul termic și suprafața canalului de curgere, cît și forțelor de viscozitate, se transformă totdeauna în căldură, care rămîne în masa fluidului :

$$l_{fr} = q_{int} \quad (2.14)$$

Ca urmare, expresia legii conservării energiei va fi

$$q_{ext} - l_t = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + (h_2 - h_1), \quad (2.15)$$

deci, formal, lucrul mecanic de frecare nu apare explicit în expresia legii conservării energiei ; aceasta nu înseamnă că el nu afectează bilanțul de energie al sistemului, ci transformîndu-se în căldură, care rămîne în masa de agent, influențează asupra unei alte forme de energie — de exemplu entalpia. Pentru exemplificare, se consideră curgerea unui gaz printr-un canal, care nu schimbă nici lucru mecanic și nici căldură cu mediul exterior. Dacă se neglijează frecarea, ecuația conservării energiei are forma

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = h_1 - h_2, \quad (2.16)$$

ceea ce pune în evidență posibilitatea de transformare a entalpiei în energie cinetică.

Expresia diferențială a ecuației de conservare a energiei (21.10) este

$$\delta q - \delta l_t = w\,\mathrm{d}w + \mathrm{d}u + \mathrm{d}\,(pv) + g\,\mathrm{d}z + \delta l_{fr} \tag{2.17}$$

Dacă în timpul procesului de curgere nu are loc schimb de căldură cu exteriorul și dacă valorile energiilor interne sînt identice pentru secțiunile 1 și 2, prin particularizarea relației (2.17) se obține ecuația :

$$-\delta l_t = w\mathrm{d}w + \mathrm{d}\,(pv) + g\mathrm{d}z + \delta l_{fr} \tag{2.18}$$

Această relație prezintă dependență univocă între energia cinetică, schimbul de lucru cu mecanic exteriorul și lucrul mecanic de frecare.

Una din aplicațiile tehnice ale acestei ecuații se referă la determinarea pierderilor de energie pentru învingerea forțelor de frecare la curgerea unidirecțională a unui fluid printr-un canal, fără schimb de lucru mecanic cu exteriorul. Pentru un astfel de caz, expresia (2.18) devine

$$w\cdot\mathrm{d}w + \mathrm{d}\,(pv) + g\cdot\mathrm{d}z + \delta l_{fr} = 0$$

sau, după integrare,

$$l_{fr} = \left(\frac{w_1^2}{2} + p_1v_1 + gz_1\right) - \left(\frac{w_2^2}{2} + p_2v_2 + gz_2\right)\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgs}}\right] \tag{2.19}$$

Valoarea lucrului mecanic corespunzător procesului de frecare, pentru un debit elementar de fluid ($\mathrm{d}\dot{m} = \rho w\cdot\mathrm{d}A$) devine

$$\int_{A2} l_{fr}\,\rho_2 w_2\,\mathrm{d}A = \int_{A1}\left(\frac{w_1^2}{2} + p_1v_1 + gz_1\right)\rho_1 w_1\,\mathrm{d}A -$$

$$-\int_{A2}\left(\frac{w_2^2}{2} + p_2v_2 + gz_2\right)\rho_2 w_2\mathrm{d}A$$

sau $$\int_{A2} l_{fr}\,\rho_2 w_2\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\int_{A2} w_1^3\rho_1\,\mathrm{d}A + \dot{m}(p_1v_1 + gz_1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{A2} w_2^3\rho_2\mathrm{d}A + \dot{m}(p_2v_2 + gz_2) \quad [\mathrm{W}] \tag{2.20}$$

Pentru a se ține seamă de neuniformitatea de repartizare a vitezei într-o secțiune transversală de curgere, se introduce noțiunea de coeficient

de distribuţie a vitezei $\varphi_w = \frac{\int_A w^2 \cdot dA}{w_m^2 \cdot A}$ (unde w_m reprezintă valoarea medie a vitezei în secţiunea A). Prin introducerea acestui coeficient de distribuţie a vitezei în ecuaţia (2.20) se obţine :

$$l_{fr} = \left(\varphi_{w1} \frac{w_{m1}^2}{2} + p_1 v_1 + g z_1\right) - \left(\varphi_{w2} \frac{w_{m2}^2}{2} + p_2 v_2 + g z_2\right) \qquad (2.21)$$

Dacă se consideră că fluidul este incompresibil $\left(v_1 = v_2 = \frac{1}{\rho}\right)$ şi nu are loc schimb de lucru mecanic cu exteriorul, după integrarea ecuaţiei (2.18), se obţine

$$l_{fr} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) + g(z_1 - z_2) \qquad (2.22)$$

sau, prin introducerea unei condiţii suplimentare, referitoare la egalitatea energiilor de poziţie $gz_1 = gz_2$, rezultă

$$l_{fr} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2).$$

şi deci :

$$\rho\, l_{fr} = \rho \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + (p_1 - p_2) \qquad (2.23)$$

Această expresie particulară, denumită ecuaţia Bernoulli, permite stabilirea pierderii de presiune prin frecare $\Delta p_{fr} = \rho l_{fr}$, care este cauzată fie de modificarea de viteză, fie de energie.

Conform expresiei (2.22) valoarea maximă a vitezei w_2 corespunzătoare secţiunii de ieşire dintr-un canal în care nu are loc schimb de lucru mecanic şi căldură cu exteriorul, în ipoteza unei transformări izocore (v = const) şi neglijării frecării, este

$$w_{2max} = \sqrt{w_1^2 + 2\frac{p_1 - p_2}{\rho} + 2g(z_1 - z_2)} \quad \left[\frac{m}{s}\right] \qquad (2.24)$$

În acelaşi mod, prin particularizarea relaţiei (2.22) se poate stabili valoarea maximă a vitezei şi pentru alte transformări termodinamice; cu ajutorul relaţiilor prezentate în tabelul 2.1 se pot calcula valoarea vitezei maxime w_{2max} şi lucrul mecanic de frecare l_{fr} pentru cele cinci transformări termodinamice de stare a gazelor perfecte.

Tabelul 2.1

Valorile vitezei maxime şi lucrului mecanic de frecare pentru un gaz perfect

Nr.	Transformarea termodinamică	$-\int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = [\mathrm{J/kg}]$	$w_{2\,max} = [\mathrm{m/s}]$	l_{fr} [J/kg]
1	Izocoră ($v = \mathrm{const.}$)	$= \frac{p_1 - p_2}{\rho}$	$= \sqrt{w_1^2 + 2\frac{p_1 - p_2}{\rho} + 2g(z_1 - z_2)}$	$= \left(\frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) - \left(\frac{w_2^2}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right)$
2	Izobară ($p = \mathrm{const.}$)	$= 0$	$= \sqrt{w_1^2 + 2g(z_1 - z_2)}$	$= \left(\frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1\right) - \left(\frac{w_2}{2} + g \cdot z_2\right)$
3	Izotermă ($T = \mathrm{const.}$)	$= \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_1}{p_2}$	$= \sqrt{w_1^2 + 2\frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_1}{p_2} + 2g(z_1 - z_2)}$	$= \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_1}{p_2} + g(z_1 - z_2)$
4	Adiabată ($\delta q = 0$)	$= \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$	$= \sqrt{w_1^2 + \frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[2 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] + 2g(z_1 - z_2)}$	$= \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] + g(z_1 - z_2)$
5	Politropă	$= \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$	$= w_1^2 + \frac{2n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} + 2g(z_1 - z_2)\right]$	$= \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right] + g(z_1 - z_2)$

2.3. ECUAȚIA CONSERVĂRII CANTITĂȚII DE MIȘCARE

Ecuația conservării cantității de mișcare (a impulsului) se poate aplica fluidelor în curgere, cu condiția considerării unei tranșe înghețate de gaz.

În figura 2.3 se prezintă conturul suprafeței S corespunzătoare unei cantități de fluid la momentul τ și conturul suprafeței S' pe care o prezină fluidul la momentul $\tau + d\tau$.

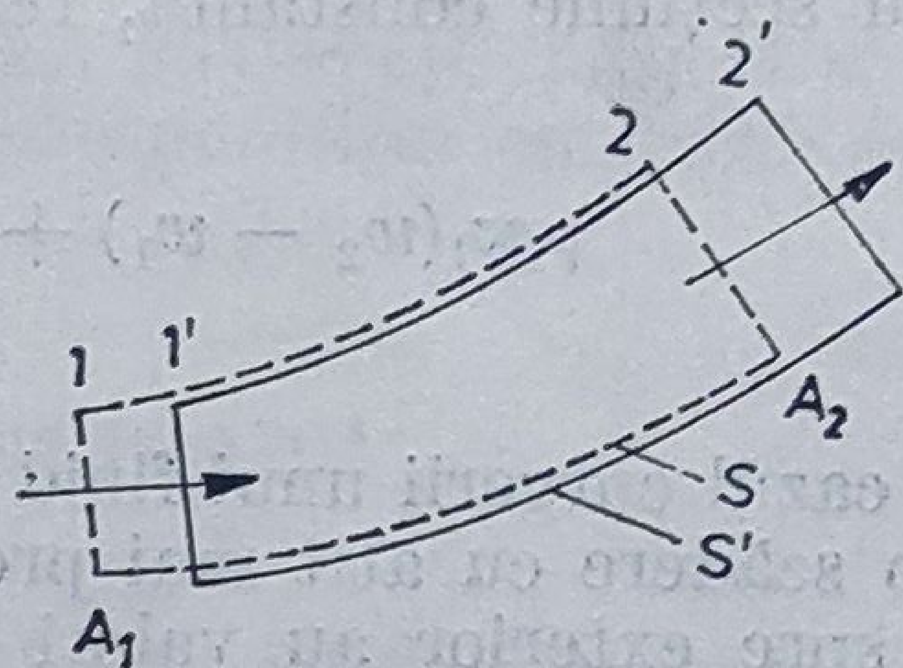


Fig. 2.3. Conturul de control al unui element de volum în curgere

Expresia ecuației de conservare a impulsului arată că suma vectorială a forțelor exterioare care acționează asupra unei mase de gaz în mișcare este egală cu variația impulsului în unitatea de timp, adică

$$\Sigma \bar{F}_i = m \frac{dw}{d\tau} \text{ sau } \tau F_i = \frac{d}{d\tau}(m\bar{w}) \tag{2.25}$$

unde m reprezintă masa tranșei înghețate de gaz (indeformabile).

Forțele exterioare care acționează asupra unei mase de gaz în mișcare sînt :

— forțele de presiune, dirijate în direcție normală față de secțiunea de curgere A ; dacă se consideră, pentru simplificare, secțiuni de intrare/ieșire suficient de apropiate ($A_1 = A_2 = A$), forța de presiune prezintă expresia $F_p = (p_1 - p_2)A$;

— forțele de frecare $- F_{fr}$;

— forțele mecanice exterioare F_m care intervin dacă se consideră că în curentul de gaz se găsește o turbomașină.

Ținînd seamă de aceste forțe și de faptul că procesul de curgere se desfășoară în regim permanent, expresia ecuației de conservare a impulsului proiectată pe cele trei axe de coordonate devine :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= (p_1 - p_2)_x A - F_{frx} - F_{mx} = \dot{m}(w_{2x} - w_{1x}) \\ \Sigma F_y &= (p_1 - p_2)_y A - F_{fry} - F_{my} = \dot{m}(w_{2y} - w_{1y}) \\ \Sigma F_z &= (p_1 - p_2)_z A - F_{frz} - F_{mz} = \dot{m}(w_{2z} - w_{1z}) \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Acest sistem de ecuații este echivalent cu forma diferențială

$$\dot{m}dw = - A dp - \delta F_{fr} - \delta F_m \tag{2.27}$$

Dacă această ultimă expresie se împarte cu valoarea suprafeţei transversale a curentului de fluid A, se obţine pentru o direcţie oarecare

$$\rho_1 w_1 \mathrm{d}w_1 + \mathrm{d}p = -\frac{\delta F_{fr}}{A} - \frac{\delta F_m}{A}$$

Prin integrarea acestei ecuaţii diferenţiale, în cazul curgerii printr-un canal cu secţiune constantă, rezultă :

$$\rho_1 w_1 (w_2 - w_1) + (p_2 - p_1) = -\frac{F_{fr}}{A} - \frac{F_m}{A}\,; \qquad (2.28)$$

deci în cazul curgerii unui fluid printr-o turbomaşină, presiunea şi viteza acuză o scădere cu atît mai pronunţată cu cît forţele de frecare şi cele cedate spre exterior au valori mai ridicate.

2.4. ECUAŢIA CONSERVĂRII MOMENTULUI CANTITĂŢII DE MIŞCARE

Expresia ecuaţiei de conservare a momentului cantităţii de mişcare arată că ,,suma momentelor forţelor exterioare este egală cu variaţia momentului cantităţii de mişcare în unitatea de timp :

$$\Sigma M_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \Sigma m\,(w_z y - w_y z) \qquad (2.29)$$

în care ΣM_x reprezintă suma momentelor forţelor exterioare faţă de axa x; w_y şi w_z — proiecţiile vitezei pe axele y şi z.

Membrul drept al ecuaţiei (2.29) poate fi scris şi sub forma :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \Sigma m(w_z y - w_y z) = \dot{m}[(w_{z2} y_2 - w_{y2} z_2) - (w_{z1} y_1 - w_{y1} z_1)]$$

unde $\dot{m}$ reprezintă debitul masic exprimat în kg/s.

Expresiile momentului cantităţii de mişcare în raport cu cele trei axe de coordonate sînt

$$\begin{aligned} M_x &= \dot{m}[(w_{z2} y_2 - w_{y2} z_2) - (w_{z1} y_1 - w_{y1} z_1)] \\ M_y &= \dot{m}[(w_{x2} z_2 - w_{z2} x_2) - (w_{x1} z_1 - w_{z1} x_1)] \qquad (2.30) \\ M_z &= \dot{m}[(w_{y2} x_2 - w_{x2} y_2) - (w_{y1} x_1 - w_{x1} y_1)] \end{aligned}$$

În mod obişnuit, mişcarea particulelor de fluid are loc pe suprafeţe plan-paralele, astfel că ecuaţiile de conservare a momentului cantităţii de mişcare se pot scrie faţă de direcţiile radială şi tangenţială astfel :

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \dot{m}(w_{r2}r_2 - w_{r1}r_1) \\ M_u &= \dot{m}(w_{u2}r_2 - w_{u1}r_1) \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

în care w_r şi w_u reprezintă proiecţiile vitezei pe direcţia radială şi tangenţială, iar r — raza vectoare a punctului corespunzător centrului de masă.

2.5. ECUAŢIA MIŞCĂRII TURBIONARE

Dacă se consideră un volum elementar de fluid cu masa $m=1$, care se deplasează pe o traiectorie cu raza de curbură r, gradientul de presiune la starea de echilibru este

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\rho\frac{w^2}{r} \tag{2.32}$$

în care ρ este densitatea fluidului, iar w—valoarea vitezei tangenţiale.

De asemenea, condiţia hidrostatică de echilibru a elementului de masă este

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g \tag{2.33}$$

Considerînd o valoare constantă pentru densitate, prin separarea variabilelor din ecuaţiile de mai sus şi izolarea termenului $\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$, ţinînd seamă de suprapunerea efectelor, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -\frac{w^2}{r}\mathrm{d}r - g\,\mathrm{d}z,$$

iar prin integrare se obţine

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = -w^2\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - g(z_2 - z_1)$$

unde w reprezintă viteza tangenţială.

Prin separarea și gruparea termenilor care se referă la cele două secțiuni de control 1 și 2, rezultă

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + gz_2 \qquad (2.34)$$

Această expresie reprezintă ecuația lui Bernoulli pentru un turbion.

Dacă se consideră constantă valoarea cotei z la care se desfășoară turbionul, sub formă diferențială ecuația (2.34) poate fi scrisă astfel:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0$$

Prin derivare în funcție de rază, se obține

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

sau prin înlocuirea relației (2.32), rezultă:

$$\frac{w^2}{r} + w\frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Prin separarea variabilelor și integrarea ecuației, se obține

$$\int\frac{dr}{r} = -\int\frac{dw}{w}$$

$$\text{sau } r\cdot w = \text{const.} \qquad (2.35)$$

Expresia (2.35) reprezintă ecuația mișcării turbionare, care arată că produsul între raza de curbură și viteză se menține constant pe o linie de curent.

2.6. MĂRIMI ȘI ECUAȚII CARACTERISTICE CURGERII MEDIILOR BIFAZICE MONOCOMPONENTE

Starea termodinamică a unui sistem bifazic monocomponent gaz-lichid, de exemplu, se determină cu ajutorul a doi parametri de stare independenți, aleși între p, v, T, la care se mai adaugă raportul între masa fazei gazoase și masa totală a sistemului, notat cu x. Legătura între parametrii de stare ai mediului bifazic și valorile corespunzătoare fazelor componente se obține pe baza proprietății de activitate a funcțiilor termodi-

namice; astfel în cazul unui sistem monocomponent bifazic lichid-vapori la starea de saturaţie, volumul total V este egal cu suma între volumul lichidului $m'v'$ şi al gazului $m''v''$, unde cu indicele (′) se notează parametrii de stare ai lichidului, iar cu indicele (″) ai vaporilor.
Deci:

$$V = m'v' + m''v'' \quad [\mathrm{m^3}] \tag{2.36}$$

Volumul specific $v = \dfrac{V}{m} = \dfrac{V}{m' + m''}$, exprimat în funcţie şi de raportul x între masa fazei gazoase şi totală (denumit titlu în cazul amestecurilor gaz-lichid) are expresia

$$v = v' + x(v'' - v') \quad \left[\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{2.37}$$

În mod analog se stabilesc valorile şi pentru ceilaţi parametrii de stare, cum sînt energia internă, entalpia, căldura specifică, entropia etc.

$$u = u' + x(u'' - u') \quad [\mathrm{J/kg}] \tag{2.38}$$

$$h = h' + x(h'' - h') \quad [\mathrm{J/kg}] \tag{2.39}$$

$$c_v = c_v' + x(c_v'' - c_v') \quad [\mathrm{J/kg \cdot K}] \tag{2.40}$$

$$s = s' + x(s'' - s') \quad [\mathrm{J/kg \cdot K}] \tag{2.41}$$

În termodinamică — ca şi în mecanică — echilibrul unui sistem poate fi stabil sau nestabil. Echilibrul stabil al sistemelor termodinamice izolate se caracterizează prin valoarea maximă a entropiei. În general, considerentele termodinamice referitoare la procesele de condensare sau vaporizare se dovedesc insuficiente pentru descrierea fenomenelor, datorită neintroducerii variabilei timp. La o temperatură inferioară valorii corespunzătoare modificării de fază se consideră că fazele rămîn în echilibru un interval de timp infinit, ipoteză care în multe situaţii este departe de realitate datorită neluării în considerare a fenomenelor de difuzie interfazică.

Caracteristic fenomenelor termogazodinamice este existenţa unor stări metastabile întîlnite la agenţii termodinamici obişnuiţi; de exemplu, Stodola a evidenţiat existenţa unor astfel de stări metastabile în cazul destinderii aburului într-un ajutaj, constatînd că în condiţiile curgerii supersonice condensarea are loc dincolo de secţiunea critică; în plus Stodola a arătat că prezenţa centrilor străini de condensare, de exemplu particulele de praf, nu are o influenţă prea mare pentru declanşarea fenomenelor de condensare.

Prezentarea și analiza teoretică a ecuațiilor caracteristice proceselor de curgere a mediilor bifazice a fost făcută de Kleimann în ipoteza lipsei transformărilor de fază. Ținînd seamă de aspectele particulare ale curgerii fiecărei faze, este necesar să se țină seamă de discontinuitatea unui astfel de sistem polifazic și de procesele de schimb de masă, energie și de impuls care au loc între faze. Ecuațiile caracteristice proceselor de curgere și de schimb de căldură trebuie scrise separat pentru faza de lichid și respectiv de vapori.

Dacă volumul ocupat de faza i este V_i, fracția volumică corespunzătoare este

$$\varphi_i = \lim_{V \to 0} \frac{V_i}{V} \tag{2.42}$$

iar fracția masică (în cazul amestecurilor gaz-lichid), denumită și „titlu", este

$$x_i = \lim_{V \to 0} \frac{m_i}{m} \tag{2.43}$$

Densitatea amestecului poate fi calculată în funcție de fracția masică x_i și densitatea parțială ρ_i a fiecărei faze, conform expresiei

$$\frac{1}{\rho} = \Sigma \frac{x_i}{\rho_i} \quad \left[\frac{m^3}{kg}\right] \tag{2.44}$$

Dacă debitul masic de amestec bifazic este $\dot{m}$, expresia de calcul a vitezei medii corespunzătoare secțiunii de curgere A este

$$w = \frac{\dot{m}}{A\rho} \left[\frac{m}{s}\right], \tag{2.45}$$

iar viteza corespunzătoare fazei i devine

$$w_i = \frac{\dot{m}_i}{\rho_i \varphi_i A} \left[\frac{m}{s}\right], \tag{2.46}$$

Legătura între viteza de ansamblu w și cea corespunzătoare fazei i este deci

$$w = \Sigma x_i w_i \qquad [m/s] \tag{2.47}$$

Pentru a caracteriza mai bine aspectele curgerii mediilor bifazice se introduce noțiunea de viteză medie volumică

$$w_v = \Sigma \varphi_i w_i \qquad [m/s] \tag{2.48}$$

şi respectiv de viteză medie energetică

$$w_e = \sqrt{\Sigma x_i w_i^2} \quad [\text{m/s}] \tag{2.49}$$

Pentru stabilirea expresiei ecuaţiei de continuitate, se consideră că viteza de trecere a unei faze în alta, în unitatea de volum, este χ, [kg/m³.s] şi deci pentru componentul 1 se poate scrie :

$$\int_V \frac{d\rho_1}{d\tau} dV = -\int_V \chi \cdot dV \tag{2.50}$$

Prin dezvoltarea acestei ecuaţii şi particularizarea ei pentru cele două faze ale unui amestec binar cu fazele 1 şi 2 se obţin expresiile

$$\frac{\partial(\rho x_1)}{\partial \tau} + \text{div}\,(\rho \cdot x_1 \cdot w_1) = -\chi \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial(\rho x_2)}{\partial \tau} + \text{div}\,(\rho x_2 w_2) = \chi \tag{2.52}$$

Viteza de trecere a fazei 1 şi 2 (lichid în vapori — de exemplu) sau, invers, 2 în 1, este

$$\chi = -\frac{\rho_1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} = \frac{\rho_2}{x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \tau} \tag{2.53}$$

Prin însumarea expresiilor (2.51) şi (2.52), se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}\,(\rho w) = 0 \tag{2.54}$$

care constituie ecuaţia de continuitate pentru amestecuri polifazice, identică cu cea pentru fluide monofazice.

Expresiile ecuaţiei de continuitate sînt deci :

— în coordonate carteziene x, y, z

$$\sum_i \left[\frac{\partial(\rho \cdot x_i)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \cdot x_i \cdot w_{ix})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot x_i \cdot w_{iy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot x_i \cdot w_{iz})}{\partial z}\right] = 0 \tag{2.55}$$

— în coordonate cilindrice r, θ, z

$$\sum_i \left[\frac{\partial(\rho x_i)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \cdot x_i \cdot w_{ir})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\delta(\rho \cdot x_i \cdot w_{i\theta})}{\partial \theta} + \frac{\delta(\rho \cdot x_i \cdot w_{iz})}{\partial z}\right] = 0 \tag{2.56}$$

Legea conservării impulsului pentru fiecare fază se stabilește ținînd seamă de viteza transformării de fază χ. Vectorul tuturor forțelor exterioare de masă și de suprafață care acționează asupra sistemului este egal cu variația de impuls, la care se adaugă impulsul datorat transformării de fază.

Dacă vectorul unitar al forțelor de masă este $\vec{B}$, expresia acestei forțe este

$$\int_V \rho_1 \varphi_1 \vec{B} \cdot \mathrm{d}V, \tag{2.57}$$

iar suma forțelor datorate tensiunii superficiale E care acționează pe suprafața A ce delimitează volumul V, forțelor interfazice cu tensiunea D_1 și forțelor datorate următoarei faze $\vec{R}$, devine

$$\int_A \varphi_1(E\vec{n})\mathrm{d}A + \int_A \varphi_2(D_1\vec{n})\mathrm{d}A - \int_V \vec{R}\,\mathrm{d}V \tag{2.58}$$

unde n reprezintă versorul suprafeței A.

Pentru omogenizarea expresiei (2.58), se poate trece de la integrala de suprafață la cea de volum :

$$\int_V \overrightarrow{\mathrm{div}\,\varphi_1 E}\,\mathrm{d}V + \int_V \overrightarrow{\mathrm{div}\,\varphi_2 D_1}\,\mathrm{d}V - \int_V \vec{R} \cdot \mathrm{d}V \tag{2.59}$$

Vectorul principal al tuturor forțelor de masă și de suprafață, egal cu suma expresiilor (2.57) și (2.59), are deci expresia

$$\int_V [\overrightarrow{\mathrm{div}\,(\varphi_1 E + \varphi_2 D_1)} - \vec{R} + \rho_1 \varphi_1 \vec{B}]\mathrm{d}V \tag{2.60}$$

Trebuie menționat că în expresia de mai sus nu s-au luat în considerare ciocnirile între particule. Variația impulsului primei faze în cadrul volumului ocupat de întreg amestecul este dată de expresia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_V \rho_1 \varphi_1 w_1 \mathrm{d}V = \int_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\rho_1 \varphi_1 w_1]\mathrm{d}V \tag{2.61}$$

Impulsul de convecție rezultat prin transformarea fazelor se poate calcula dacă se consideră că viteza masei transformată în urma modificării de fază este w_3 astfel că expresia acestui impuls este

$$\int_V \chi \cdot w_3 \cdot \mathrm{d}V \tag{2.62}$$

Dacă se egalează suma între expresiile (2.61) şi (2.62) cu relaţia (2.59), rezultă ecuaţia impulsului pentru prima fază:

$$\rho_1 \varphi_1 \frac{d\vec{w}_1}{d\tau} + \chi(\vec{w}_3 - \vec{w}_1) = \overrightarrow{\mathrm{div}\,(\varphi_1 E + \varphi_2 D_1)} - \vec{R} + \rho_1\varphi_1\vec{B} \quad (2.63)$$

În mod similar pentru a doua fază, ecuaţia impulsului este

$$\rho_2\varphi_2 \frac{d\vec{w}_2}{d\tau} + \chi(\vec{w}_2 - \vec{w}_3) = \overrightarrow{\mathrm{div}\,\varphi_2(F - D_2)} + \vec{R} + \rho_2\varphi_2\vec{B} \quad (2.64)$$

unde F reprezintă tensiunea superficială corespunzătoare fazei 2.

Pentru a obţine ecuaţia diferenţială a impulsului pentru tot mediul se vor aduna relaţiile (2.63) şi (2.64), obţinîndu-se expresia

$$\rho_1\varphi_1 \frac{d\vec{w}_1}{d\tau} - \chi\vec{w}_1 + \rho_2 \cdot \varphi_2 \frac{d\vec{w}_2}{d\tau} + \chi\vec{w}_2 = \overrightarrow{\mathrm{div}\,(\varphi_1 E + \varphi_2 F)} +$$

$$+ \rho\vec{B} + \overrightarrow{\mathrm{div}\,\varphi_2(D_1 - D_2)}$$

în care ρ este densitatea mediului, stabilită conform expresiei (2.44).

Un mediu bifazic monocomponent se compune din cele două faze ale unui fluid şi anume faza lichidă şi cea gazoasă la starea de saturaţie. Ambele faze se găsesc în interiorul curbelor limită, pe palierul de vaporizare, deci în echilibru metastabil. Ca urmare, orice schimb energetic între amestecul bifazic şi mediul exterior sub formă de căldură sau lucru mecanic va duce la trecerea unei faze în cealaltă. Deci un mediu bifazic monocomponent în curgere, datorită schimbului de căldură cu pereţii canalului şi al lucrului mecanic de frecare, presupune trecerea fazei lichide în gazoase sau invers (curgerea vaporilor saturaţi prin canalele de palete ale turbinei).

În cele ce urmează se vor studia numai acele medii bifazice a căror umiditate este foarte mică, deci curgerea are aspectul fizic al curgerii unui gaz în care se găsesc în suspensie picături de lichid.

Se consideră curgerea mediului bifazic printr-un canal, cu secţiunea A_1 la intrare şi A_2 la ieşire şi cu ordonatele z_1 şi z_2. Suprafaţa laterală a canalului între A_1 şi A_2 este A_3. Deci suprafaţa volumului limitat de secţiunile 1 şi 2 (*1*-lichid, *2*-vapori) este

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.65)$$

Ecuaţia continuităţii pentru faza lichidă, exprimată prin integrala de volum, este (2.66) sau, în funcţie de integrala de suprafaţă (2.67):

$$\int_V \mathrm{div}\,\rho_1 \cdot \varphi_1\vec{w}_1 \mathrm{d}V = -\int_V \chi \cdot \mathrm{d}V \quad (2.66)$$

$$\int_F \rho_l \varphi_l (\overrightarrow{w}_l \overrightarrow{\lambda}) \mathrm{d}A = -\int_V \chi \cdot \mathrm{d}V \tag{2.67}$$

unde $\overrightarrow{\lambda}$ este vectorul forţelor pe suprafaţa laterală a canalului. Admiţînd că

$$\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}z \tag{2.68}$$

se iau în considerare numai proiecţiile vectorilor pe direcţia z, care este şi direcţia canalului. Proiecţia suprafeţelor laterale pe z va fi egală cu zero, deci $\overrightarrow{\lambda} = 0$ şi

$$|\rho_l \varphi_l w_l A|_{z_1} - |\rho_l \varphi_l A|_{z_2} = -\int_{z_1}^{z_2} \chi\, A \mathrm{d}z \tag{2.69}$$

Se admite că $z_2 = z_1 + \mathrm{d}z$, deci sub formă diferenţială pentru faza lichidă şi pentru faza de vapori saturaţi se obţin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\varphi_l \rho_l w_l A) = -\chi A \tag{2.70}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\varphi_v \rho_v w_v A) = \chi A \tag{2.71}$$

Prin însumare se obţine ecuaţia continuităţii pentru ansamblul bifazic de lichid şi vapori în curgere în regim stabilizat, sub forma :

$$\frac{\mathrm{d}(\rho w A)}{\mathrm{d}z} = 0 ; \; \dot{m} = \rho \overline{w} A = \text{const.} \tag{2.72}$$

Ecuaţiile impulsului pentru faza lichidă şi faza de vapori sînt respectiv

$$\dot{m}_l \frac{\mathrm{d}w_l}{\mathrm{d}z} + \chi A (w_s - w_l) = A \frac{\mathrm{d}(\varphi_l E + \varphi_v D_l)}{\mathrm{d}\tau} - \overrightarrow{R} A + \rho_l \varphi_l \overrightarrow{B} A \tag{2.73}$$

$$\dot{m}_v \frac{\mathrm{d}w_v}{\mathrm{d}z} + \chi A (w_v - w_l) = A \frac{\varphi_v (P - D_v)}{\mathrm{d}z} + \overrightarrow{R} A + \rho_v \varphi_v \overrightarrow{B} A \tag{2.74}$$

Ecuaţia impulsului pentru mediul bifazic se obţine însumînd (2.73) cu (2.74) :

$$\frac{\mathrm{d}(m_l w_l + m_v w_v)}{\mathrm{d}z} = A \frac{\mathrm{d}(\varphi_l E + \varphi_v P)}{\mathrm{d}z} + \rho \overrightarrow{B} A \tag{2.75}$$

Notînd cu x_{lp} și x_{vp} participațiile gravimetrice ale lichidului, respectiv vaporilor saturați în amestecul bifazic și w_p viteza redusă a curentului bifazic dată de (2.76), ecuația (2.75) capătă forma generală (2.77)

$$w_p = w_l \frac{\dot{m}_l}{\dot{m}} + w_v \frac{\dot{m}_v}{\dot{m}} = w_l x_l \frac{w_l}{w} + w_v x_v \frac{w_v}{w}$$

$$w_p = w_l\, x_{lp} + w_v x_{vp}\,;\ \dot{m} = \dot{m}_v + \dot{m}_l \tag{2.76}$$

$$\dot{m}\,\frac{\mathrm{d}w_p}{\mathrm{d}z} = A\,\frac{\mathrm{d}(\varphi_l E + \varphi_v P)}{\mathrm{d}z} + \rho \vec{B} A \tag{2.77}$$

Ecuația entalpiei totale a curentului bifazic pentru fazele lichid și vapori are forma

$$\left.\begin{aligned} &\rho_l \cdot \varphi_l \cdot w_l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(h_l + \frac{w_l^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\varphi_l p_l + \varphi_l E + \varphi_v D)\, w_l + \\ &+ \chi\left[\left(h_l + \frac{w_l^2}{2}\right) - \left(u_l + \frac{w_l^2}{2}\right)\right] - \frac{\mathrm{d}Q_l}{\mathrm{d}z} + Q_{lv} + Q_{\mathrm{fr}l} + N_l + \\ &+ \varphi_l \rho_l \vec{B} w_l \\ &\rho_v \rho_r w_v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(h_v + \frac{w_v^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\varphi_v\,(p_v + P - D)\, w_v + \\ &+ \chi\left[\left(u_l + \frac{w_l^2}{2}\right) - \left(h_v + \frac{w_v^2}{2}\right)\right] - Q_{lv} + Q_{\mathrm{fr}v} + N_v + \\ &+ \rho_v \varphi_v \vec{B} w_v. \end{aligned}\right\} \tag{2.78}$$

Și prin însumare, pentru mediul bifazic :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\dot{m}_l\left(h_l + \frac{w_l^2}{2}\right) + \dot{m}_v\left(h_v + \frac{w_v^2}{2}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\varphi_l(p_l + E)w_l +$$

$$+ \varphi_v D\,(w_l - w_v) + \varphi_v (p_v + P) w_v] + Q_{\mathrm{fr}} + N + \rho \vec{B} w_l - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z} \tag{2.79}$$

în care :

$$E = -p_l - \frac{4}{3}\mu_l \frac{\mathrm{d}w_l}{\mathrm{d}z}\,;\quad P = -p_v - \frac{4}{3}\mu_v \frac{\mathrm{d}w_v}{\mathrm{d}z}$$

$$D = \begin{cases} -p_l \text{ pentru faza lichidă ;} \\ -p_v \text{ pentru faza de vapori saturați.} \end{cases}$$

Deoarece în cazul unui amestec bifazic, transformări termodinamice pot executa numai faza gazoasă, este importantă determinarea entalpiei frînate a ei. Noţiunea de *entalpie frînată* a fazei lichide nu are sens, deci se poate spune că entalpia frînată a unui amestec bifazic monocomponent este în fond aceea a fazei gazoase.

Pentru obţinerea relaţiei entalpiei frînate a amestecului se înmulţesc relaţiile de mai sus cu $(u_l + w_l^2/2)$ şi $(h_v + w_v^2/2)$ obţinînd relaţia

$$\text{div}\left[\left(\rho_l \varphi_l w_l \left(u_l + \frac{w_l^2}{2}\right) - \varphi_l \cdot \vec{w}_l \cdot \vec{E} + \rho_v \varphi_v \vec{w}_v \left(u_v + \frac{w_v^2}{2}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \varphi_v \vec{w}_v \vec{P} + \rho \vec{w} \psi - Q \right] = N + Q_{fr} \tag{2.80}$$

în care $N = N_l + N_v$; $Q_{frl} = Q_{fr} + Q_{frv}$; ψ potenţialul izocor (funcţia Helmholtz); $\vec{B} = -\text{grad}\ \psi$. Prin integrare se obţine:

$$\int_V \text{din}\ (\vec{\Omega})\, dV = \int_V (N + Q_{fr})\, dV \tag{2.81}$$

în care $\vec{\Omega}$ este paranteza dreaptă din relaţia (2.80). Trecînd la integrala de suprafaţă şi ţinînd seama că $dV = A\, dz$ relaţia (2.81) devine (2.82) sau integrată pe porţiuni, (2.83):

$$\int_A \vec{\Omega} \vec{\lambda} dA = \int_{z_1}^{z_2} (N + Q_{fr})\, A dz \tag{2.82}$$

$$\int_{A_1} \vec{\Omega} \vec{\lambda}\, dA + \int_{A_2} \vec{\Omega} \vec{\lambda} dA + \int_{A_3} \vec{\Omega} \vec{\lambda}\, dA = \int_{z_1}^{z_2} (N + Q_{fr})\, A\, dz \tag{2.83}$$

Prin integrare, pentru o curgere în regim permanent (2.83) capătă forma (2.84)

$$-\Omega_l A_l + \Omega_v A_v = \int_{z_1}^{z_2} (N + Q_{fr})\, A\, dz \tag{3.84}$$

Considerînd secţiunea iniţială cunoscută şi A_2 o secţiune oarecare relaţia (2.84) devine

$$\Omega A = \int_{z_1}^{z_2} (N + Q_{fr})\, A\, dz + \text{const.} \tag{2.85}$$

Ținînd seamă că $\dot{m} = \rho w A$, relația capătă forma

$$\frac{\Omega}{\rho w} = \frac{1}{m} \int_{z_1}^{z_2} (N + Q_{fr}) A \, dz + \text{const.} \tag{2.86}$$

În cazul cînd conductivitatea vaporilor saturați are o valoare redusă, iar căldura degajată prin frecare interfazică este mică, atunci termenul $(N + Q_{fr}) = 0$ și, ca urmare, (2.86) devine (2.87), sau sub formă explicită (2.88):

$$\frac{\Omega}{\rho w} = \text{const} \tag{2.87}$$

$$\frac{\rho_l w_l}{\rho w}\left[w_l\left(u_l + \frac{w_l^2}{2}\right) - \frac{1}{\rho_l} w_l E\right] + \frac{\rho_v w_v}{\rho w}\left[w_v\left(u_v + \frac{w_v^2}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho_v} w_v P\right] - \frac{1}{\rho w}\frac{dq}{dz} + \psi = \text{Const.} \tag{2.88}$$

În cazul cînd curgerea mediului bifazic are loc adiabat, deci fără schimb de căldură cu pereții canalului, și ținînd seamă că pentru regimul de curgere permanent stabilizat $E = -p_l$ și $P = -p_v$, ecuația entalpiei frînate a mediului bifazic capătă forma (2.89):

$$h_{0l}\frac{x_l w_l}{w} + h_{0v}\frac{x_v w_v}{w} = \text{Const.}, \tag{2.89}$$

în care

$$\rho_l \varphi_l = \rho \cdot x_l; \quad \rho_v \varphi_v = \rho x_v$$

$$h_{0l} = u_l + \frac{p_l}{\rho_l} + \frac{w_l^2}{2}; \quad h_{0v} = u_v + \frac{p_v}{\rho_v} + \frac{w_v^2}{2} \tag{2.90}$$

$$\left.\begin{aligned} x_l &= \frac{\frac{w_v}{w_l} x_{lp}}{(1 + x_{lp}) + \frac{w_v}{w_l} x_{lp}}; \quad x_{lp} = \frac{x_l}{x_l + (1 - x_l)\frac{w_v}{w_l}} \\ x_v &= \frac{\frac{w_v}{w_l} x_{vp}}{(1 - x_{vp}) + \frac{w_v}{w_l} x_{vp}}; \quad x_{vp} = \frac{x_v}{x_v + (1 - x_v)\frac{w_v}{w_l}} \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

$$x_v = \frac{\dot{m}_v}{\dot{m}}\,; \quad x_l = \frac{\dot{m}_l}{\dot{m}}$$

în care $\dot{m}_v$ și $\dot{m}_l$ sînt debitele masice de vapori saturați și lichid ce se găsesc în amestecul bifazic $\dot{m}$. Relația (2.90), ținînd seama de notațiile din (2.91), devine

$$\hbar_{0l}x_{l_p} + \hbar_{0v}x_{l_p} = \hbar_0 = \text{const.} \tag{2.92}$$

În cazul cînd vitezele de deplasare ale celor două faze sînt egale, atunci x_l și x_v reprezintă chiar participația gravimetrică a celor două faze în amestecul bifazic.

După cum se vede și entalpia frînată a unui curent bifazic în condiții de curgere adiabată este constantă în timpul curgerii.

3. APLICAȚII ALE ECUAȚIILOR DE BAZĂ ALE TERMOGAZODINAMICII LA CURGEREA UNIDIRECȚIONALĂ A GAZELOR PERFECTE

3.1. INFLUENȚA FRECĂRII ASUPRA LUCRULUI MECANIC DEZVOLTAT SAU CONSUMAT DE O TURBOMAȘINĂ.

În figura 3.1 *a* se prezintă procesul adiabat de destindere într-o turbină unicelulară, iar în fig. 3.1 *b* cel de compresie adiabată într-un turbocompresor unicelular. Lucrul mecanic al destinderii în turbină va fi :

— pentru destinderea adiabată izentropă

$$l_{rev} = h_{01} - h_{02_{rev}} \quad [J/kg]; \tag{3.1}$$

— pentru destinderea adiabată neizentropă

$$l_{irev} = h_{01} - h_{02_{irev}} = l_{rev} - l_{fr}. \tag{3.2}$$

Deci $$l_{irev} = (h_{01} - h_{02_{rev}}) - (h_{02_{irev}} - h_{02_{rev}}) \quad [J/kg] \tag{3.3}$$

Lucrul mecanic de frecare aduce după sine o piedere de lucru mecanic din cel furnizat de turbină. Din punct de vedere energetic, el reprezintă o pierdere de lucru mecanic ce se transformă în căldură care însă rămîne în masa gazului (gazul ieșind din turbină cu o entalpie $h_{02i_{rev}} > h_{02_{rev}}$). Procesul de comprimare în turbocompresor cere de la motorul de antrenare un lucru mecanic, după cum urmează :

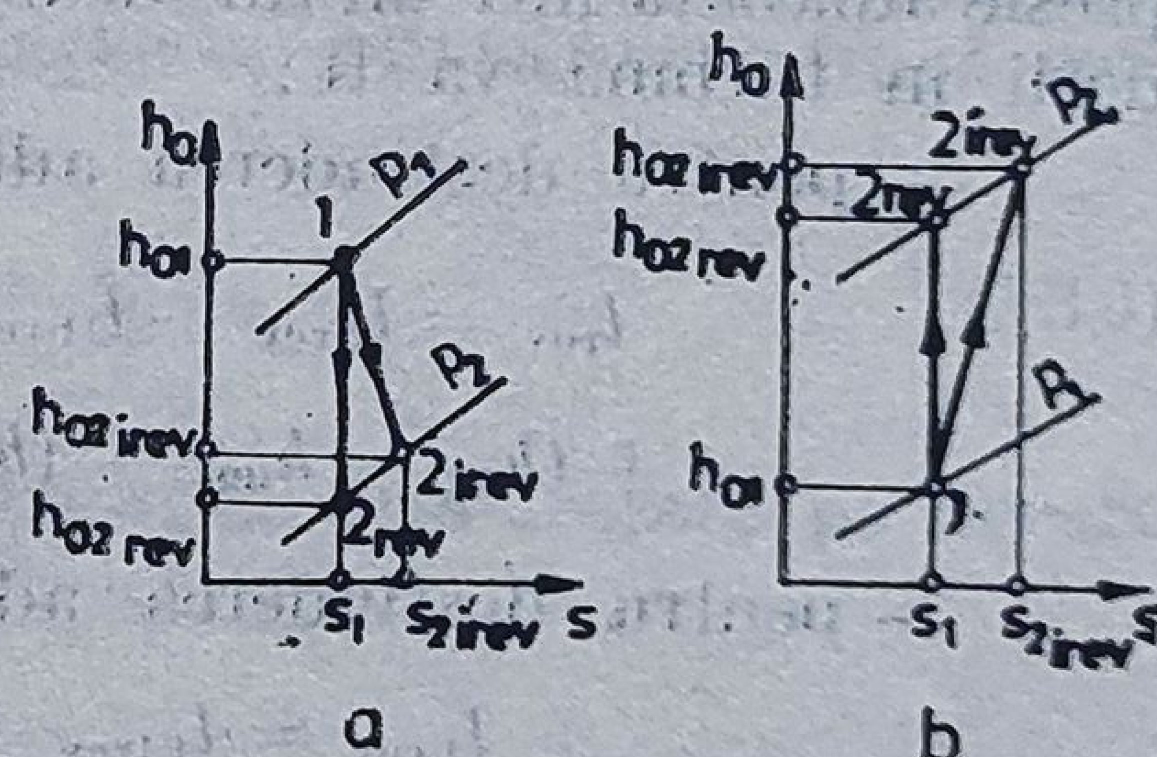


Fig. 3.1. Trnasformarea adiabată — reversibilă și ireversibilă în turbomașini unicelulare :
a — turbină ; *b* — turbocompresor.

— pentru compresia adiabat-reversibilă

$$|l_{rev}| = h_{02_{rev}} - h_{01} \quad [J/kg] \tag{3.4}$$

— pentru compresia adiabat-ireversibilă

$$|l_{irev}| = h_{02_{irev}} - h_{01}$$

$$|l_{irev}| = (h_{02_{rev}} - h_{01}) + l_{fr} = (h_{02_{rev}} - h_{01}) +$$
$$+ (h_{02_{irev}} - h_{02_{rev}} \quad [J/kg] \tag{3.5}$$

Şi în acest caz lucrul mecanic a adus din punct de vedere energetic o pierdere, deoarece $|l_{irev}| > |l_{rev}|$. Căldura echivalentă lucrului mecanic de frecare a rămas de asemenea în masa gazului, care a ieşit din turbocompresor cu entalpia $h_{02_{irev}} > h_{02_{rev}}$.

În figura 3.2 *a* este reprezentat procesul adiabat de destindere a unui gaz într-o turbină cu mai multe trepte, iar în figura 3.2 *b* cel de com-

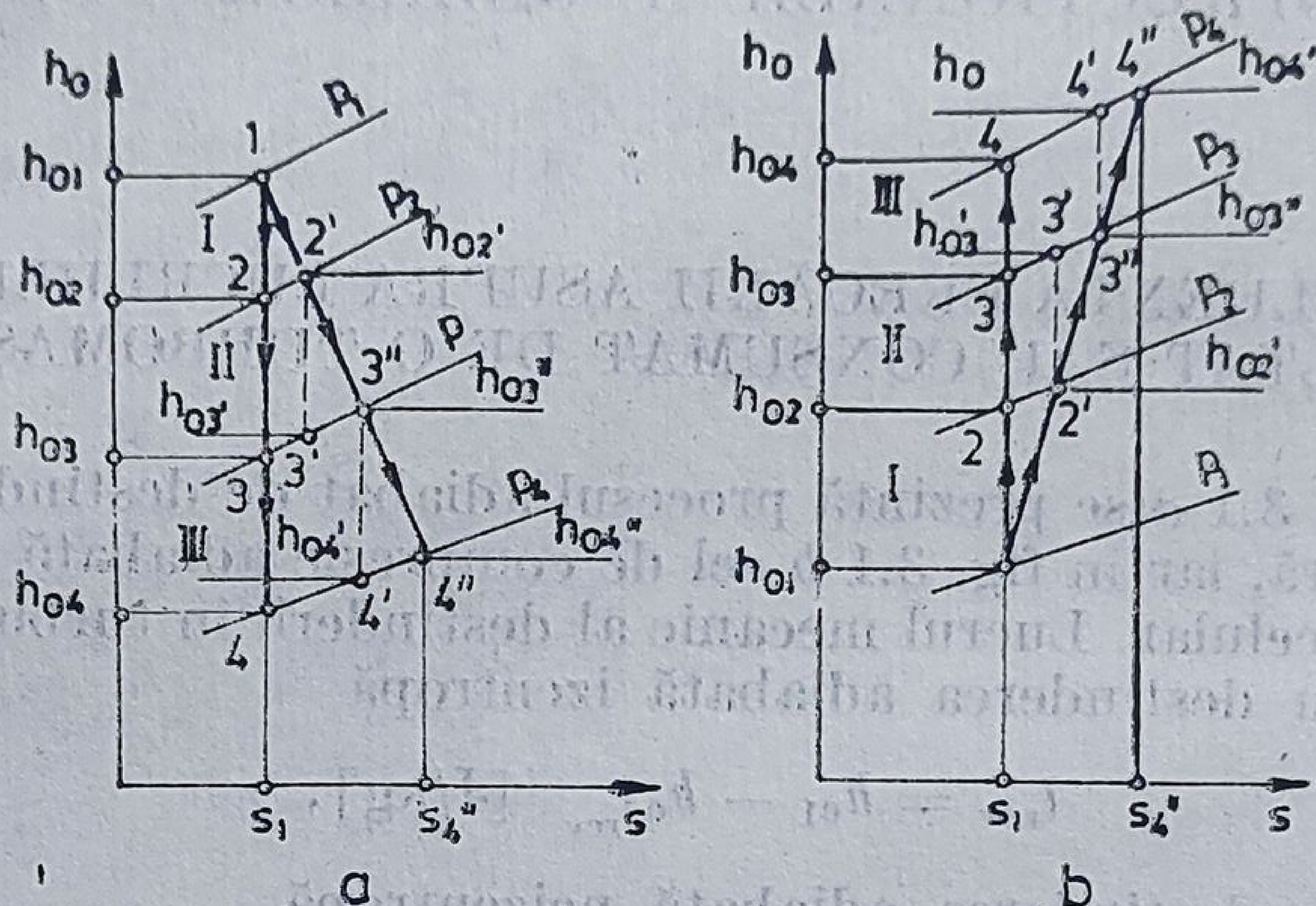


Fig. 3.2. Transofrmare adiabată — reversibilă şi ireversibilă în turbomaşini pluricelulare;
a — turbină; *b* — turbocompresor.

presie adiabată într-un turbocompresor în trepte. Lucrul mecanic al destinderii în turbină va fi:

— pentru destinderea adiabat-izentropă

$$l_{rev} = l_{I\,rev} + l_{II\,rev} + l_{III\,rev} = (h_{01} - h_{02}) +$$
$$+ (h_{02} - h_{03}) + (h_{03} - h_{03}) = h_{01} - h_{04} \quad [J/kg] \tag{3.6}$$

— pentru destinderea adiabat-neizotropă

$$l_{i\,rev} = l_{I\,irev} + l_{II\,irev} + l_{III\,irev} \quad [J/kg] \tag{3.7}$$

în care:

$$l_{I\,irev} = l_{I\,rev} - l_{fr\,I} = (h_{01} - h_{02}) - (h_{02'} - h_{02}) = h_{01} - h_{02'},$$

$$l_{II\,irev} = l_{II\,rev} - l_{fr\,II} = h(_{02'} - h_{03'}) - (h_{03''} - h_{03'})$$

Deoarece pentru stări apropiate, se poate accepta paralelismul izobarelor, se acceptă egalitatea $h_{02} - h_{03} = h_{02'} - h_{03'}$. Ca urmare

$$l_{II\,irev} = (h_{02} - h_{03}) - (h_{03''} - h_{03'}) = h_{02'} - h_{03''} \quad [J/kg]$$

Pentru primele două trepte ale turbinei, ținînd seama de pierderile prin frecare, lucrul mecanic furnizat ar fi trebuit să fie

$$l_{\text{II}rev} = (l_{\text{I}\,rev} - l_{\text{I}\,fr}) + (l_{\text{II}\,rev} - l_{\text{II}\,fr}) =$$
$$= (h_{01} - h_{03}) - (h_{02'} - h_{02}) + (h_{03''} - h_{03'})$$

Se constată însă că în treapta a II-a, căderea adiabat-izentropă disponibilă $h_{02'} - h_{03'}$ este egală cu cea teoretică $h_{02} - h_{03}$ datorită faptului că toată căldura echivalentă a lucrului mecanic de frecare $l_{fr\,\text{I}}$ a rămas în gaz și se recuperează. Deci, generalizînd, pentru z trepte lucrul mecanic adiabat-ireversibil va fi

$$l_{irev} = \sum_{i=1}^{i=z-1} l_{rev_i} + (l_{rev_z} - l_{fr_z}) \quad [\text{J/kg}] \tag{3.8}$$

Din figura 3.2 *a* se constată

$$l_{rev} = (h_{01} - h_{02}) + (h_{02} - h_{03}) + (h_{03} - h_{04})$$

Deoarece :

$$(h_{02'} - h_{03'}) = (h_{02} - h_{03}) \text{ și } (h_{03} - h_{04}) = (h_{03''} - h_{04''})$$

rezultă

$$l_{irev} = \sum_{1}^{3} l_{rev_i} - (h_{04''} - h_{04'}) = l_{\text{I}\,rev} + l_{\text{II}\,rev} + l_{\text{III}\,rev} - l_{fr\,\text{III}} \tag{3.9}$$

Deci pierderile prin frecare ale unei trepte, transformîndu-se în căldură ce rămîne în masa gazului, vor fi recuperate în treapta următoare pentru producere de lucru mecanic.

În cazul unui turbocompresor cu mai multe trepte (fig. 3.2 *b*) situația este inversă, lucrul mecanic cerut în compresia adiabat-neizotropă este compus din :

$$|l_{irev}| = \sum_{1}^{z} |l_{rev_i}| + \sum_{i}^{z} l_{fr_i} \tag{3.10}$$

Deci în cazul compresiei se însumează pierderile prin frecare pe fiecare treaptă.

3.2. INFLUENȚA NATURII GAZULUI ASUPRA LUCRULUI MECANICA AL UNEI TURBOMAȘINI

Lucrul mecanic produs de un gaz perfect într-o turbină, ca urmare a unei destinderi adiabat-izentrope, este

$$l_{rev} = h_{01} - h_{02} = c_{p_m}(T_{01} - T_{02}) = c_{p_m} \cdot T_{01}\left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}\right) \tag{3.11}$$

Pentru o transformare adiabat-neizentropă intervine și lucrul mecanic de frecare

$$l_{irev} = (h_{01} - h_{02}) - l_{fr} = c_{p_m} T_{01}\left(1 - \frac{T_{01}}{T_{01}}\right) - l_{fr} \qquad (3.12)$$

Se constată că pentru aceeași cădere de temperatură, lucrul mecanic furnizat depinde de natura gazului, prin intermediul căldurii specifice c_p. De exemplu, o turbină cu gaze în care se destinde 1 kg de aer (sau gaze de ardere) de la 300°C la 100°C dezvoltă un lucru mecanic specific :

$$l_{rev_{aer}} = c_{p_m}\, T_{01}\left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}\right) = 1{,}019 \cdot 573{,}15\left(1 - \frac{373{,}15}{573{,}15}\right) =$$

$$= 203{,}8 \quad [\text{kJ/kgs}]$$

Dacă s-ar destinde gaz metan (CH_4), s-ar obține

$$l_{rev_{CH_4}} = c_{p_m}\, T_{01}\left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}\right) = 2{,}635 \cdot 573{,}15\left(1 - \frac{373{,}15}{573{,}15}\right) =$$

$$= 527 \quad [\text{kJ/kgs}]$$

Problema prezintă o importanță deosebită și în cazul turbocompresoarelor, unde de multe ori procesul tehnologic aduce după sine modificări ale compoziției gazelor supuse comprimării, ceea ce necesită puteri diferite pentru antrenarea compresorului.

3.3. RANDAMENTUL TERMOGAZODINAMIC AL TURBOMAȘINILOR

Ecuația de bază a unei turbine de acțiune este

$$-l = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + (h_2 - h_1) \qquad (3.13)$$

În turbină are loc o dublă transformare de energie și anume : una termodinamică, a energiei potențiale (cădere de entalpie) în energie cinetică ; a doua, numai aerodinamică în care energia cinetică se transformă în lucru mecanic. Deci o turbină este compusă din două transformatoare de energie complet diferite și anume unul termic (ajutajul) și celălalt aerodinamic (canalele formate de palete). Randamentul termogazodinamic al turbinei se poate exprima prin raportul dintre căderea de entalpie efectiv prelucrată pentru producere de lucru mecanic $(h_1 - h_2)$ și căderea maximă de entalpie ce ar putea fi prelucrată prin destinderea gazului pînă cînd

$h_2 = 0$. Admițînd, pentru un gaz perfect, o valoare constantă a căldurii specifice se obține :

$$\int_1^2 dh = \int_1^2 c_p \, dT = h_1 - h_2 = c_p(T_1 - T_2).$$

În aceleași ipoteze, pentru $T_2 = 0K$ (cînd $h_2 = 0$)

$$h_1 - h_0 = c_p(T_1 - T_0)$$

Ca urmare, raportul dintre căderea efectivă de entalpie și cea teoretică (randamentul termogazodinamic) are expresia

$$\eta_{tg} = \frac{h_1 - h_2}{h_1} = \frac{\frac{h_1 - h_2}{c_p}}{\frac{h_1}{c_p}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{3.14}$$

Din ecuația (3.13) a transformării adiabate a căderii de entalpie în energie cinetică, notînd $w_1 = 0$ și $w_2 = w$ se obține

$$h_1 - h_2 = \frac{w^2}{2} \tag{3.15}$$

Prin înmulțire și împărțire cu R și c_v se obține

$$\eta_{tg} = \frac{h_1 - h_2}{h_1} = \frac{w^2}{2h_1} = \frac{R\, w^2 \, c_v}{2c_p T_1 R c_v} \tag{3.16}$$

Deoarece pentru un gaz perfect $c_p - c_v = R$ și $c_p/c_v = k$, relația devine

$$\eta_{tg} = \frac{c_p - c_v}{2c_v} \cdot \frac{w^2}{R\, T_1 \frac{c_p}{c_v}} = \frac{k-1}{2} \cdot \frac{w^2}{kRT_1}$$

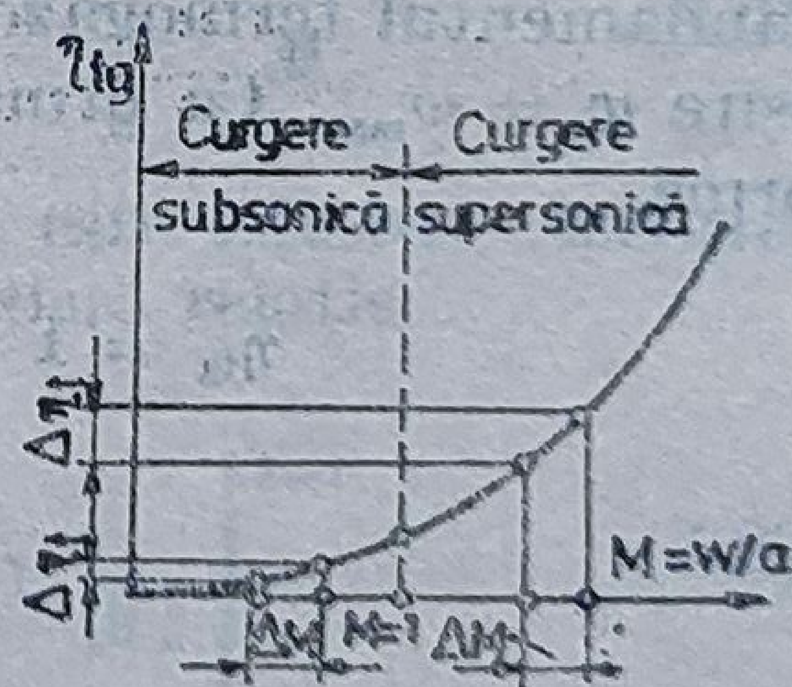


Fig. 3.3. Variația randamentului termogazodinamic al unei turbomașini, în funcție de criteriul Mach.

Deoarece $\sqrt{kpv} = \sqrt{kRT} = a$ (unde a este viteza sunetului în gazul cu parametrii p, v, T), randamentul termogazodinamic al mașinii va fi

$$\eta_{tg} = \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{a_1^2} = \frac{k-1}{2} M_1^2 \tag{3.17}$$

în care $M_1 = w/a_1$ este criteriul Mach. Valorile particulare ale criteriului Mach sînt

$0 \leqslant M < 1 \rightarrow w < a$, curgere subsonică,
$M = 1 \rightarrow w = a$, curgere sonică sau tronsonică,
$M > 1 \rightarrow w > a$, curgere supersonică.

După cum se constată, randamentul η_{tg} al unei mașini rotative are valori mici pentru căderi de entalpie $h_1 - h_2$ din care se obțin viteze subsonice ($M < 1$). Variația lui η_{tg} în funcție de M este prezentată în figura 3.3. Se constată că pentru $M < 1$ mărirea căderii de entalpie Δh, care duce la creșterea lui M cu ΔM, nu duce la o creștere importantă a lui η_{tg}. Situația însă se schimbă fundamental în cazul cînd căderii de entalpie $h_1 - h_2$ folosite în turbină îi corespunde o curgere cu $M > 1$.

3.4. VARIAȚIA PARAMETRILOR DE STARE AI GAZULUI ÎN CURGERE, ÎN PROCESELE ADIABATE

Viteza de curgere a unui gaz, în cazul destinderii adiabat-izentrope de la h_1 la h_2 fără efectuare de lucru mecanic exterior, se obține din relația (3.13):

$$h_1 - h_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

Viteza maximă de curgere a unui gaz, la ieșirea dintr-un ajutaj (pentru o destindere adiabat-izentropă) se obține atunci cînd gazul se va destinde de la entalpia inițială h_1 pînă la entalpia finală $h_2 = 0$. Considerînd viteza de intrare a gazului în ajutaj $w_1 = 0$ pentru o destindere adiabat-izentropă fără producere de lucru mecanic exterior viteza $w_2 = w_{max}$ cînd $h_2 = 0$. Deci

$$h_1 - 0 = \frac{w_{max}^2}{2} \rightarrow w_{max} = \sqrt{2h_1} \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{3.18}$$

Randamentul termogazodinamic pentru $h_2 = 0$ este $\eta_{tg} = 1$ și viteza de ieșire $w = w_{max}$. Ca urmare, expresia vitezei maxime de curgere capătă și forma

$$\eta_{tg} = 1 = \frac{k-1}{2} M_{1max}^2 = \frac{k-1}{2} \frac{w_{max}^2}{a_1^2} \tag{3.19}$$

$$w_{max} = a_1 \sqrt{\frac{2}{k-1}}$$

Pentru un gaz perfect cu $k = 1{,}4$ viteza maximă de curgere va fi

$$w_{max} = 2{,}236\, a_1 = 2{,}236 \sqrt{k\, p_1\, v_1} = 2{,}236 \sqrt{R\, k\, T_1} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Transformarea căderii de entalpie în energie cinetică în ajutaj are loc teoretic într-un proces de destindere adiabat-izentrop. Ca urmare, parametrii termici și fizici ai gazului în lungul ajutajului vor trece de la valorile notate

cu indicele 1 la cele notate cu 2 corespunzător ecuației adiabate ($p_s v_1^k = p_x v_x^k$; $T_1 v_1^{k-1} = T_x v_1^{k-1}$; etc). În figura 3.4 se reprezintă variația mărimilor caracteristice ale gazului într-un ajutaj convergent. Expresia randa-

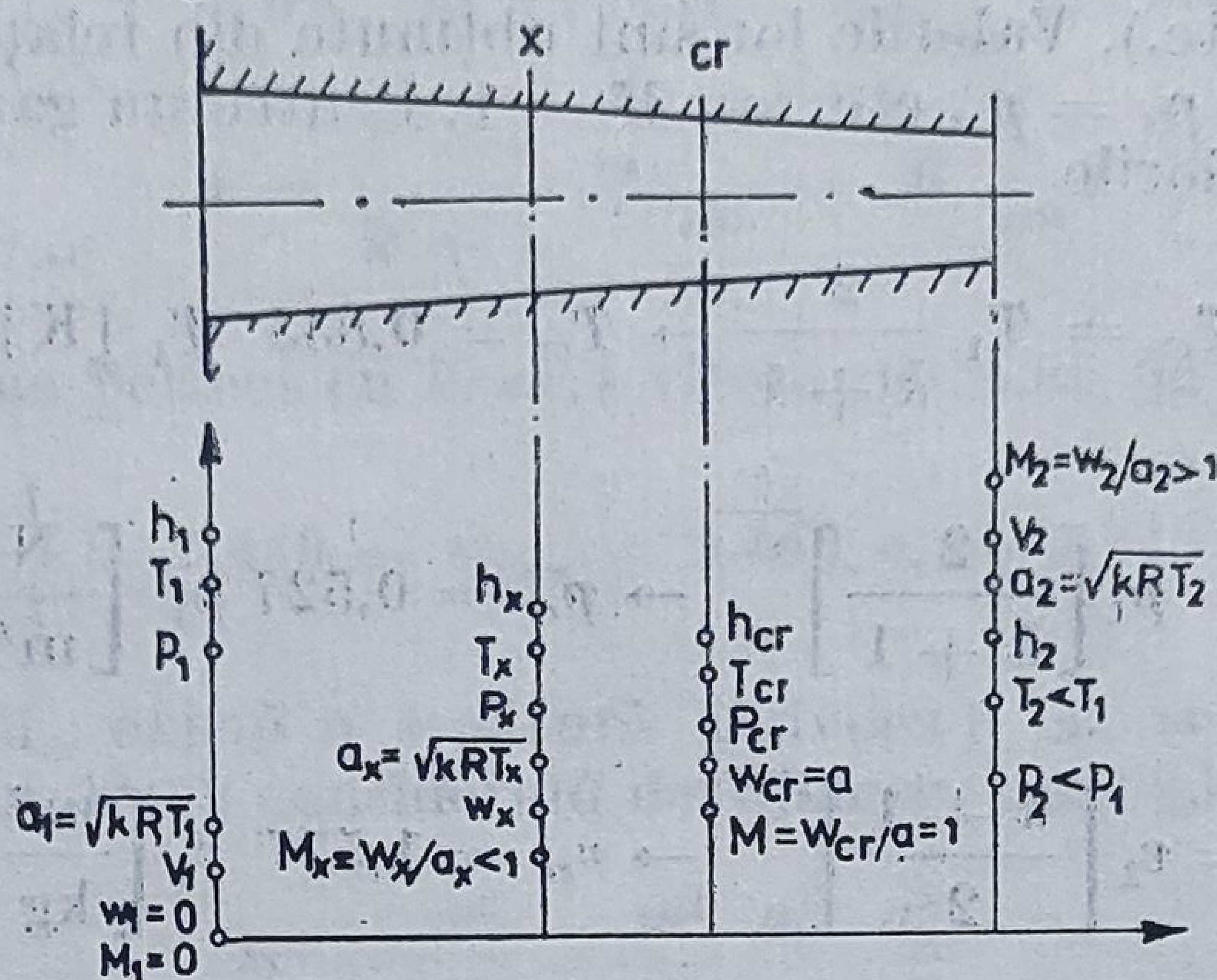


Fig. 3.4. Parametrii unui gaz într-un ajutaj geometric.

mentului termogazodinamic al ajutajului, raportînd viteza w_x în secțiunea x la viteza sunetului în gazul de parametri p_x, T_x etc. va fi

$$\eta_{tg} = \frac{h_1 - h_x}{h_x} = \frac{T_1 - T_x}{T_x} = \frac{k-1}{2}\left(\frac{w_x}{a_x}\right)^2 = \frac{k-1}{2} M_x^2 \tag{3.20}$$

în care $M_x = w_x/a_x$ Se obține

$$\frac{T_1}{T_x} = 1 + \frac{k-1}{2} M_x^2; \quad T_x = T_1 \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2} \tag{3.21}$$

Deoarece procesul termodinamic în ajutaj este adiabat—izentrop (reversibil), între parametrii de stare ai gazului există relație

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \rightarrow p_x = p_1 \left[\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{3.22}$$

$$\frac{p_x}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_x}\right)^k \rightarrow v_x = v_1 \left[1 + \frac{k-1}{2} M_x^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.23}$$

$$\frac{h_x}{h_1} = \frac{T_x}{T_1} \rightarrow h_x = h_1 \left[\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}\right] \tag{3.24}$$

În secțiunea din ajutaj unde viteza w devine egală cu viteza sunetului în gazul de parametri respectivi, criteriul Mach devine egal cu unitatea iar parametrii gazului se numesc *sonici* sau *critici* și se notează cu indicele „cr" (p_{cr}, T_{cr}, v_{cr} etc.). Valorile lor sînt obținute din relațiile (3.22)...(3.24), în care $T_x = T_{cr}$; $p_x = p_{cr}$ etc. iar $M = 1$. Pentru un gaz perfect, cu $k = 1{,}4$, ei au valorile

$$T_{cr} = T_1 \frac{2}{k+1} \rightarrow T_{cr} = 0{,}833 \; T_1 \; [\mathrm{K}] \tag{3.25}$$

$$p_{cr} = p_1 \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow p_{cr} = 0{,}527 \; p_1 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] \tag{3.26}$$

$$v_{cr} = v_1 \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \rightarrow v_{cr} = 1{,}577 \; v_1 \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right] \tag{3.27}$$

$$h_{cr} = h_1 \frac{2}{k+1} \rightarrow h_{cr} = 0{,}833 \; h_1 \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{3.28}$$

O destindere adiabat-izentropă a unui gaz perfect într-un ajutaj de la o presiune inițială p_1 la una finaală $p_2 > p_{cr}$ va face ca la ieșire să se obțină o viteză $w_2 =< a$ ($M_2 < 1$); de la p_1 la $p_2 = p_{cr}$ va duce la o viteză $w_2 = a$ ($M_2 = 1$), iar de la p_1 la $p_2 < p_{cr}$ va duce la o viteză $w_2 > a$ ($M_2 > 1$) În studiul ajutajelor de dimensiuni mari, ca cele ale motoarelor turboreactoare sau statoreactoare (rachete), se raportează viteza de curgere a gazului într-o secțiune oarecare la viteza sunetului în secțiunea critică, notată cu a_{cr}. Se obține astfel criteriul Mach critic $M_{cr} = \frac{w}{a_{cr}}$. Expresia lui M_{cr} se obține din relația randamentului termogazodinamic η_{tg}. Astfel, pentru o destindere de la o temperatură inițială T_1 la una finală T, raportată la viteza sunetului unde gazul are temperatura T_{cr}, se poate scrie expresia randamentului η_{tg} sub forma

$$\eta_{tg} = \frac{T_1 - T}{T_{cr}} = \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{a_{cr}}, \quad \text{dar} \quad T_{cr} = T_1 \frac{2}{k+1} . \tag{3.29}$$

Se obține deci (notînd cu $M_{cr} = w/a_{cr}$, unde w este viteza de ieșire):

$$\frac{T_1 - T}{T_{cr}} = \frac{T_1 - T}{T_1 \frac{2}{k+1}} = \frac{k-1}{2} M_{cr}^2 \rightarrow \frac{T_1 - T}{T_1} = \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 .$$

De unde se obține expresia temperaturii finale în funcție de M_{cr}:

$$\frac{T}{T_1} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \tag{3.30}$$

Valoarea maximă a criteriului M_{cr} al curgerii ($M_{cr_{max}} = w_{max}/a_{cr}$) se obține pentru $\eta_{tg} = 1$, deci atunci cînd gazul se va destinde în ajutaj de la temperatura T_1 pînă la $T = 0$K, iar valoarea $M_{cr_{max}}$ devine :

$$\eta_{tg} = \left| \frac{T_1 - T}{T_1} \right|_{T=0} = 1 = \frac{k-1}{k+1} M^2_{cr_{max}} \rightarrow M_{cr_{max}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \qquad (3.31)$$

Pentru un gaz perfect cu k=1,4 viteza maximă de curgere w_{max} este

$$M_{cr_{max}} = \frac{k+1}{k-1} = 2,449 \rightarrow w_{max} = 2,449\ a_{cr} = 2,449 \sqrt{kRT_{cr}} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Între M și M_{cr} există o legătură univocă ; ea se determină din expresia criteriului Mach considerînd destinderea unui gaz, de la T_1 la T :

$$M^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{w^2}{a^2_{cr}} \frac{a^2_{cr}}{a^2_1} \frac{a^2_1}{a^2}$$

Deoarece : $\frac{w}{a_{cr}} = M_{cr}$; $a_{cr} = \sqrt{kRT_{cr}}$; $a_1 = \sqrt{kRT_1}$; $a = \sqrt{kRT}$

(unde T este temperatura la ieșire), se obține :

$$M^2 = M^2_{cr} \frac{T_{cr}}{T_1} \frac{T_1}{T} = M_{cr} \frac{2}{k+1} \frac{1}{1 - \frac{k-1}{k+1} M^2_{cr}} = \frac{\frac{2}{k+1} M^2_{cr}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M^2_{cr}}$$

de unde

$$M = \sqrt{\frac{\frac{2}{k+1} M^2_{cr}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M^2_{cr}}} \quad (3.32) \qquad M_{cr} = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}} \quad (3.33)$$

Un gaz perfect ai cărui parametri inițiali frînați sînt p_{01}, ρ_{01}, T_{01}, w_1, $M_1 = w_1\ a_1$ curgînd printr-o conductă, printr-un ajutaj sau printr-un difuzor fără schimb de căldură cu mediul exterior (adiabat) fără frecare (izentrop) și fără efectuare de lucru mecanic exterior, va respecta ecuația primului principiu al termodinamicii, care pentru condițiile de mai sus are forma

$$h_1 + \frac{w^2_1}{2} = h_{01} = h + \frac{w^2}{2} = \text{ct.}$$

Deci entalpia frînată a gazului în orice secțiune este constantă și egală cu cea din secțiunea inițială (pentru o curgere adiabat-izentropă). Considerînd

că într-o secţiune oarecare, parametrii momentani ai gazului sînt p, ρ, T iar viteza de curgere w (M), se obţin relaţiile între criteriile $M = \frac{w}{a}$ şi $M_{cr} = \frac{w}{a_{cr}}$ în funcţie de viteza sonică în secţiunea iniţială $a_1 = \sqrt{k\, p_{01}\, v_{01}} = \sqrt{k\, R\, T_{01}}$;

$$M^2 = \frac{M_{cr}^2}{1 - \frac{k-1}{2}(M_{cr}^2 - 1)} = \frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 - 1\right] \tag{3.34}$$

$$M_{cr}^2 = \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{k+1}(M^2 - 1)} = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{a_1}{a_{cr}}\right)^2\right] \tag{3.35}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2}} = \sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2}$$

Sau în funcţie de parametrii frînaţi în secţiunea iniţială (p_{01}; ρ_{01}; T_{01}) şi cei momentani din secţiunea respectivă ($p < p_{01}$; $\rho < \rho_{01}$; $T < T_{01}$)

$$M^2 = \frac{2}{k-1}\left(\frac{T_{01}}{T} - 1\right) = \frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_{01}}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = $$

$$= \frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{\rho_{01}}{\rho}\right)^{k-1} - 1\right] \tag{3.36}$$

$$M_{cr}^2 = \frac{k+1}{k-1}\left(1 - \frac{T}{T_{01}}\right) = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = $$

$$= \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{01}}\right)^{k-1}\right] \tag{3.37}$$

$$\frac{a}{a_1} = \sqrt{\frac{T}{T_{01}}} = \left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{2k}} = \left(\frac{\rho}{\rho_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{3.38}$$

Cunoscînd parametrii frînaţi iniţiali ai gazului p_{01}, ρ_{01}, T_{01} şi valorile criteriilor M sau M_{cr} în secţiunea respectivă se pot determina parametrii momentani ai gazului din acea secţiune, notaţi cu p, ρ, T cu relaţiile

$$\frac{T_{01}}{T} \quad \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \tag{3.39}$$

$$\frac{p}{p_{01}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{3.40}$$

$$\frac{\rho}{\rho_{01}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.41}$$

$$\frac{h}{h_{01}} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \tag{3.42}$$

Deoarece procesul termodinamic efectuat de gaz între secțiunea inițială și cea considerată este adiabat-izentrop, între mărimile de stare intervin relațiile :

$$\frac{T}{T_{01}} = \left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{h}{h_{01}} = \left(\frac{\rho}{\rho_{01}}\right)^{k-1}; \quad \frac{\rho}{\rho_{01}} = \left(\frac{T}{T_{01}}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

3.5. DETERMINAREA ANALITICĂ A PIERDERILOR DE PRESIUNE ACCIDENTALE.

Se consideră curgerea unui gaz printr-un canal în care are loc o variație bruscă de secțiune (fig. 3.5), cazul accidentelor de pe conducte (vane, reducții de secțiune, ramificări etc.).

Ca urmare a variației bruște de secțiune, viteza de curgere se modifică. Aceeași situație are loc și dacă în timpul curgerii printr-un canal de secțiune constantă gazul primește sau cedează brusc căldură (o undă de detonație), ceea ce duce la variația densității lui. Se caută să se determine pierderile de presiune a gazului, pentru diferite cazuri, și anume :

Variația secțiunii canalului. Se consideră un accident pe conductă (fig. 3.5) care are ca efect variația vitezei de curgere. Pentru două secțiuni vecine se poate accepta $\rho_1 = \rho_2$ și, ca urmare, din ecuația de continuitate rezultă $w_1 A_1 = w_2 A_2$. Neglijind frecarea, (secțunile fiind foarte apropiate), pierderea de presiune totală va fi

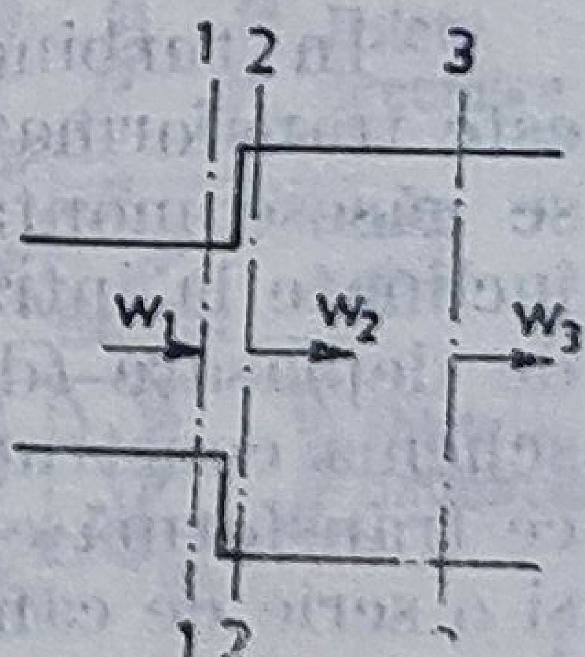


Fig. 3.5. Curgere printr-o conductă cu variație bruscă a secțiunii

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02}; \quad p_{01} = p_1 + \rho_1 \frac{w_1^2}{2};$$

$$p_{02} = p_2 + \rho_2 \frac{w_2^2}{2}$$

Pentru $\rho_1 = \rho_2$ se obține :

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02} = (p_1 - p_2) + \frac{\rho}{2}(w_1^2 - w_2^2)$$

Din ecuaţia impulsului, pentru forţele de frecare şi motoare nule ($F_{fr} = 0$ şi $F_m = 0$) se obţine variaţia presiunii momentane a gazului pe direcţia de curgere :

$$(p_1 - p_2) A = \dot{m} (w_2 - w_1).$$

Deoarece $\dot{m}/A_1 = \rho w_1$ şi $\dot{m}/A_2 = \rho w_2$ se poate scrie :

$$p_1 - p_2 = \rho w_1(w_2 - w_1) = \rho w_2 (w_2 - w_1)$$

Deci :

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02} = \rho w_2 (w_2 - w_1) + \frac{\rho}{2} (w_2^2 - w_1^2) \quad (3.43)$$

Curgerea gazului printr-o conductă de secţiune constantă, încălzită sau răcită. În aceste condiţii $\rho_1 \neq \rho_2$ şi ca urmare apare o variaţie de viteză datorită modificării densităţii. Pentru distanţe mici între secţiunile 1 şi 2, pierderea de presiune totală va fi

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02} = (p_1 - p_2) + \left(\frac{\rho_1 w_1^2}{2} - \frac{\rho_2 w_2^2}{2} \right)$$

sau

$$\Delta p_0 = \rho_1 w_1 (w_2 - w_1) + \left(\frac{\rho_1 w_1^2}{2} - \frac{\rho_2 w_2^2}{2} \right) \text{ [N/m}^2\text{]} \quad (3.44)$$

în care w_1 şi w_2 sînt vitezele medii în secţinnile 1 şi 2 de curgere.

3.6. TRANSFORMAREA ENERGIEI CINETICE ÎN LUCRU MECANIC ŞI INVERS ÎN CANALELE DE PALETE ALE TURBOMAŞINILOR

În turbine, energia cinetică a gazului la ieşirea dintr-un ajutaj este transformată în lucru mecanic în canalele formate de paletele ce se găsesc montate pe rotor. Aceste canale, pentru turbine, sînt curbe şi înclinate la intrare şi ieşire cu unghiurile α_1, respectiv α_2 faţă de direcţia de deplasare (din motive gazodinamice). În figura 3.6 este prezentată schema constructivă a unei turbine, compusă dintr-o serie de ajutaje fixe ce transformă energia potenţială (căderea de entalpie) în energie cinetică, şi o serie de canale mobile formate de paletele montate la periferia roţilor. În ajutaj, căderea de entalpie adiabat-izentropă $\Delta h = h_1 - h_2$ se transformă în energie cinetică.

Canalul dintre palete va fi de secţiune constantă dacă se neglijează lucrul mecanic de frecare, sau uşor divergent în caz contrar (pentru ca viteza de ieşire w_3 să fie egală cu w_2 deoarece ca urmare a încălzirii gazului a apărut o modificarea a densităţii lui ceea ce face necesară o secţiune mai mare). Cele două componente ale vitezei gazului pe direcţie tangenţială vor fi notate cu indicele u şi pe direcţia axială cu indicele a. La curgerea prin

canalul curbat apare o forță pe direcția u și alta pe direcția a, care sînt date de ecuația impulsului. Considerînd sensul pozitiv, direcția de mișcare u, se obține

$$F_u = \dot{m}\,(w_{2u} + w_{1u})\,;\quad F_a = \dot{m}\,(w_{2a} - w_{1a}) \qquad (3.45)$$

Pentru calcule tehnice se utilizează așa-numitul *triunghi de viteză*, prezentat în figura 3.7.

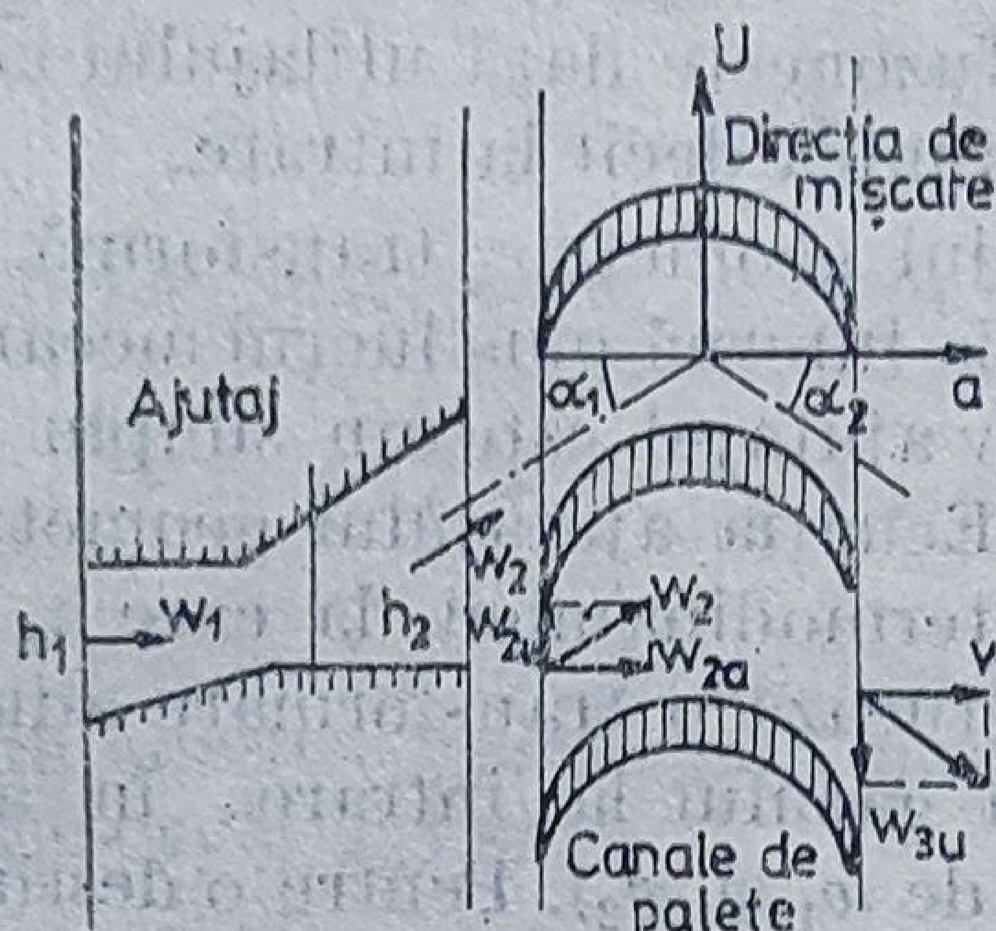


Fig. 3.6. Curgerea gazului prin canelele de palete ale unei turbine.

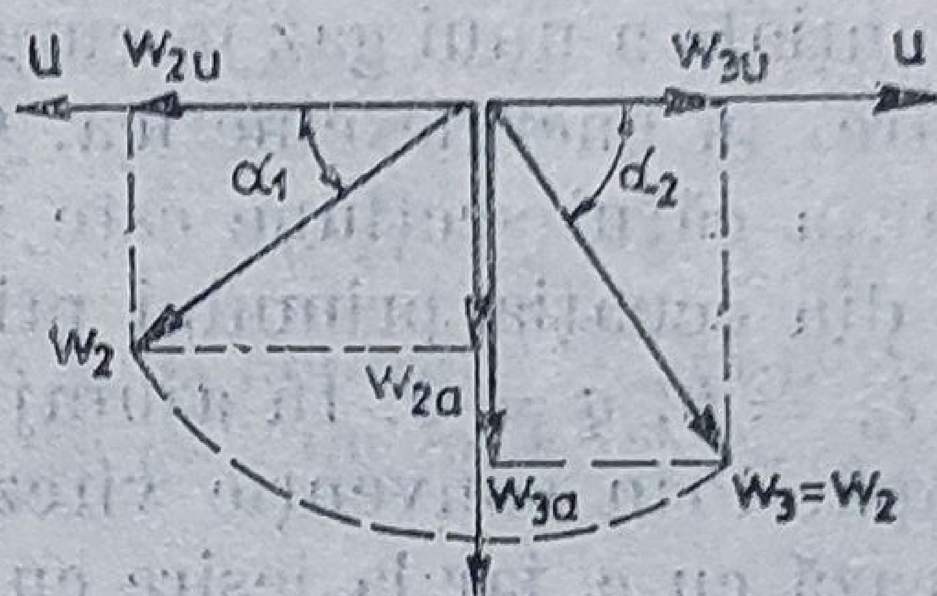


Fig. 3.7. Triunghiurile de viteză a gazului în turbină.

Puterea dezvoltată de turbină P_u, notînd viteza de deplasare a canalului (viteza periferică) cu u în m/s, este

$$P_u = \dot{m}\,u\,(w_{2u} + w_{1u}) \quad [\mathrm{W}] \qquad (3.46)$$

Forța F_a va duce la o împingere axială a roții cu palete. Deoarece în turbine $w_{2u} > w_{1u}$ forța $F_u > 0$ și ca urmare gazul în curgere prin canal va dezvolta lucru mecanic. În cazul unui turbocompresor axial, canalele de paletă au în față o serie de palete directoare care au rolul de a direcționa intrarea gazului spre muchia paletei (fig. 3.8).

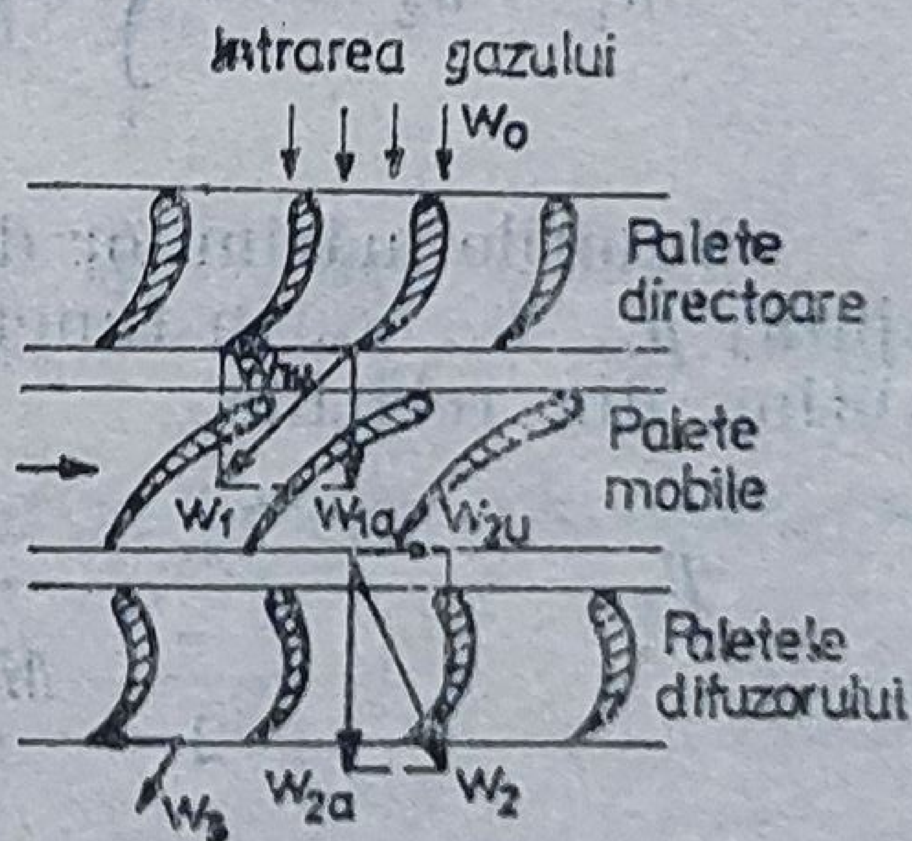


Fig. 3.8. Curgerea gazului printr-un turbocompresir axial.

Canalul paletelor mobile se deplasează în direcția u și, ca urmare, lucrul mecanic consumat de turbocompresor servește la creșterea energiei cinetice a gazului ($w_2 > w_1$). Din ecuația impulsului, pentru debitul $\dot{m}$ de gaze ce trece prin rotorul compresorului se obține

$$|F_u| = \dot{m}\,(w_{2u} + w_{1u})\,;$$

$$F_a = \dot{m}(w_{2a} - w_{1a})$$

Deoarece $F_u < 0$, pentru o viteză periferică u a canalelor de palete se obține puterea consumată de turbocompresor :

$$|P| = |F_u|u = \dot{m}\,u\,(w_{2u} + w_{1u})$$

4 — c. 668

3.7. TRANSFORMAREA ENERGIEI POTENȚIALE ÎN ENERGIE CINETICĂ ÎN AJUTAJUL GEOMETRIC

Prin ajutaj se înțelege un transformator energetic static la care energia cinetică este una din energiile determinante, cea de a doua putînd fi energia internă, căldura sau lucrul mecanic. Denumirea de *ajutaj* se dă utilajului la care energia cinetică a gazului care curge prin el este mai mare la ieșire decît la intrare. Denumirea de difuzor este dată utilajului la care energia cinetică a gazului la ieșire este mai mică decît la intrare.

Ajutaj geometric fără frecare. Ajutajul geometric transformă energia potențială a unui gaz în curgere (energia internă plus lucrul mecanic de deplasare) în energie cinetică. Constructiv ajutajul este un simplu canal (imobil), a cărui secțiune este variabilă. Ecuația ajutajului geometric se obține din ecuația primului principiu la termodinamicii, la care $z_1 = z_2$, $l = 0$, $l_{fr} = 0$, $q = 0$. În ajutaj gazul efectuează o transformare adiabat-izentropă. Prin convenție viteza medie a gazului la intrarea în ajutaj se notează cu c_1 iar la ieșire cu c_2 (în loc de w_1 și w_2). Pentru o destindere de la p_{01} la p_2

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = h_1 - h_2; \quad \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) - \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right)$$

Pentru o transformare adiabat-izentropă în curgere căderea de entalpie $h_1 - h_2$ are expresia

$$h_1 - h_2 = -\int_1^2 v\,\mathrm{d}p = \sqrt{2\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \tag{3.47}$$

Valorile mărimilor de stare ale gazului într-o secțiune curentă x din ajutaj p_x, T_x, ρ_x, în funcție de mărimile frînate la intrare p_{01}, T_{01}, ρ_{01} se obține din relațiile

$$\left.\begin{aligned} T_x &= \frac{T_{01}}{1 + \frac{k-1}{2}M_x^2}\,[\mathrm{K}]; \quad p_x = \frac{p_{01}}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_x^2\right)^{\frac{k-1}{k}}} \\ \rho_x &= \frac{\rho_{01}}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_x^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad v_x = v_{01}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_x^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

în care T_{01}, p_{01} sînt parametrii frînați ai gazului la intrarea în ajutaj, iar ρ_{01}, v_{01} — valorile corespunzătoare ale densității și volumului specific la T_{01} și p_{01}; M_x este criteriul Mach al gazului în secțiunea x. Deoarece în orice

secțiune A_x a ajutajului este valabilă ecuația de continuitate ($\dot{m} = \rho_x c_x A_x$), debitul $\dot{m}$ de gaz ce trece prin secțiunea ajutajului A va fi :

$$\dot{m} = A_x \frac{c_x}{v_x} = \frac{A_x}{v_x} \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right] \quad (3.49)$$

în care pentru o transformare adiabat-izentropă se obține :

$$v_x = v_{01} \left(\frac{p_{01}}{p_x}\right)^{\frac{1}{k}} ; \quad \rho_x = \rho_{01} \left(\frac{p_x}{p_{01}}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (3.50)$$

Introducînd valorile v_x și ρ_x în relația debitului se obține

$$\dot{m} = A_x \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_{01} \rho_{01} \left[\left(\frac{p_x}{p_{01}}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_x}{p_{01}}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right] \quad (3.51)$$

Ca urmare, secțiunea de intrare a ajutajului A_1 și de ieșire A_2, pentru o destindere adiabat-izentropă a unui debit $\dot{m}$ de gaz de la h_1 la h_2 (de la p_{01} și T_{01} la p_2 și T_2) va fi

$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} c_1};$$

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 c_2} = \frac{\dot{m}}{\sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_{01} \rho_{01} \left[\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}} \; [\text{m}^2] \quad (3.52)$$

Variația secțiunii ajutajului geometric se obține din ecuația de continuitate $\dot{m} = \rho c A = \text{const.}$, care este satisfăcută în orice secțiune. Prin derivarea ecuației $\rho c A = \text{const}$ se obține

$$A c \, d\rho + A \rho \, dc + \rho c \, dA = 0$$

Prin împărțire cu $\rho c A$ se obține :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dA}{A} - \frac{dc}{c} \rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{dc}{c} - \frac{d\rho}{\rho}$$

Considerînd viteza de intrare în ajutaj $c_1 = 0$ și presiunea p în secțiunea A unde viteza de curgere este c se obține

$$\frac{c^2}{2} = -\int_{p_{01}}^{p} v dp ; \quad c dc = -v dp ; \quad \frac{dc}{c} = -\frac{v}{c^2} dp$$

Pentru o transformare adiabată-izentropă $pv^k = \text{const.}$ și deci

$$v \, dp + kp \, dv = 0 ; \quad -dv = \frac{d\rho}{\rho^2} ; \quad \rho = \frac{1}{v}$$

și

$$\frac{dp}{\rho} = kp \frac{d\rho}{\rho^2}; \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{kp}.$$

Variaţia secţiunii ajutajului în funcţie de variaţia presiunii va fi atunci

$$\frac{dA}{A} = \frac{v}{c^2}\,dp - \frac{dp}{kp} = dp\left[\frac{v}{c^2} - \frac{1}{kp}\right] \tag{3.53}$$

Semnul variaţiei de secţiune dA/A va depinde deci de semnul termenilor dp şi $\left[\frac{v}{c^2} - \frac{1}{kp}\right]$. Deoarece la destindere, dp este întotdeauna negativ, înseamnă că dacă

$$\frac{v}{c^2} - \frac{1}{kp} > 0 \to c < \sqrt{kpv}\,;\ \frac{dA}{A} < 0 \text{ (secţiune convergentă)}$$

$$\frac{v}{c^2} - \frac{1}{kp} < 0 \to c > \sqrt{kpv}\,;\ \frac{dA}{A} > 0 \text{ (secţiune divergentă)}$$

Deci pentru $c < a$ ($M < 1$) ajutajul va fi convergent, iar viteza la ieşire va fi subsonică.

Pentru $c > 0$ ($M > 1$) ajutajul va avea, după partea convergentă în care se realizează viteza sunetului, şi o parte divergentă. Deci va fi un ajutaj convergent-divergent. În secţiunea de schimbare a convergenţei în divergenţă (secţiunea minimă) gazul va avea viteza sunetului, iar parametrii lui vor avea valorile critice şi anume:

$$\left.\begin{array}{l} T_{cr} = T_{01}\dfrac{2}{k+1}\,;\quad p_{cr} = p_{01}\left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \\[2ex] v_{cr} = v_{01}\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\,;\quad \rho_{cr} = \dfrac{\rho_{01}}{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}} \end{array}\right\} \tag{3.54}$$

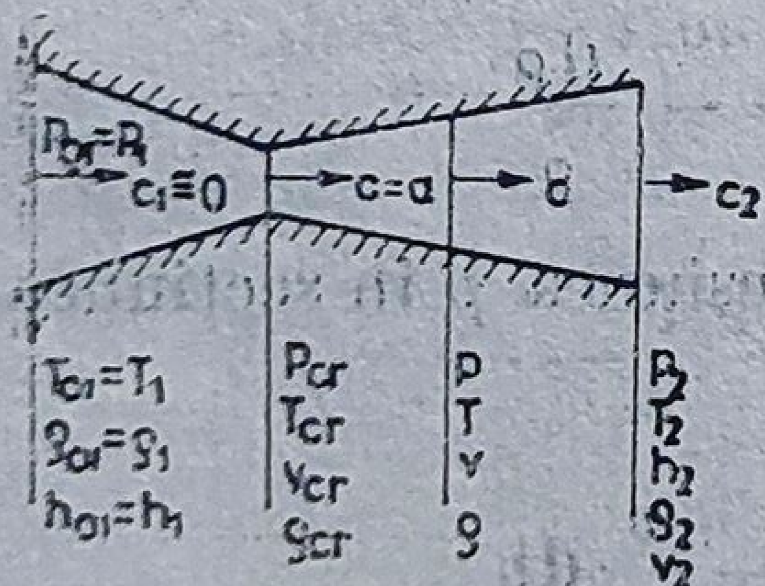


Fig. 3.9. Ajutaj convergent — divergent (supersonic).

În figura 3.9 se prezintă parametrii gazului într-un ajutaj geometric convergent-divergent (ajutaj supersonic). Dacă viteza la ieşire este mai mică sau egală cu viteza sunetului, ajutajul va avea numai partea convergentă (ajutaj subsonic sau sonic).

Legea de variaţie a secţiunii unui ajutaj se poate obţine pe cale grafică din ecuaţia de continuitate ($\dot{V} = A \cdot c$), scrisă pentru un debit de gaz de 1 kg/s. Pentru o secţiune oarecare, prin logaritmare şi diferenţiere ecuaţia de continuitate capătă forma

$$\frac{dA}{A} = \frac{dv}{v} - \frac{dc}{c}$$

Deci, variația secțiunii unui ajutaj (dA/A) depinde de variația volumului specific (dv/v) și a vitezei (dc/c) care, la rîndul lor, sînt funcții de căderea de presiune în ajutaj. Reprezentînd pe o diagramă variațiile volumului specific vitezei și secțiunii se obțin curbele din figura 3.10. Pînă la valoarea critică a vitezei, gradientul volumului specific este mai mic de cît cel al vitezei ($dv/v < dc/c$) și ca urmare secțiunea ajutajului scade. Peste viteza criticăi creșterea volumului specific (dv/v) este mai rapidă decît creștere avitezei, (dc/c) și deci secțiunea crește.

Secțiunea curentă A a ajutajului se poate exprima și în funcție de secțiunea critică A_{cr}, denumită și *secțiunea minimă*, notată cu A_{min}. Ecuația de continuitate (care se respectă pentru orice secțiune) scrisă pentru o secțiune oarecare și cea critică este

$$\dot{m} = \rho c A = \rho_{cr} c_{cr} A_{cr} \tag{3.55}$$

Deoarece $c = a$ M și $M_{cr} = 1$ se obține

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{\rho_{cr} c_{cr}}{\rho c} = \frac{\rho_{cr} c_{cr}}{\rho\, a M} \tag{3.56}$$

Ținînd seama de relațiile

$$\frac{c_{cr}}{a} = \frac{\sqrt{kRT_{cr}}}{\sqrt{kRT}} = \sqrt{\frac{T_{cr}}{R}}\,; \quad \frac{\rho_{cr}}{\rho} = \left(\frac{T_{cr}}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

se obține:

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{1}{M}\left(\frac{T_{cr}}{T_{cr}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{1}{M}\,\frac{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{\left(1+\frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}.$$

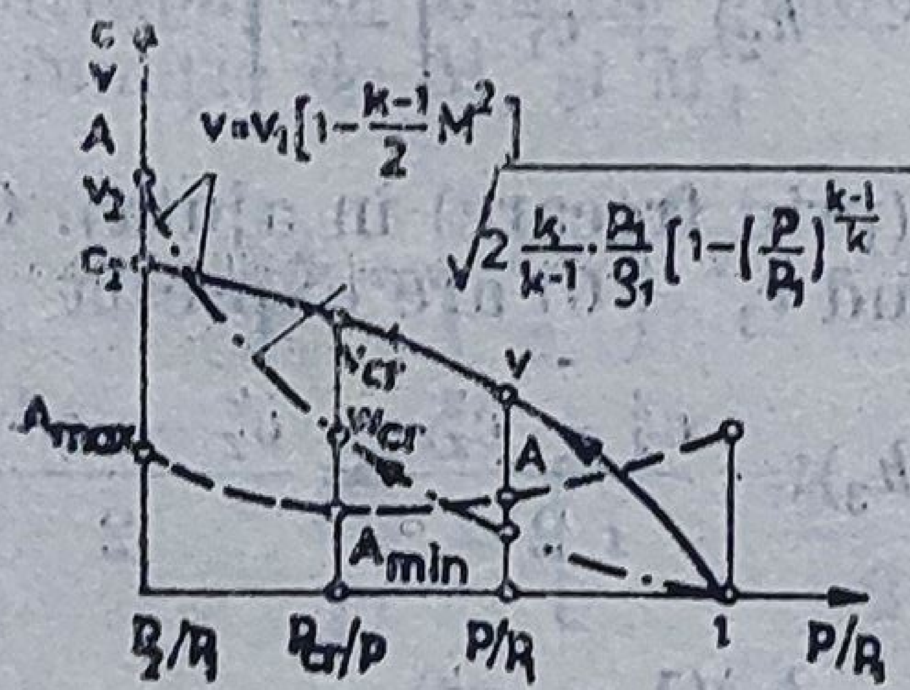


Fig. 3.10. Determinarea grafică a secțiunii A a unui ajutaj geometric.

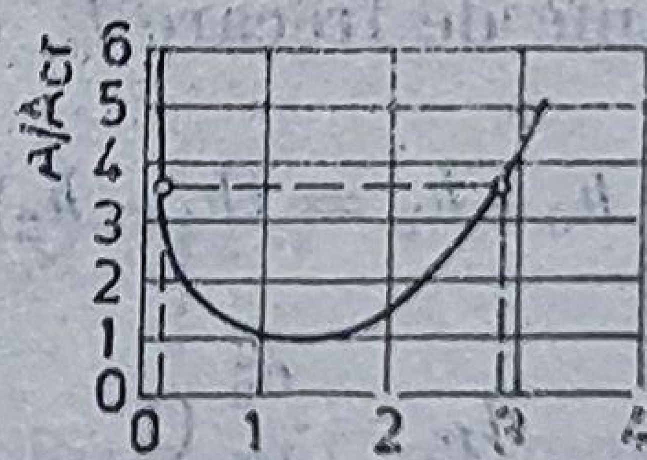


Fig. 3.11. Raportul A/A_{cr} pentru un ajutaj geometric.

Pentru un gaz perfect ($k = 1{,}4$) se obține

$$\left(\frac{A}{A_{cr}}\right)_{k=1,4} = \frac{(1 + 0{,}2\,\mathrm{M}^2)^3}{1{,}728\,\mathrm{M}} \tag{3.57}$$

Relația este reprezentată în figura 3.11.

Ajutaj geometric cu frecare. În cazul cînd se ține seama de frecarea gazului de peretele ajutajului, procesul de destindere din ajutaj devine adiabat-neizentrop (fig. 3.12). Pe diagrama $h - s$ și $p - v$ adiabata izentropă este $1-2$, iar cea neizentropă $1-3$.

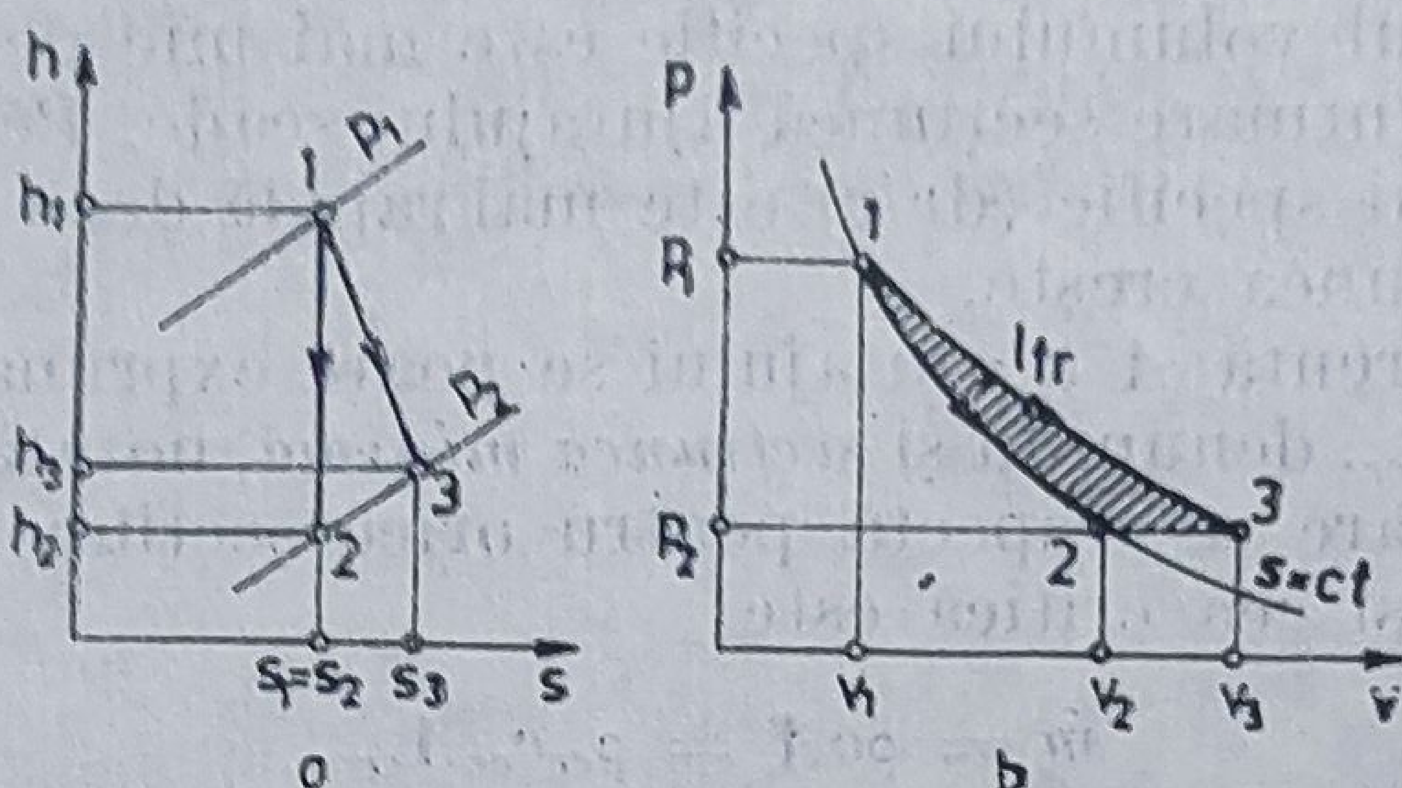


Fig. 3.12. Destindere adiabat — izentropă și neizentropă, într-un ajutaj.

Ecuația de transformare a energiei potențiale în energie cinetică în ajutaj este dată de ecuația primului principiu al termodinamicii pentru o adiabată ireversibilă :

$$\frac{c_{2f}^2 - c_1^2}{2} = (h_1 - h_2) - l_{fr} = h_1 - h_3$$

Deci :
$$c_{2f} = \sqrt{2\,(h_1 - h_2) - l_{fr} + c_1^2} \tag{3.58}$$

Lucrul mecanic de frecare este $l_{fr} = h_3 - h_2$. Deoarece $c_{2f} < c_2$ în calculele tehnice se utilizează și relația

$$c_{2f} = \varphi c_2 = \varphi\sqrt{2\,(h_1 - h_2) + c_1^2} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \tag{3.59}$$

în care φ este coeficientul de pierdere (prin frecare) în ajutaj. Ca urmare, lucrul mecanic de frecare l_{fr} (considerînd $c_1 = 0$) are expresia

$$l_{fr} = h_3 - h_2 = (h_1 - h_2) - (h_1 - h_3) = \frac{c_2^2 - c_{2f}^2}{2} = \frac{c_2^2 - \varphi^2 c_2^2}{2}$$

sau
$$l_{fr} = \frac{c_2^2}{2}(1 - \varphi^2) = (h_1 - h_2)(1 - \varphi^2). \tag{3.60}$$

3.8. TRANSFORMAREA ENERGIEI CINETICE ÎN ENERGIE POTENȚIALĂ ÎN DIFUZOR

Difuzorul este un canal în care gazul în curgere efectuează o compresie adiabat-izentropă pe seama energiei cinetice. Procesul are loc fără efectuare de lucru mecanic exterior și fără schimb de căldură. Difuzorul

este utilizat la turbocompresoare pentru a transforma energia cinetică mare a gazului de la ieşirea din canalele de palete în energie potenţială.

Pentru $q = 0$; $l = 0$; $l_r = 0$, ecuaţia primului principiu are expresia $h_{01} = h_{02}$. Ţinînd seama de notaţiile din figura 3.13 se obţine

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}\ ;\ h_2 - h_1 = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \tag{3.61}$$

Pentru un gaz perfect $dh = c_p dT$ şi ca urmare

$$T_2 - T_1 = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2c_p};\ \frac{T_2}{T_1} - 1 =$$

$$= \frac{w_1^2 - w_2^2}{2c_p T_1} = \frac{R}{2}\frac{w_1^2 - w_2^2}{c_p R T_1}$$

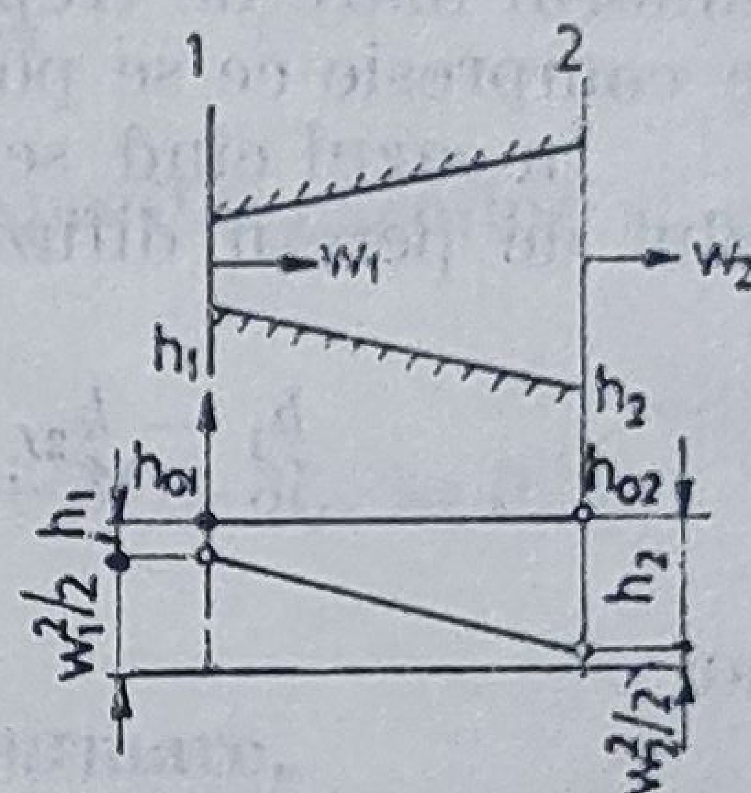


Fig. 3.13. Variaţia parametrilor unui gaz într-un difuzor.

Prin înmulţire şi împărţire cu $c_v (R = c_p - c_v)$ se obţine

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2}\frac{w_1^2 - w_2^2}{kRT_1} =$$

$$= 1 + \frac{k-1}{2}\left(\frac{w_1^2}{a_1^2} - \frac{w_2^2}{a_1^2}\right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2}(M_1^2 - M_2^2). \tag{3.62}$$

în care $M_1 = w_1/a_1$, iar $M_2 = w_2/a_1$. Deoarece transformarea în difuzor este adiabat-izentropă, se obţine gradul de creştere a presiunii gazului în difuzor, în funcţie de M_1 şi M_2:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 + \frac{k-1}{2}(M_1^2 - M_2^2)\ ;$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2}(M_1^2 - M_2^2)\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{3.63}$$

Pentru un gaz perfect ($k = 1,4$) şi situaţia optimă cînd viteza de ieşire a gazului din difuzor $w_2 = 0$, gradul maxim de compresie are expresia

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{max} = (1 + 0,2\ M_2^2)^{3,5} \tag{3.64}$$

Viteza maximă de ieşire a gazului din canalele formate de paletele rotorului este viteza periferică maximă a lui, care pentru materiale uzuale este de circa 350 m/s. În aceste condiţii şi la o temperatură de intrare a

gazului în difuzor $T_1 = 400$ K se obține $a_1 = 400$ m/s, iar $M_1 = w_1/a_1 = 0,875$. Ca urmare gradul maxim de comprsie ε_{max} va fi :

$$\varepsilon_{max} = \left(\frac{p_2}{p_2}\right)_{max} = (1 + 0,2 \times 0,875^2)^{3,5} = 1,65$$

Deci pentru realizarea unui grad de compresie de exemplu $p_2/p_1 = 8$ numărul minim de trepte de turbocompresor va fi $8/\varepsilon_{max} = 5$ trepte. Deci numărul mare de trepte a turbocompresoarelor se datorește gradului mic de compresie ce se poate realiza pe o treaptă.

În cazul cînd se ia în considerare și lucrul mecanic de frecare al gazului de pereții difuzorului, ecuația difuzorului va fi :

$$h_1 - h_{2f} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} - l_{fr} = \left(\frac{w_1^2}{2} - l_{fr}\right)_{w_2=0} \tag{3.65}$$

sau
$$\frac{p_{2f}}{p_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2}(M_1^2 - l_{fr})\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Deci gradul de compresie se va micșora dacă se ține seama de lucrul mecanic de frecare. Deoarece nu se poate determina prin calcul analitic exact l_{fr} se acceptă expresia $l_{fr} = \frac{\xi w_1^2}{2}$ și ca urmare

$$\frac{p_{2f}}{p_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2}(1 - \xi)\, M_1^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{3.66}$$

în care ξ este coeficientul de pierderi (prin frecare) în difuzor, ale cărui valori sînt date în funcție de tehnologia de fabricație a lui.

3.9. AJUTAJUL DE DEBIT, MECANIC ȘI TERMIC

Prin generalizare, un ajutaj este transformatorul unei forme de energie a unui gaz în energie cinetică. În paragraful 3.8 s-a prezentat ajutajul geometric care transformă energia potențială a unui gaz în energie cinetică prin modificarea secțiunii canalului prin care curge. Energia cinetică a unui gaz de curgere se poate mări însă și pe alte căi.

Prin derivarea ecuației de continuitate aplicată unui gaz în curgere se obține relația

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w}$$

Pentru un gaz perfect la care $p = \rho RT$ se obține

$$dp = R(\rho dT + T d\rho)\,; \quad \frac{dp}{\rho} = R\left(dT + T\frac{d\rho}{\rho}\right)$$

Deci

$$\frac{dp}{\rho} = RdT + RT\left[\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dA}{a} - \frac{dw}{w}\right]$$

Ecuaţia lui Bernoulli are forma

$$vdp = \frac{dp}{\rho} = -wdw - \frac{\delta L}{\dot{m}} - \frac{\delta L_{fr}}{\dot{m}},$$

în care $dL/\dot{m}$ şi $dL_{fr}/\dot{m}$ reprezintă lucrul mecanic specific exterior şi de frecare. Din ultimele două ecuaţii rezultă

$$RdT + \frac{a^2}{k}\left(\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dA}{A}\right) + \left(w^2 - \frac{a^2}{k}\right)\frac{dw}{w} + \delta l + \delta l_{fr} = 0.$$

Pentru un gaz perfect $dh = \frac{k}{k-1}RdT$ şi, ca urmare,

$$\delta q = dh + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + \delta l \rightarrow \delta q = \frac{k}{k-1}RdT + w\,dw + \delta l$$

care, introdusă în relaţia de mai sus, permite obţinerea ecuaţiei generale a curgerii accelerate a unui gaz compresibil sub forma

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dA}{A} - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{\delta l}{a^2} - \frac{k-1}{a^2}\delta q - \frac{k}{a^2}\delta l_{fr} \quad (3.67)$$

Această ecuaţie exprimă legătura dintre variaţia vitezei de curgere a unui gaz perfect şi toţi factorii ce o pot influenţa. Aceştia sînt: variaţia secţiunii conductei dA/A; variaţia debitului $d\dot{m}/\dot{m}$; lucrul mecanic δl; căldura schimbată cu exteriorul δq.

Deci, în cazul unei curgeri cu viteză subsonică ($M < 1$), accelerarea gazului ($dw/w > 0$) poate avea loc prin una din condiţiile: $dA/A < 0$; $d\dot{m}/\dot{m} > 0$; $\delta l > 0$; $\delta q > 0$.

În cazul curgerii supersonice, accelerarea poate avea loc dacă se satisface una din condiţii: $dA/A > 0$; $d\dot{m}/\dot{m} < 0$; $\delta l < 0$; $\delta q < 0$.

În cazul unui ajutaj geometric ecuaţia generală a curgerii accelerate, particularizată pentru $\delta l = 0$; $\delta q = 0$ şi $d\dot{m}/\dot{m} = 0$, devine (vezi paragraful 3.7):

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dA}{A} \quad (3.68)$$

Ajutajul de debit. Procesul de accelerare a unui curent de gaz prin variaţia debitului are loc într-un canal cu secţiune constantă ($dA/A = 0$), fără schimb de căldură cu mediul exterior ($\delta q = 0$) şi fără lucru mecanic

exterior ($\delta l = 0$). În aceste condiții, ecuația generală a curgerii accelerate capătă forma :

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} \tag{3.69}$$

Pentru a accelera un gaz cu viteza inițială subsonică ($M < 1$) maximum pînă la viteza sonică ($\mathrm{d}w/w > 0$), debitul de gaz trebuie să crească ($\mathrm{d}M/M > 0$). Pentru a se realiza la ieșire o viteză supersonică ($\mathrm{M} > 1$) debitul de gaz trebuie să scadă. Deci în secțiunea sonică, unde $\mathrm{M} = 1$, debitul de gaz ce curge prin ajutajul de debit are valoarea maximă. Liniile de curent se vor concentra în porțiunea subsonică a lui și se vor evaza în cea supersonică, creînd o învăluitoare convergent-divergentă ca și a ajutajului geometric (fig. 3.14). Ca urmare, realizarea ajutajului de

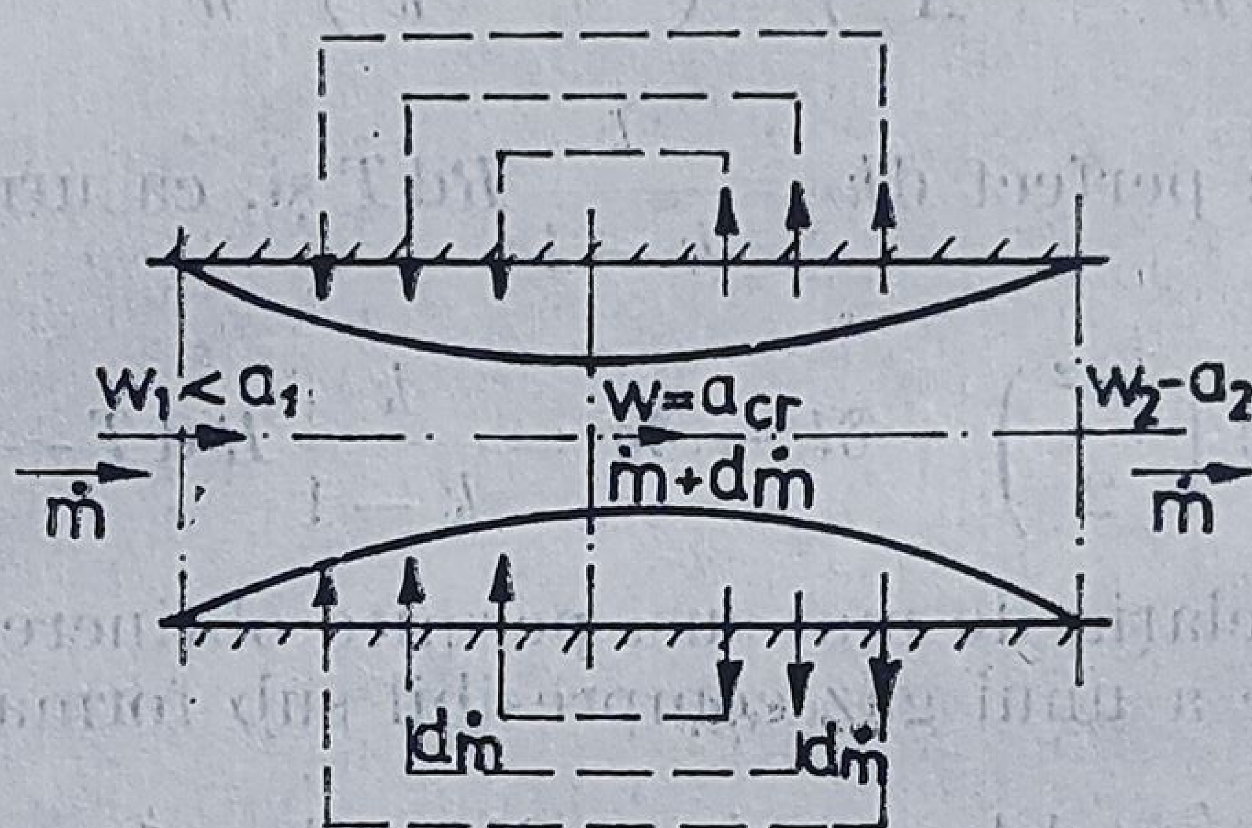


Fig. 3.14. Ajutaj de debit.

debit presupune recircularea unui debit de gaz $\mathrm{d}\dot{m}$ din zona supersonică în cea subsonică.

Ajutajul mecanic. Ajutajul mecanic respectă și el ecuația generală a curgerii accelerate, în care $\mathrm{d}\dot{m}/\dot{m} = 0$; $\mathrm{d}A/A = 0$; $\delta q = 0$; deci ecuația de curgere are forma

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{\delta l}{a^2} = \frac{\mathrm{d}P}{a^2\dot{m}} \tag{3.70}$$

în care cu P s-a notat puterea turbomașinii. Deci, ajutajul mecanic este un canal cu secțiune constantă. După cum rezultă din ecuație, pentru ca o curgere inițială subsonică $\mathrm{M} < 1$ să fie accelerată pînă la $\mathrm{M} = 1$, gazul trebuie să efectueze un lucru mecanic exterior, iar pentru ca o curgere inițială cu o viteză supersonică să fie accelerată trebuie să primească din exterior lucru mecanic. Schematic, ajutajul mecanic va fi deci un canal de secțiune constantă, în care în partea subsonică gazul se va destinde producînd lucru mecanic, de exemplu într-o turbină de gaze, iar în partea supersonică va evolua într-un turbocompresor, consumînd lucru mecanic. Sche-

matic, el este reprezentat în figura 3.15. Deoarece sa-a considerat $l_{fr} = 0$, ecuaţia ajutajului între secţiunea 1 şi cea critică (cr) este :

$$h_{01} = h_{cr} + l$$

Deoarece în porţiunea subsonică $l > 0$, se obţine $h_{0_{cr}} = h_{01}$; deci gazul se destinde şi ca urmare se răceşte. Pentru porţiunea supersonică, de la *(cr)* la 2 :

$$h_2 = h_{cr} + |l|$$

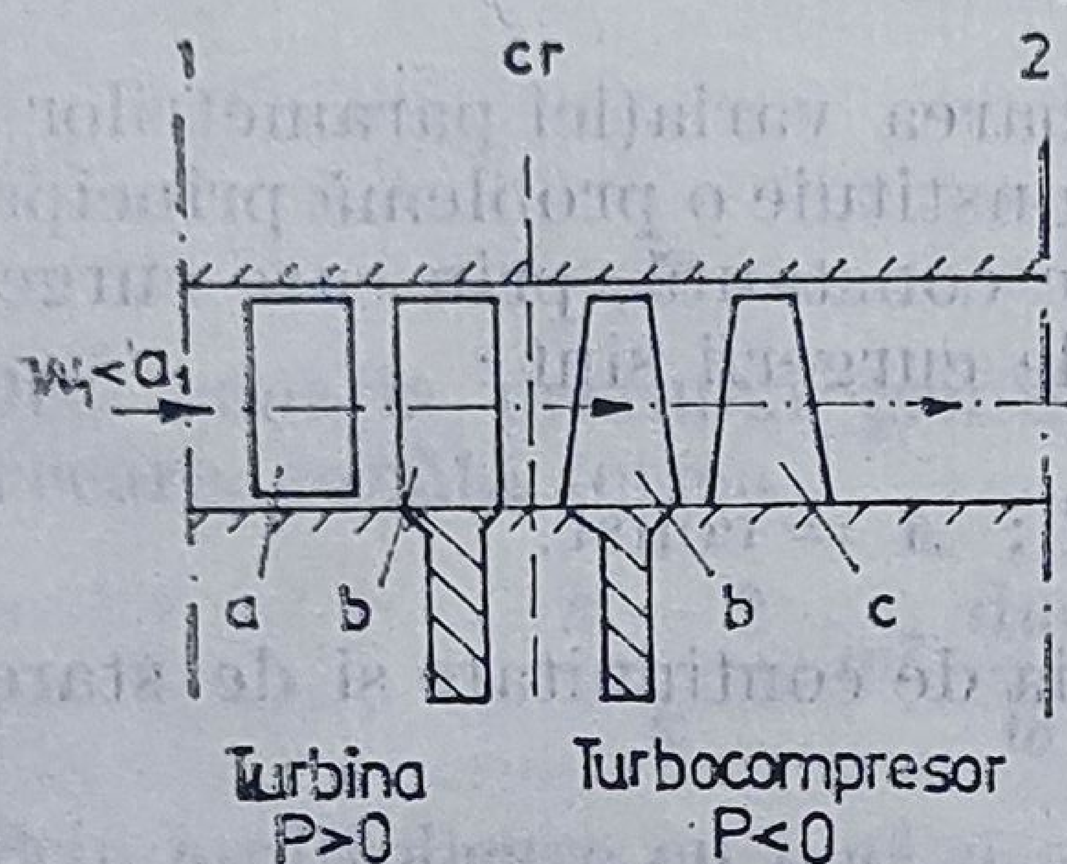


Fig. 3.15. Ajutaj mecanic : *a* — ajutaj ; *b* — canal palete ; *c* — difuzor

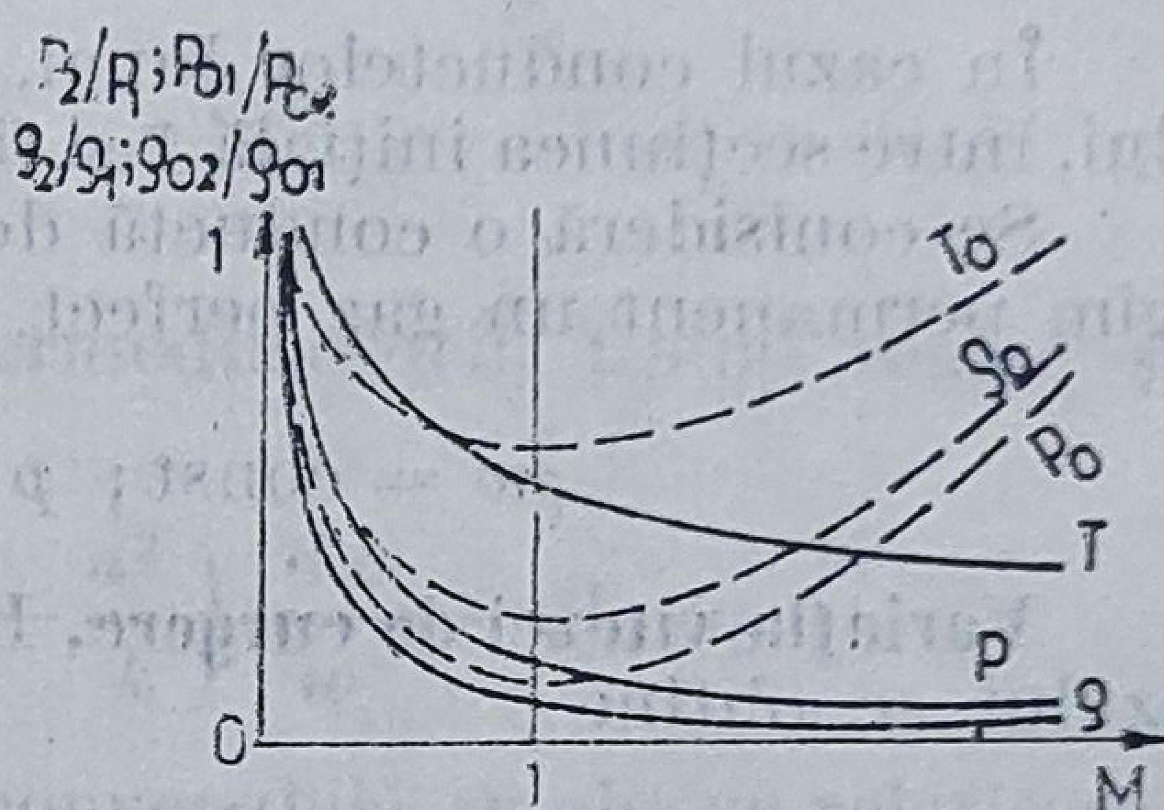


Fig. 3.16. Variaţia parametrilor gazului într-un ajutaj mecanic.

Deci $h_2 > h_{cr}$ şi ca urmare gazul se comprimă şi se încălzeşte. Legătura între parametrii gazului în partea subsonică şi supersonică este dată de ecuaţiile adiabatei :

$$\frac{p_{cr}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{cr}}{T_{01}}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_{cr}}{\rho_{01}} = \left(\frac{T_{cr}}{T_{01}}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

sau

$$\frac{p_2}{p_{cr}} = \left(\frac{T_2}{T_{cr}}\right); \quad \frac{\rho_2}{\rho_{cj}} = \left(\frac{T_2}{T_{cr}}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

În figura 3.16 se prezintă, calitativ, variaţia parametrilor frînaţi T_0 şi ρ_0 şi momentani T şi ρ ai gazului într-un ajutaj mecanic.

Ajutajul termic. Constructiv, ajutajul termic este şi el o conductă sau canal de secţiune constantă, în care accelerarea curentului are loc numai pe seama schimbului de căldură al gazului cu mediul exterior.

Pe baza relaţiei generale a curgerii accelerate, pentru $dA/A = 0$ $\delta l = 0$; $d\dot{m}/\dot{m} = 0$, rezultă

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{k-1}{a^2}\delta q \tag{3.71}$$

Deci accelerarea curentului în domeniul vitezei subsonice are loc cu aport de căldură ($\delta q > 0$), iar la curgeri supersonice cu cedare de căldură

($\delta q < 0$). Ca efect al aportului de căldură, pe porțiunea subsonică și cedării de căldură pe porțiunea supersonică, în secțiunea critică (unde se atinge viteza sunetului) entalpia gazului va avea valoarea critică ($h_{01} < < h_{cr} > h_2$).

3.10. INFLUENȚA FRECĂRII LA CURGEREA ADIABATĂ A GAZELOR PRIN CONDUCTE LUNGI

În cazul conductelor lungi, determinarea variației parametrilor gazului, între secțiunea inițială 1 și finală 2, constituie o problemă principală.

Se conisideră o conductă de secțiune constantă, prin care curge în regim permanent un gaz perfect. Condițiile curgerii sînt :

$$\rho w = \text{const}\,;\; p = \rho\, R\, T;\; A = \text{const}.$$

Variația vitezei de curgere. Din ecuația de continuitate și de stare a gazului se obține

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{\mathrm{d}w}{w};\; \mathrm{d}p = R\,(\rho\,\mathrm{d}T + T\,\mathrm{d}\rho)$$

Deci :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = R\mathrm{d}T + RT\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = R\,\mathrm{d}T - R\,T\frac{\mathrm{d}w}{w}$$

Ecuația generală a primului principiu al termodinamicii pentru $\delta q = 0$ și $\delta l = 0$ devine

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = w^2\frac{\mathrm{d}w}{w} + \delta l_{fr} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -w^2\frac{\mathrm{d}w}{w} - \delta l_{fr}$$

Rezultă :

$$-w^2\frac{\mathrm{d}w}{w} - \delta l_{fr} = R\,\mathrm{d}T - RT\frac{\mathrm{d}w}{w} \tag{3.72}$$

$$R\,\mathrm{d}T + \left(w^2 - \frac{kRT}{k}\right)\frac{\mathrm{d}w}{w} + \delta l_{fr} = R\,\mathrm{d}T +$$

$$+\left(w^2 - \frac{a^2}{k}\right)\frac{\mathrm{d}w}{w} + \delta l_{fr} = 0 \tag{3.73}$$

Pentru două secțiuni (1) și (2), neglijînd frecarea ($l_{fr} = 0$) entalpia frînată în cele două secțiuni este egală. Ca urmare, $h_{01} = h_{02} = h_0$ și deci

$$h_0 = \text{const} = h + \frac{w^2}{2};\; T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p} = \text{const}.$$

Deoarece T_0 = const. se obține prin derivare

$$dT_0 = 0 = dT + \frac{w^2}{c_p}\frac{dw}{w} \rightarrow dT_0 = -\frac{w^2}{c_p}\frac{dw}{w}$$

Prin multiplicare cu R și împărțire cu c_v se obține

$$R\,dT = -c_v\frac{R}{c_v}\frac{w^2}{c_p}\frac{dw}{w} = -\frac{c_p - c_v}{c_v}\frac{w^2}{\frac{c_p}{c_v}}\frac{dw}{w} =$$

$$= -\frac{k-1}{k}w^2\frac{dw}{w} \tag{3.74}$$

Deci ecuația primului principiu al termodinamicii, ținînd seama și de frecare, capătă forma

$$-\frac{k-1}{k}w^2\frac{dw}{w} + \left(w^2 - \frac{a^2}{k}\right)\frac{dw}{w} + \delta l_{fr} = 0$$

Prin multiplicare cu k/a^2 și aranjare convenabilă se obține relația ce exprimă variația vitezei în conductă :

$$-(k-1)M^2\frac{dw}{w} + (kM^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{k}{a^2}\delta l_{fr} \tag{3.75}$$

De unde, variația vitezei în conducta prin care gazul curge cu o viteză corespunzătoare lui M, este dată de expresia

$$\frac{dw}{w} = -\frac{k}{(M^2 - 1)\,a^2}\delta l_{fr} \tag{3.76}$$

Considerînd o curgere fără frecare ($\delta l_{fr} = 0$) derivata părții drepte a ecuației este zero deoarece ea este constantă și deci viteza în lungul conductei va fi constantă $\left(\frac{dw}{w} = 0\right)$ și egală cu cea inițială w_0. Luînd în considerare curgerea cu frecare, prin integrarea ecuației între w_0 și w se obține viteza de curgere w în funcție de w_0, l_{fr} și M :

$$\ln w = \frac{k}{(M^2 - 1)\,a^2}l_{fr} + \ln w_0 \tag{3.77}$$

Deci viteza w de curgere a unui gaz perfect pentru un lucur mecanic de frecare l_{fr} va fi :

$$w = w_0\, e^{-\frac{k}{(M^2-1)\,a^2}l_{fr}} \quad \left[\frac{m}{s}\right] \tag{3.78}$$

Valoarea lucrului mecanic de frecare l_{fr} este întotdeauna pozitivă și crește cu distanța parcursă de fluid. Se constată că odată cu creșterea lui l_{fr} pot

apărea două situaţii, în funcţie de valoarea criteriului Mach al curgerii şi anume

— la curgeri subsonice (M < 1) lucrul mecanic de frecare aduce după sine o creştere a vitezei de curgere a gazului ($dw/w > 0$);

— la curgeri supersonice (M > 1) lucrul mecanic de frecare aduce după sine o micşorare a vitezei de curgere a gazului ($dw/w < 0$).

Variaţia vitezei de curgere a gazului w în funcţie de l_{fr} este prezentată în figura 3.17.

Deci lucrul mecanic de frecare într-un curent de gaz ce curge cu o viteză subsonică va avea ca efect accelerarea lui pînă la maximum viteza sunetului. De exemplu, curgerea cu frecare a unui gaz a cărui viteză iniţială este $w_0 < a_0$ ($M_0 < 1$) printr-o conductă de secţiune constantă are loc cu creşterea vitezei, pînă ce se va atinge viteza sunetului (M $= 1$). În cazul cînd viteza iniţială $w_0 > a_0$ ($M_0 > 1$), sub influenţa frecării viteza va scădea, pînă va ajunge la viteza sunetului (M $= 1$).

Deci lucrul mecanic de frecare aduce un curent subsonic la viteza sonică, iar unul supersonic tot la viteza sonică. Odată ajuns la M $= 1$ curgerea subsonică nu mai poate fi accelerată, iar cea supersonică nu mai poate fi frînată, ea continuînd cu M $= 1$. Această situaţie se defineşte drept c r i z a c u r g e r i i c u f r e c a r e. În absenţa unui schimb de căldură cu mediul exterior, între două secţiuni 1 şi 2, temperatura frînată a gazului perfect rămîne constantă ($T_{01} = T_{02} = T_0 =$ const.) Într-o secţiune oarecare unde viteza de curgere este w, temperatura momentană în funcţie de cifra $M_{cr} = w/a_{cr}$ este dată de expresia

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2.$$

Pentru două secţiuni oarecare, iniţială *1* şi finală *2*, se obţin (pentru o secţiune $A_1 = A_2 = A$ şi $\dot{m} =$ const.) expresiile:

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2; \qquad \frac{T_2}{T_{02}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_2}^2$$

Deci raportul temperaturilor momentane ale gazului perfect va fi

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_2}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2} \tag{3.79}$$

Din ecuaţia de continuitate se obţine raportul densităţilor gazului:

$$\frac{M_{cr_1}}{M_{cr_2}} = \frac{\frac{w_1}{a_{cr}}}{\frac{w_2}{a_{cr}}} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{\dot{m}}{A \cdot \rho_1}}{\frac{\dot{m}}{A \cdot \rho_2}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{3.80}$$

în care $\dot{m}$ este debitul de gaz în kg/s iar A secţiunea conductei, în m². Raportul presiunilor momentane în secţiunile 1 şi 2 este

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M^2_{cr_2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M^2_{cr_1}}\right]^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k \tag{3.81}$$

În figura 3.18 se prezintă variaţia temperaturii şi densităţii unui gaz perfect la o curgere subsonică şi supersonică cu frecare, printr-o conductă circulară

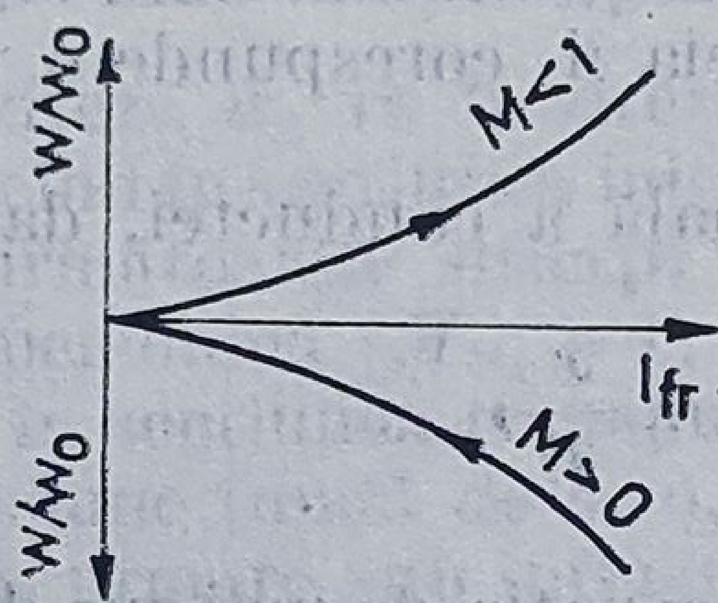


Fig. 3.17. Influenţa lucrului mecanic de frecare, asupra vitezei de curgere a gazelor prin conducte lungi.

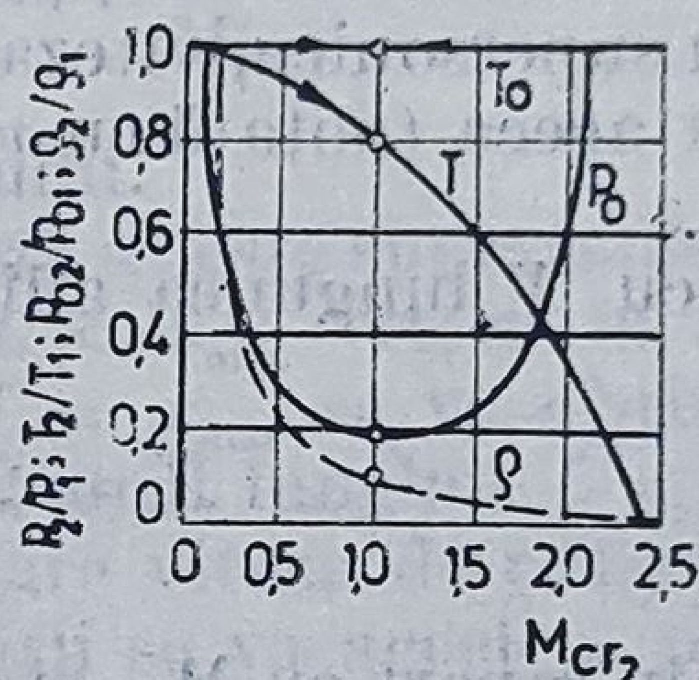


Fig. 3.18. Variaţia parametrilor gazului la curgerea cu frecare prin conducte.

Săgeţile de pe curbe indică direcţia de variaţie a lui M_{cr_2}(M_{cr_1} fiind în secţiunea iniţială o valoare dată).

Lucrul mecanic de frecare este

$$\delta l_{fr} = \lambda \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D}, \tag{3.82}$$

în care λ este coeficientul de frecare, considerat independent de M sau M_{cr}, fiind funcţie numai de criteriul Reynolds (considerat constant în lungul conductei) şi x (lungimea conductei). În lungul conductei există identitatea

$$\frac{dw}{w} = \frac{dM_{cr}}{M_{cr}} \tag{3.83}$$

Ecuaţia curgerii printr-o conductă cu diametrul D, ţinînd seama de expresia lucrului mecanic de frecare, devine

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\lambda k \frac{M^2}{2} \cdot \frac{dx}{D} \tag{3.84}$$

sau, ţinînd seama de legătura dintre M şi M_{cr},

$$\left(\frac{1}{M^2_{cr}} - 1\right)\frac{dM_{cr}}{M_{cr}} = \frac{k}{k+1} \lambda \frac{dx}{D}. \tag{3.85}$$

Prin integrare între secțiunea 1 (secțiunea inițială) și curentă 2, se obține ecuația ce permite calculul lui M_{cr}:

$$\frac{1}{M_{cr_1}} - \frac{1}{M_{cr_2}} - \ln\left(\frac{M^2_{cr_2}}{M^2_{cr_1}}\right) = 2\frac{k}{k+1}\lambda\frac{x}{D} \qquad (3.86)$$

în care M_{cr_1} corespunde la distanța $x = 0$ și M_{cr_2} la distanța x. Cu ajutorul acestor relații, se obține viteza de curgere a gazului (M_{cr_2}) la orice distanță de la intrare, dacă se cunoaște M_{cr_1}, D și x.

Lungimea x a conductei, pentru o anumită valoare a vitezei inițiale, (subsonice sau supersonice, viteza în secțiunea inițială fiind M_{cr_1}) nu poate fi la limită decît aceea (notată cu x_{max}) căreia îi corespunde o viteză pentru care $M_{cr_2} = 1$.

Notînd cu X lungimea adimensională a conductei, dată de relația

$$X = 2\frac{k}{k+1}\lambda\frac{x}{D}, \qquad (3.87)$$

prin derivare în raport cu M_{cr_2} și anulare ecuația de mai sus devine

$$\frac{dX}{dM^2_{cr_2}} = \frac{1}{M^4_{cr_2}} - \frac{1}{M_{cr_2}} = 0,$$

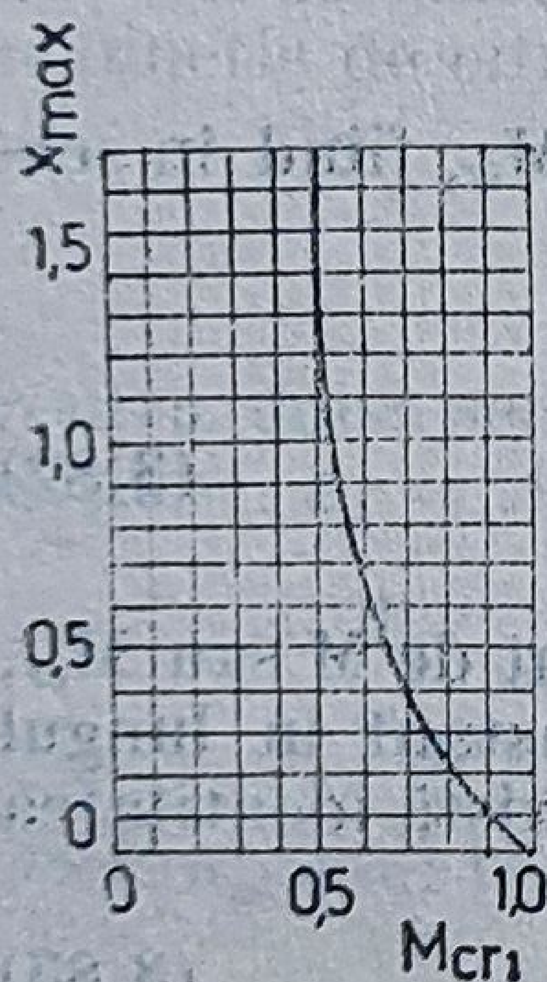


Fig. 3.19. Lungimea maximă a unei conducte pînă la apariția crizei curgerii, în funcție de M_{cr_2}

din care rezultă $M_{cr_2} = 1$. Prin a doua derivare și înlocuirea $M_{cr_2} = 1$, rezultă

$$\frac{d^2X}{(dM^2_{cr_2})^2} = -\frac{2}{M^6_{cr_2}} + \frac{1}{M^4_{cr_2}} = -1.$$

Pentru $M_{cr_2} = 1$ se obține $M_{cr_1} = -1$, ceea ce este imposibil.

Lungimea maximă X_{max} a conductei pentru care în secțiunea de ieșire 2, ca urmare a frecării, gazul iese cu viteza sunetului ($M_{cr_2} = 1$) în funcție de M_{cr_1} cunoscut, va fi dată de relația generală în care se introduce $M_{cr_2}=1$. Ea are expresia

$$X_{max} = 2\frac{k}{k+1}\lambda\frac{x_{max}}{M^2_{cr_2}} = \frac{1}{M^2_{cr_1}} - \frac{1}{M^2_{cr_2}} -$$

$$- \ln\left(\frac{M^2_{cr_2}}{M^2_{cr_1}}\right) = \frac{1}{M^2_{cr_1}} - 1 - \ln\frac{1}{M^2_{cr_1}} \qquad (3.88)$$

Pe figura 3.19 se prezintă valorile lui X_{max} în funcție de $M_{cr_1} < 1$. Deci, lungimea maximă a conductei (x_{max}) va fi

$$x_{max} = \frac{(k+1)DX_{max}}{2k\lambda} \text{ [m]}. \qquad (3.89)$$

Ca urmare, o conductă de lungimea L în care gazul intră cu o viteză inițială subsonică corespunzătoare lui M_{cr_1} se poate găsi în următoarele situații : dacă $L < x_{max}$ la capătul conductei viteza w_2 va fi subsonică ($M_{cr_2} < 1$) ; dacă $L = x_{max}$ la capătul conductei viteza w_2 va fi viteza sonică ($M_{cr_2} = 1$) ; dacă $L > x_{max}$ viteza w_1 la intrare nu va putea fi cea corespunzătoare lui M_{cr_1} (și ca urmare nici debitul nu va fi cel reieșit din ecuația de continuitate pentru viteza w_1) ci va avea o altă valoare, M'_{cr_1}. Valoarea M'_{cr_1} se obține din relația :

$$L = \frac{1}{(M'_{cr_1})^2} - 1 - \ln \frac{1}{(M'_{cr_1})^2} \cdot \tag{3.90}$$

Pentru M'_{cr_1}, viteza w_2 va fi viteza sunetului.

În cazul cînd în secțiunea inițială viteza w_1 este supersonică ($M_{cr_1} > 1$), sînt posibile următoarele situații : dacă $L < x_{max}$ viteza în secțiunea de ieșire va fi supersonică ($M_{cr_2} > 1$) ; dacă $L = x_{max}$ se va obține $M_{cr_2} = 1$; dacă $L > x_{max}$ în secțiunea corespunzătoare unei lungimi $L' < L$ va apărea un salt de presiune (undă de șoc), după care viteza de curgere va deveni subsonică și ca urmare sub influența frecării se va accelera pînă la viteza sunetului. Lungimea L' se stabilește de la sine, astfel încît la ieșire viteza să fie sonică ($M_{cr_2} = 1$).

3.11. STUDIUL PROCESELOR DE CURGERE CU AJUTORUL FUNCȚIILOR GAZODINAMICE

Relațiile dintre parametrii gazului la curgerea unidirecțională sînt funcții de M_{cr} sau M. Astfel, temperatura momentană într-o secțiune în care viteza corespunde lui M_{cr} în funcție de temperatura frînată inițială, pentru o curgere adiabat-izentropă este

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 ; \quad T(M_{cr}) = 1 \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \tag{3.91}$$

Deci temperatura momentană T în funcție de temperatura frînată în secțiunea inițială se poate exprima printr-o funcție $T(M_{cr})$ monoton descrescătoare, denumită *funcția gazodinamică de temperatură*. Valoarea ei variază între 1, ce corespunde lui $M_{cr}^2 = 0$, și zero pentru $M_{cr_{max}}^2 = (k+1)/(k-1)$.

Curgerea fiind adiabat-izentropă, relațiile dintre presiunea și densitatea momentană p și ρ și presiunea și densitatea frînată în starea inițială p_0 și ρ_0, sînt date de funcțiile gazodinamice $p(M_{cr})$ și $\rho(M_{cr})$:

$$\frac{p}{p_0} = p(M_{cr}) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right)^{\frac{k}{k-1}} ; \tag{3.92}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \rho(M_{cr}) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right)^{\frac{1}{k-1}} . \tag{3.93}$$

Pentru un gaz perfect ($p = \rho RT$) relațiile de legătură între funcțiile gazodinamice $T(M_{cr})$, $p(M_{cr})$ și $\rho(M_{cr})$ sînt

$$\rho(M_{cr}) = \frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T} = \frac{p(M_{cr})}{T(M_{cr})}. \qquad (3.94)$$

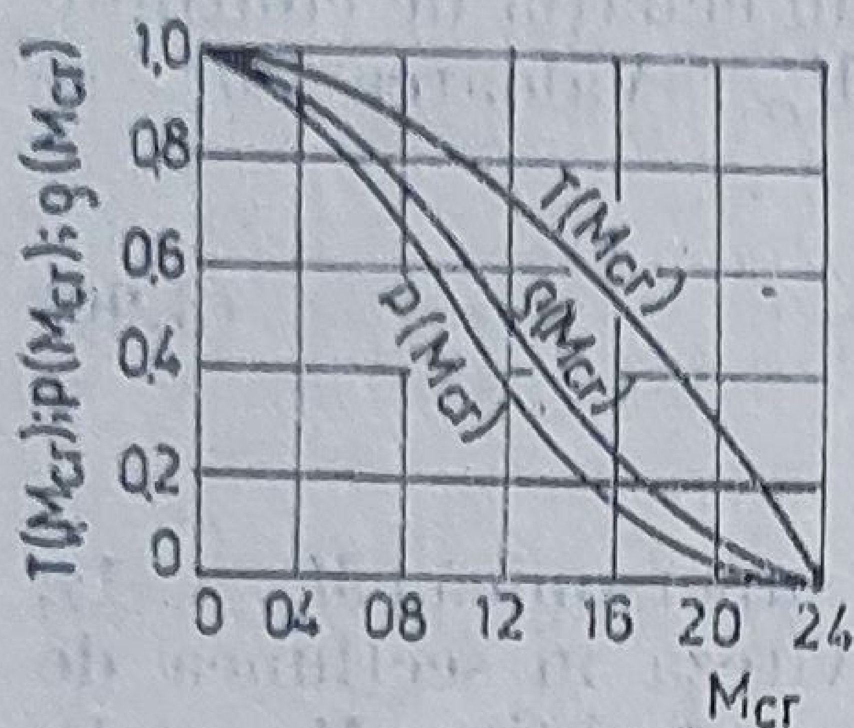


Fig. 3.20. Funcțiile gazodinamice $T(M_{cr})$, (pM_{cr}), $\rho(M_{cr})$ pentru un gaz perfect ($k=1,4$).

Valorile funcțiilor gazodinamice de temperatură $T(M_{cr})$ de presiune $p(M_{cr})$ și densitate $\rho(M_{cr})$ pentru $k = 1,4$ sînt prezentate în figura 3.20 și în tabelul 6.2.

Pentru determinarea celorlalte mărimi caracteristice ale unui curent adiabat de gaz, se mai utilizează și funcțiile gazodinamice de debit și de impuls.

Debitul masic de gaz $\dot{m}$ ce curge în regim permanent printr-o conductă de secțiune A cu viteza w este dat de ecuația de continuitate $\dot{m} = \rho w A$. Densitatea momentană ρ a gazului în secțiunea unde viteza de curgere corespunde lui M_{cr} în funcție de valoarea frînată ρ_0 în secțiunea inițială este:

$$\rho = \rho_0\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} = \frac{p_0}{RT_0}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \qquad (3.95)$$

iar viteza de curgere

$$w = M_{cr}\, a_{cr} = M_{cr}\sqrt{2\frac{2}{k+1}RT_0} \qquad (3.96)$$

Ca urmare, pentru un gaz perfect ecuația de continuitate capătă forma

$$\dot{m} = \rho w A = \frac{p_0}{RT_0}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot A M_{cr}\sqrt{2\frac{k}{k+1}RT_0} \qquad (3.97)$$

care, înmulțită cu viteza critică $a_{cr} = \sqrt{2\frac{k}{k+1}RT_0}$, devine

$$\dot{m}\, a_{cr} = \frac{p_0}{RT_0}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot A M_{cr}\, 2\frac{k}{k+1}RT_0$$

$$\dot{m}\, a_{cr} = \rho_0\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot A M_{cr}\, 2\frac{k}{k+1}$$

Funcția gazodinamică de debit (numită prima funcție gazodinamică de debit) se notează cu $q(\mathrm{M}_{cr})$ și are expresia

$$q(\mathrm{M}_{cr}) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \mathrm{M}_{cr}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (3.98)$$

care, înlocuită în expresia debitului $\dot{m}$, și ținînd seama de expresia vitezei critice a_{cr}, și de constanta V

$$V = \sqrt{\frac{1}{R}}\sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (3.99)$$

duce la relația

$$\dot{m} = V\frac{p_0 A q(\mathrm{M}_{cr})}{\sqrt{T_0}} \quad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right]. \quad (3.100)$$

Funcția gazodinamică $q\ (\mathrm{M}_{cr})$ se ia din tabele sau se calculează în funcție de M_{cr} și k. Ea este prezentată în figura 3.21. Făcînd apel la funcția de presiune $p\ (\mathrm{M}_{cr})$, dată de expresia

$$p_0 = \frac{p}{p(\mathrm{M}_{cr})} = \frac{p}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] \quad (3.101)$$

ecuația de debit capătă forma

$$\dot{m} = V\frac{Ay(\mathrm{M}_{cr})}{\sqrt{T_0}} \quad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right], \quad (3.102)$$

în care $y\ (\mathrm{M}_{cr})$ este a doua funcție gazodinamică de debit, a cărei expresie este

$$y\ (\mathrm{M}_{cr}) = \frac{q(\mathrm{M}_{cr})}{p(\mathrm{M}_{cr})} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{\mathrm{M}_{cr}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2}. \quad (3.103)$$

Funcția $y\ (\mathrm{M}_{cr})$ se obține de asemenea, din tabele, prin calcul, sau din fig. 3.22.

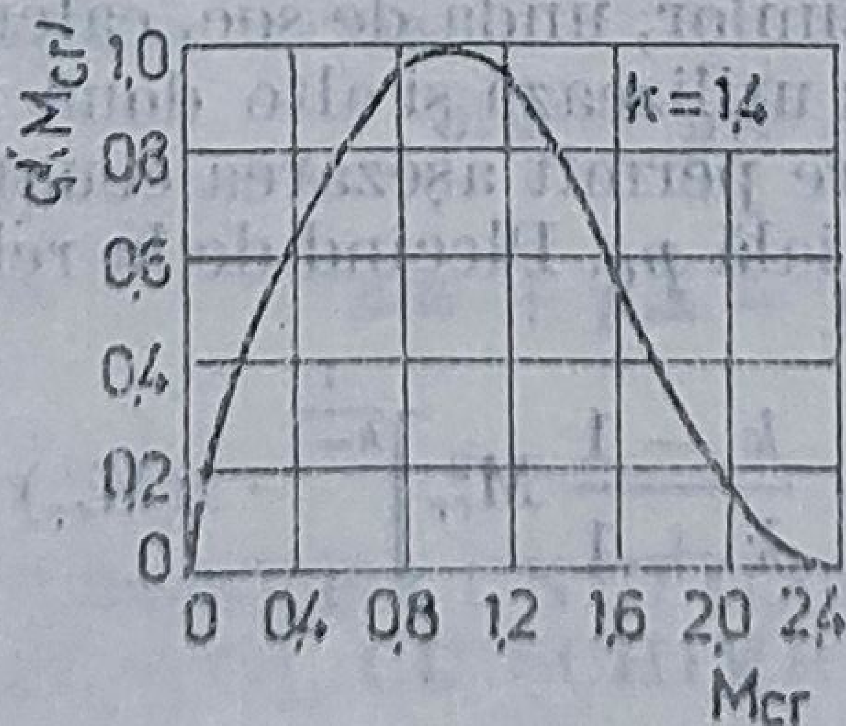


Fig. 3.21. Prima funcție gazodinamică $q(\mathrm{M}_{cr})$ pentru un gaz perfect ($k = 1,4$).

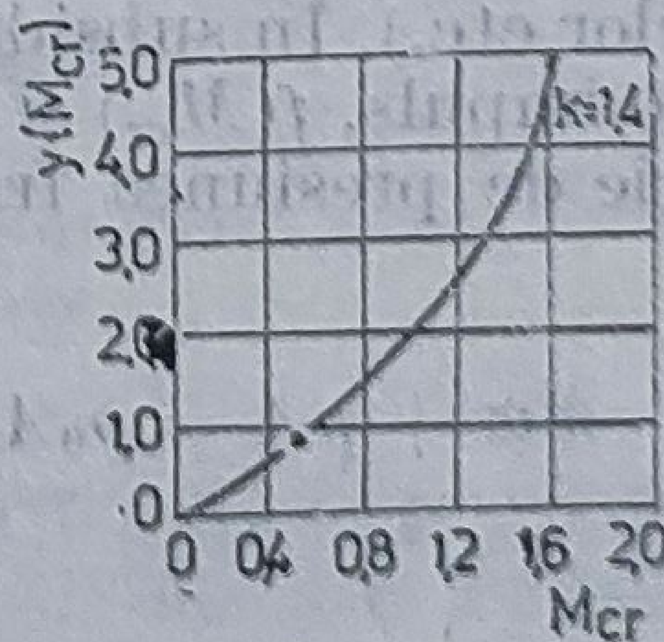


Fig. 3.22. A doua funcție gazodinamică $y(\mathrm{M}_{cr})$ pentru un gaz perfect ($k=1,4$).

Prin integrarea ecuației cantității de mișcare rezultă

$$\dot{m} \cdot w_2 + p_2 \cdot A = \dot{m}_1 w_1 + p_1 A$$

sau, în general, $\dot{m} w + p A = \text{const.}$

Expresia constantei este

$$\dot{m}w + pA = \dot{m}\left(w + \frac{p}{\rho \cdot w}\right),$$

Deoarece pentru un gaz perfect

$$\frac{p}{\rho} = RT = RT_0\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right] =$$

$$= \frac{k+1}{2k}a_{cr}^2\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right]$$

iar $w = M_{cr} \cdot a_{cr}$; relația capătă atunci forma

$$\dot{m}w + pA = \dot{m}\left[M_{cr}a_{cr} + \frac{k+1}{2k}\frac{a_{cr}}{M_{cr}}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right)\right]$$

sau

$$\dot{m}w + pA = \frac{k+1}{2k}\dot{m}a_{cr}z(M_{cr}),$$

în care funcția gazodinamică a impulsului $z(M_{cr})$ prezentată în figura 3.23 este dată de relația

$$z(M_{cr}) = M_{cr} + \frac{1}{M_{cr}} \tag{3.104}$$

Ea este utilizată în studiul curgerilor unde impulsul este fenomenul predominant (curgeri prin paletele turbomașinilor, unda de șoc, calculul mecanic al conductelor etc.). În subsidiar se mai utilizează și alte două funcții gazodinamice de impuls, $f(M_{cr})$ și $r(M_{cr})$,care permit așezarea ecuației impulsului în funcție de presiunea frînată inițială p_0. Plecînd de la relațiile

$$\dot{m}w + pA = p_0AM_{cr}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot z(M_{cr})$$

sau :

$$\dot{m}w + pA = \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot p_0Aq(M_{cr})\,z(M_{cr})$$

În funcție de presiunea momentană din secțiunea unde viteza de curgere corespunde lui M_{cr} ea devine

$$\dot{m}w + pA = \frac{M_{cr}}{1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr}^2} z(M_{cr})$$

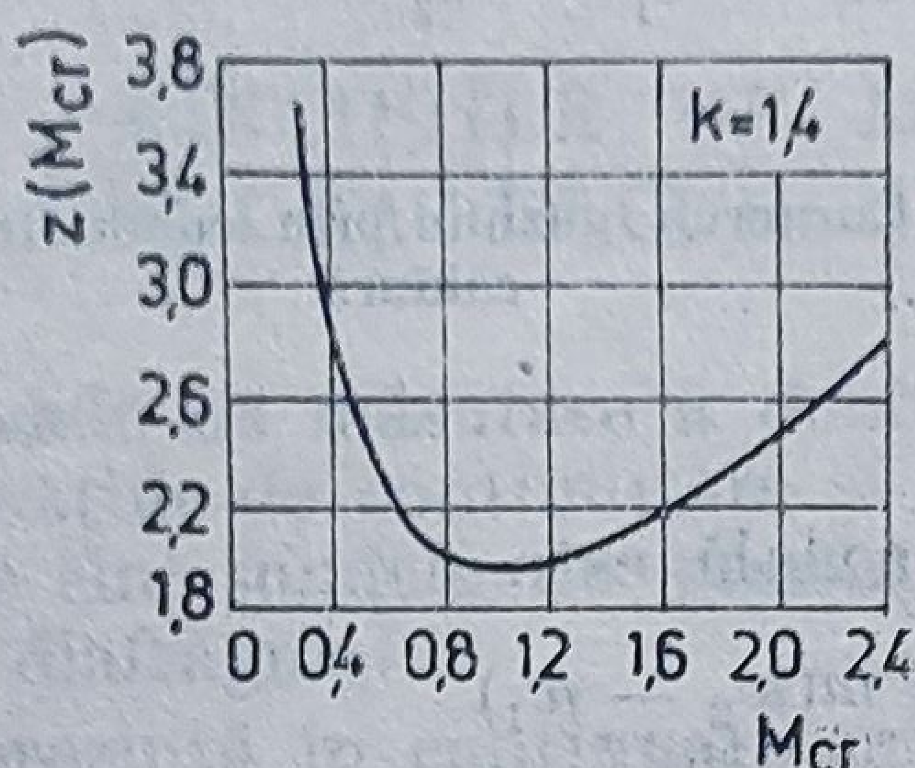


Fig. 3.23. Funcția gazodinamică $z(M_{cr})$ pentru un gaz perfect ($k = 1,4$).

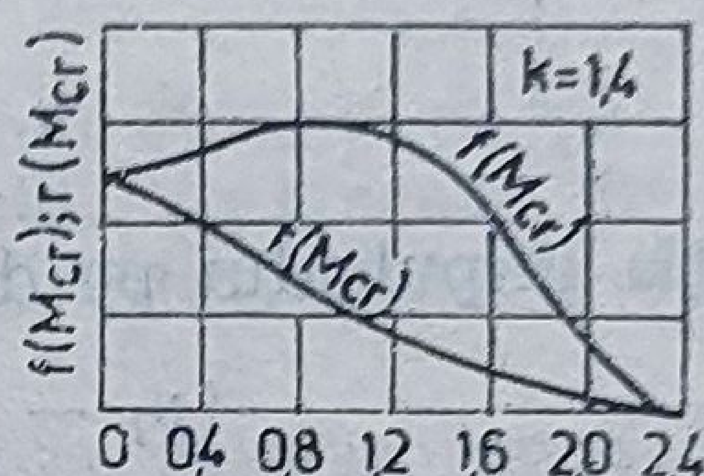


Fig. 3.24. Funcțiile gazodinamice $f(M_{cr})$ și $r(M_{cr})$ pentru un gaz perfect ($k=1,4$).

sau

$$\dot{m}w + pA = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} pAy(M_{cr})\, z(M_{cr})$$

După gruparea convenabilă a ecuației impulsului, cele două funcții gazodinamice ale impulsului și anume $f(M_{cr})$ și $r(M_{cr})$, sînt date de relațiile

$$f(M_{cr}) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} q(M_{cr})\, z(M_{cr}) \tag{3.105}$$

$$r(M_{cr}) = \frac{k+1}{2} \frac{1}{y(M_{cr}) \cdot z(M_{cr})}. \tag{3.106}$$

Funcțiile $f(M_{cr})$ și $r(M_{cr})$, date în tabele, se pot calcula și sînt prezentate în funcție de M_{cr} în figura 3.24. Folosind aceste funcții, ecuația impulsului capătă forma

$$\dot{m}w + pA = p_0 A f(M_{cr})$$

sau

$$mw + pA = pA \frac{1}{r(M_{cr})}.$$

3.12. CURGEREA UNUI GAZ PERFECT PRINTR-O CONDUCTĂ SCURTĂ, CU SCHIMB DE CĂLDURĂ CU PEREȚII.

Curgerea gazului perfect printr-o conductă de secțiune constantă, cu schimb de căldură cu pereții, datorită variației densității gazului are loc cu schimbarea vitezei de curgere și ca urmare cu pierderi de

presiune. Se consideră curgerea unui gaz perfect printr-o conductă circulară de secțiune A (fig. 3.25), cu aport de căldură de la pereți. Ecuația de continuitate pentru secțiunile 1 și 2 este

$$\dot{m} = w_1 \rho_1 A = w_2 \rho_2 A \rightarrow \frac{\dot{m}}{A} = \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2} = \text{const.} \qquad (3.108)$$

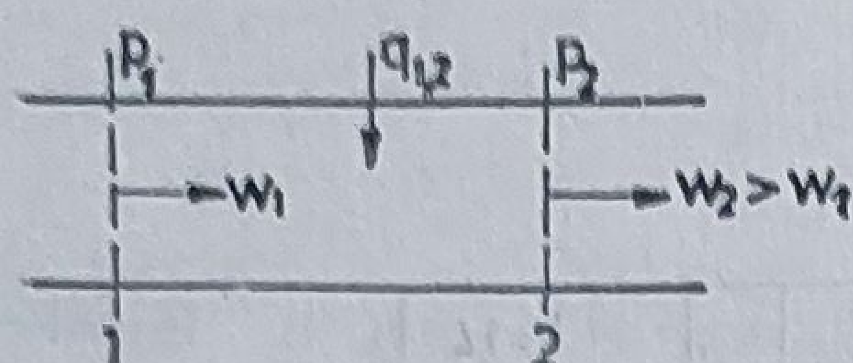


Fig. 3.25. Curgerea gazului prin conducte cu aport de căldură.

Ecuația impulsului pe direcția axială este

$$(p_1 - p_2)A = \dot{m}(w_2 - w_1) \qquad (3.109)$$

care poate fi sub forma

$$p_1 - p_2 = \frac{\dot{m}}{A}(w_2 - w_1) = \frac{w_1 \cdot \dot{m}}{A}\left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) =$$

$$= w_1 \frac{w_1}{v_1}\left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) = \frac{w_1^2}{v_1}\left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right).$$

Pentru un gaz perfect

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{w_2}{w_1} = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \frac{w_2}{w_1} = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}.$$

Ca urmare, ecuația impulsului capătă forma

$$p_1 - p_2 = \frac{w_1^2}{v_1}\left[\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = \frac{w_1^2 p_1}{RT_1}\left[\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} - 1\right] \qquad (3.110)$$

sau $$p_1\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) = p_1 \frac{k \cdot w_1^2}{kRT_1}\left[\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} - 1\right].$$

De unde se obține

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - k\mathrm{M}_1^2\left[\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = 1 - k\mathrm{M}_1^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right). \qquad (3.111)$$

Cunoscînd variația temperaturii gazului între cele două secțiuni (ca urmare a căldurii primite de la pereți pe lungimea de conductă 1 — 2) și notînd cu π raportul $\frac{p_2}{p_1}$ și cu φ raportul $\frac{T_2}{T_1}$ se obține

$$\pi = 1 - k\mathrm{M}_1^2\left(\frac{\varphi}{\pi} - 1\right) \rightarrow \pi^2 - \pi(1 - k\,\mathrm{M}_1^2) + k\varphi M_1 = 0,$$

de unde se obține pierderea de presiune statică:

$$\pi = \frac{1}{2}\left[(1 + k\,M_1^2) \pm \sqrt{(1+kM_1^2)^2 - 4kM_1^2}\right] \qquad (3.112)$$

3.13. PRINCIPIILE DE MĂSURARE A DEBITULUI UNUI GAZ ÎN CURGERE

Metodele de măsurare a debitului unui curent de gaz, folosesc în general ecuațiile de continuitate și Bernoulli. Aparatele de măsură cele mai uzuale sînt sondele de presiune, tubul Pitot, ajutajul Venturi, rotametrul și diafragma.

Se prezintă în continuare principiul pe care se bazează măsurarea debitului cu aparatele respective, fără a intra în detaliile constructive ale lor sau metodologia experimentului.

Sonda de presiune este compusă dintr-un tub cilindric, cu unul din capete deschis și așezat în direcția de curgere a gazului. Celălalt capăt al tubului este legat la un manometru. Ținînd seama de notațiile din figura 3.26 și aplicînd ecuația lui Bernoulli se obține:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_{01}}{\rho_2}.$$

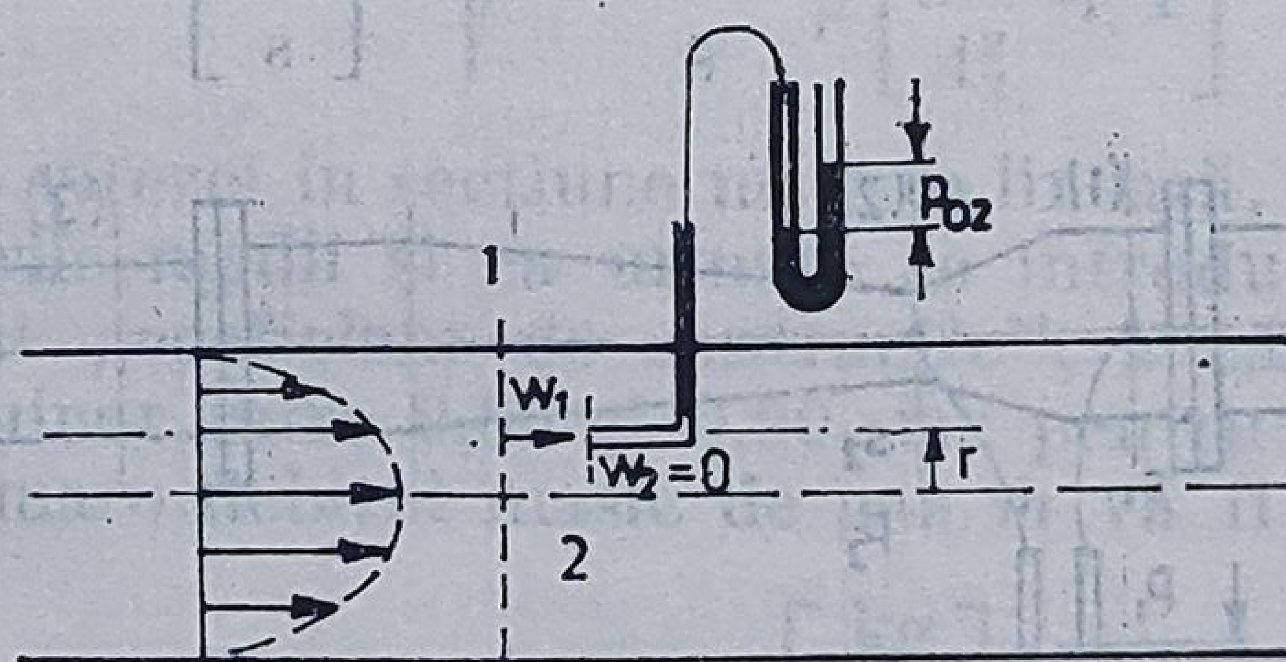


Fig. 3.26. Sondă de presiune.

Sonda de presiune măsoară presiunea frînată p_0 a unui gaz. Deoarece secțiunea orificiului sondei este foarte mică și în interiorul sondei gazul nu curge, ea măsoară presiunea frînată locală la ordonatele x și r. Măsurătorile făcute fiind locale, ea permite determinarea profilului variației vitezei în secțiune și apoi, prin calcul, a vitezei medii. Cunoscînd viteza medie, se determină prin calcul și debitul de gaz ce trece prin conductă. Deoarece valoarea densității ρ_1 nu se cunoaște decît numai după ce se cunoaște presiunea p_1 și temperatura t_1 sonda de presiune se utilizează numai pentru determinarea debitelor la gazele reci, cu viteze de curgere cuprinse între

$0 < M \leq 0,4$. În aceste condiții, se acceptă aproximația $\rho_1 = \rho_2 = \rho =$ $=$ const. și ca urmare

$$p_{01} = p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

Tubul Pitot, prezentat schematic în figura 3.27, permite măsurarea presiunii frînate și momentane a unui gaz în curgere și prin calcul a presiunii dinamice. Orificiul îndreptat axial măsoară presiunea frînată locală, iar cel îndreptat perpendicular pe curent (orificiile laterale de pe tubul

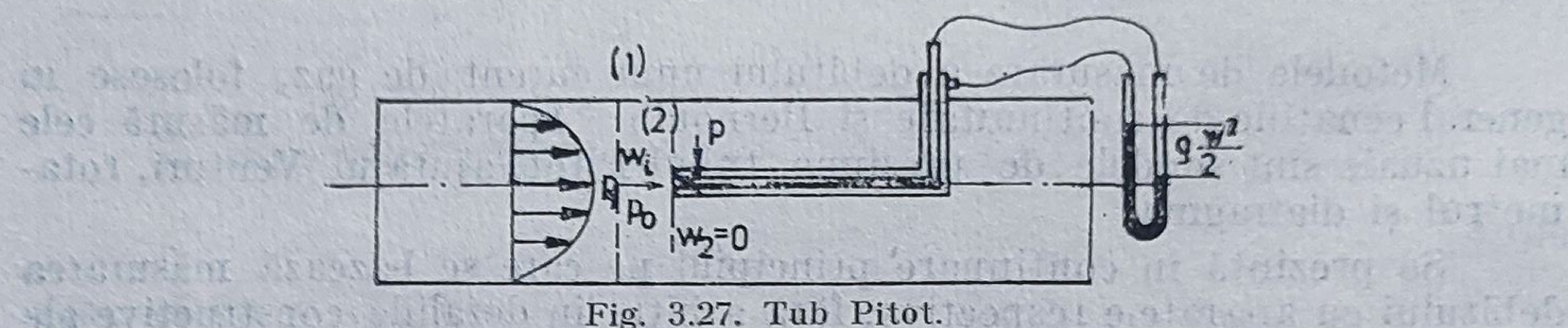


Fig. 3.27. Tub Pitot.

exterior), măsoară presiunea momentană locală. Indicația dată de un manometru diferențial este chiar presiunea dinamică. Considerînd că $\rho_1 = \rho =$ $=$ const., deci pentru viteze de curgere $0 < 1 \leq 0,4$, se obține din ecuația lui Bernoulli

$$p_{01} = p_1 + \rho \frac{w_1}{2} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

și ca urmare

$$w_1 = \frac{2(p_{01} - p_1)}{\rho} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

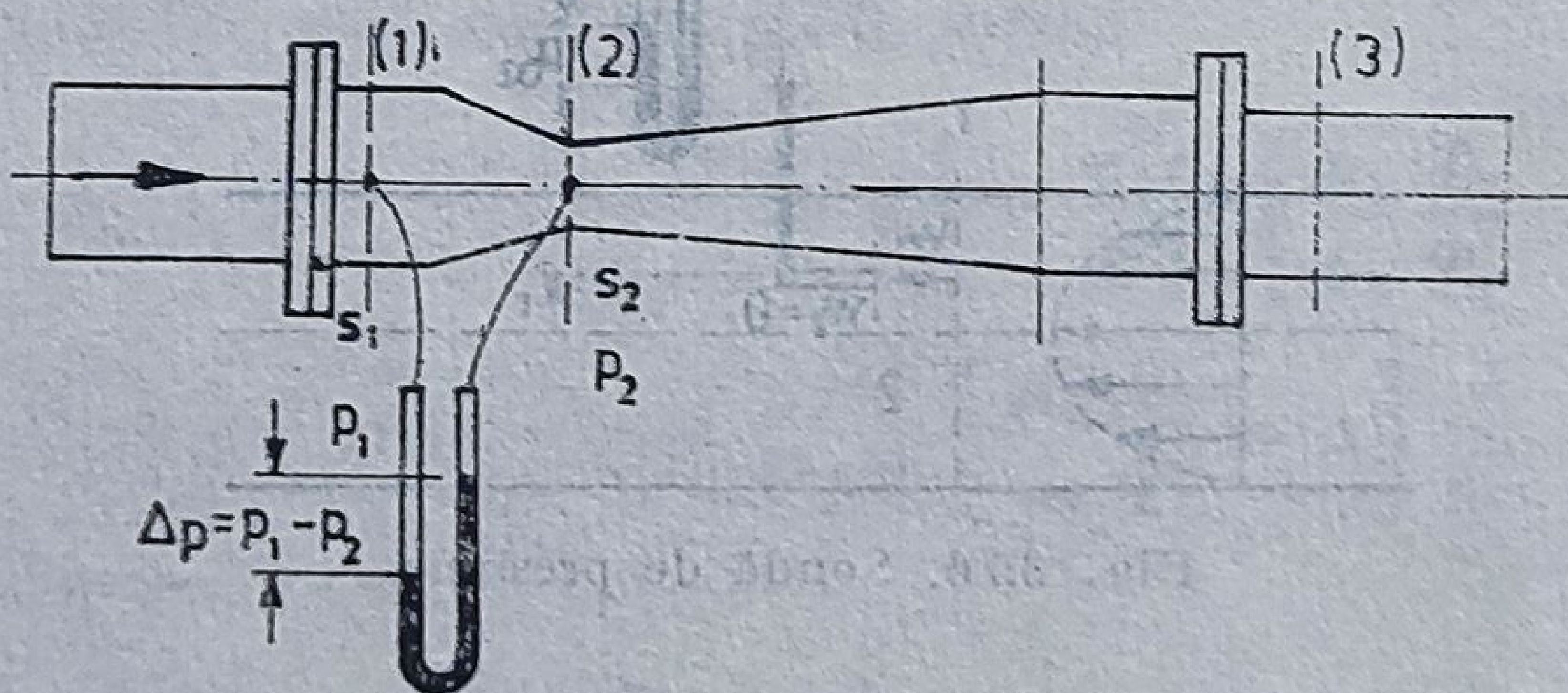


Fig. 3.28. Ajutaj Venturi.

Ajutajul Venturi este prezentat schematic în figura 3.28. Conducta prin care curge gazul capătă la un moment dat forma unui ajutaj convergent-divergent. Măsurîndu-se într-o secțiune (*1*), situată înainte de ajutaj, presiunea momentană medie p_1 și în secțiunea minimă (2) presiunea momentană medie p_2, din ecuația de continuitate se obține pentru $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$Aw_1 = A_2 w_s \quad [m^3/s]$$

în care A_1 și A_2 sînt ariile secțiunilor (*1*) și (*2*).

Ecuaţia lui Bernoulli, neglijînd lucrul mecanic de frecare, aplicată celor două secţiuni este

$$p_{01} = p_{02}\,; \quad \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{w_2^2}{2}.$$

Căderea de presiune statică pentru curgeri cu $0 < M \leqslant 0{,}2$ (domeniul în care se recomandă utilizarea tubului Venturi), nefiind prea mare, ea nu aduce după sine modificări importante ale densităţii gazului şi ca urmare se acceptă ipoteza că $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Ca urmare între vitezele w_1 şi w_2 va exista raportul dintre pătratele secţiunilor A_1 şi A_2, deci

$$p_1 + \rho\frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{w_1^2}{2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\,w_1^2\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

De unde se obţine viteza medie de curgere a gazului în secţiunea (1):

$$w_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right]}} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Debitul masic de gaz va fi

$$\dot{m} = A_1 \cdot w_1 \cdot \rho = \sqrt{\rho^2 \cdot A_1^2\,\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right]}} \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

Deoarece repartiţia vitezei în secţiune nu este lineară, presiunile măsurate nu sînt chiar valorile medii şi ca urmare se introduce un coeficient de corecţie φ, denumit „coeficient de contracţie", a cărui valoare variază pentru regimul laminar între 0,80 şi 0,90, iar pentru cel turbulent între 0,96 şi 0,98. Ca urmare debitul masic de gaz $\dot{m}$ va fi în realitate

$$\dot{m} = A_1 \varphi w_1 \rho \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

Pentru ca pierderile în tubul Venturi să fie cît mai mici posibile, este necesar ca secţiunea divergentă, unde are loc decelerarea fluidului şi unde pierderile prin turbulenţă sînt mari, să fie lent progresivă, iar partea convergentă unde are loc accelerarea lui şi unde pierderile prin frecare sînt mari, să fie cît mai scurtă.

Diafragma este o variantă a ajutajului Venturi. În figura 3.29 se prezintă schematic elementele caracteristice ale unei diafragme de măsurare a debitului. Înainte de diafragmă, viteza gazului este w_1 iar secţiunea conductei A. Viteza de curgere în secţiunea A_d a orificiului diafragmei este w_2. Presiunea momentană înaintea diafragmei (secţiunea *1*), măsurată

la manometrul diferențial este p_1, iar imediat după diafragmă (secțiunea *2*), este p_2.

Raportul secțiunilor la construcțiile curente de diafragme $S_d/S = 0{,}62 \ldots 0{,}70$. Pierderile de presiune frînată (totală) Δp_0 între secțiunile

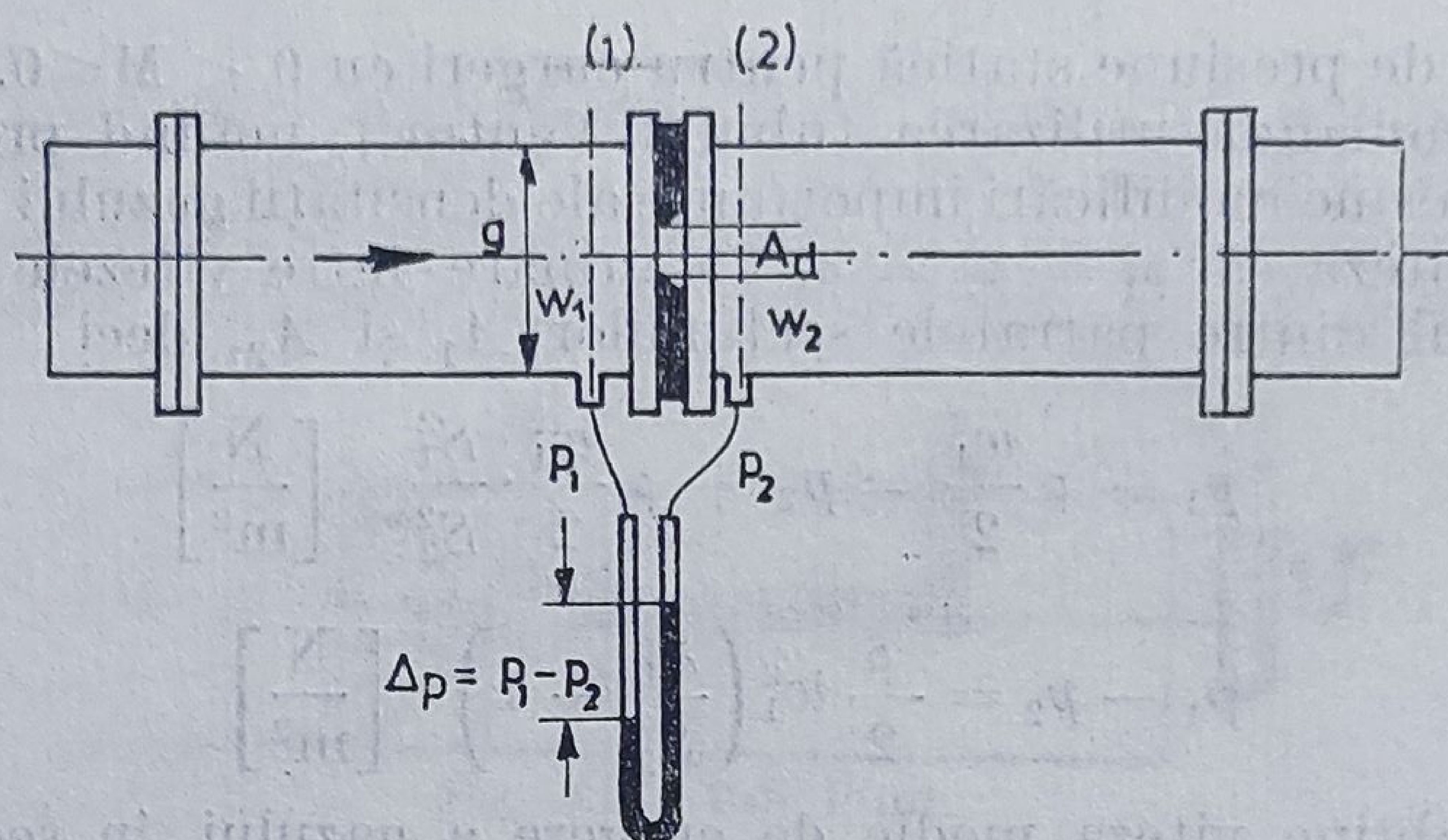


Fig. 3.29. Diafragmă.

1 și *2* nu mai pot fi neglijate ca în cazurile descrise pînă acum și ca urmare ecuația lui Bernoulli capătă forma $p_{01} = p_{02} + \Delta p_0$.

Deoarece pierderile de presiune Δp_0 depind de un număr mare de factori (tehnologici și gazodinamici, se recomandă utilizarea unui coeficient de contracție, similar celui folosit în cazul ajutajului Venturi și ale cărei valori, pentru rapoartele S_d/S uzuale, variază între $0{,}6 \leqslant \varphi \leqslant 0{,}62$. Calculul vitezei medii de curgere se face, ca în cazul precedent, cu relația

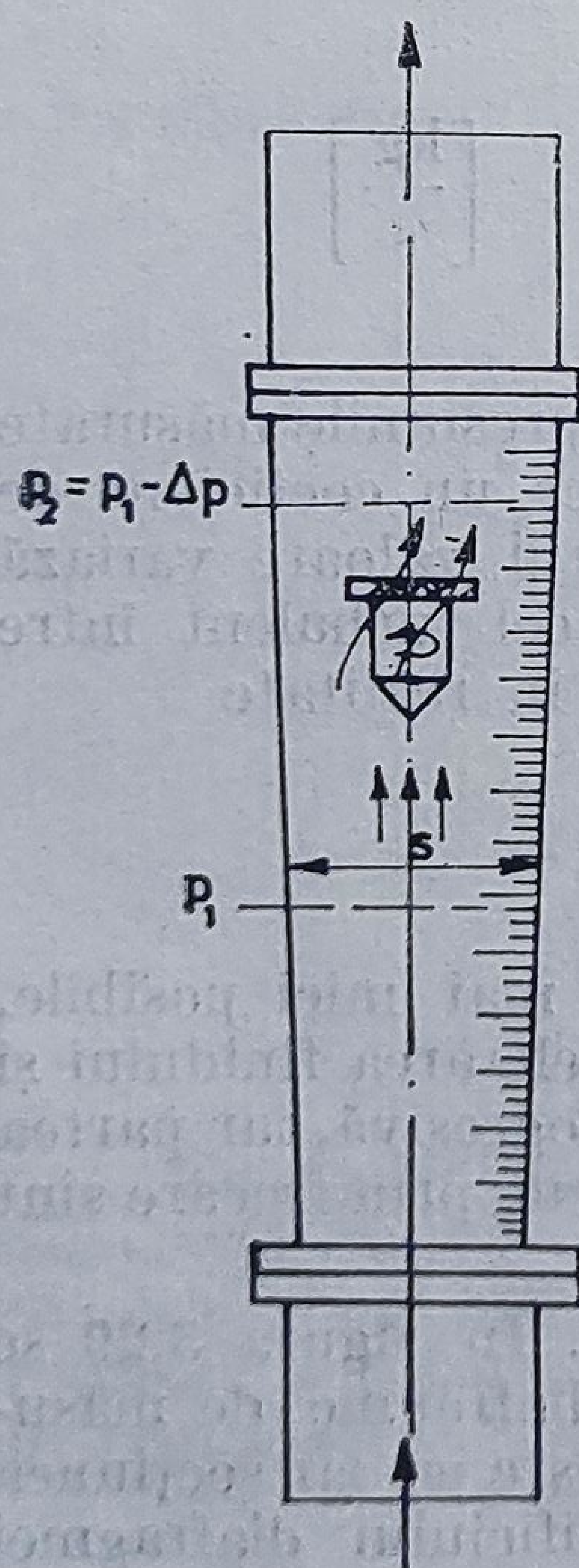


Fig. 3.30. Rotametru.

$$w_1 = \varphi \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\frac{A^2}{A_d^2} - 1\right]}} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

iar debitul masic

$$\dot{m} = A \cdot w_1 \cdot \rho \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right].$$

Pentru ca indicațiile diafragmei să fie cît mai exacte, este necesar ca muchia ascuțită la 45° să fie așezată spre amontele curgerii.

Rotametrul. Principiul dispozitivului se bazează pe trecerea gazului printr-o diafragmă a cărei secțiune de trecere este continuu variabilă. În figura 3.30 este prezentată o secțiune principială printr-un rotametru. Rotametrul indică debitul de gaz prin citirea directă pe diviziunile gra-

date trasate pe un tub transparent, cu o conicitate redusă, în interiorul căruia se mişcă un corp solid în mişcare de rotaţie. Diferenţa de presiune $\Delta p = p_1 - p_2$ ce domneşte între amontele (p_1) şi avalul (p_2) corpului este în general constantă indiferent de poziţia corpului plutitor în lungul tubului, ea fiind funcţie de greutatea lui. Ca urmare, debitul poate fi exprimat prin aceeaşi relaţie ca în cazurile precedente şi anume:

$$\dot{m} = \varphi A \rho \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \left[\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right]}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]$$

în care A_1 este secţiunea tubului cilindric transparent şi A_2 secţiunea liberă de curgere a gazului prin spaţiul dintre plutitor şi tub. Ca urmare debitul este dat de înălţimea la care se află plutitorul, deoarece pentru $\Delta p = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$; $\rho = \text{const.}$, debitul este dat de raportul A_1^2/A_2^2 care este continuu variabil. De obicei indicaţiile debitului sînt trasate direct pe tubul transparent prin etalonare experimentală.

3.14. PIERDERILE DE PRESIUNE LA CURGEREA UNUI GAZ PRINTR-UN CANAL CU SECŢIUNE VARIABILĂ

Ecuaţia cantităţii de mişcare pentru curgerea unui gaz fără frecare şi fără efectuare de lucru mecanic exterior are forma (2.28):

$$dp = -\rho w dw; \quad p_2 - p_1 = \rho_1 w_1 (w_1 - w_2)$$

sau forma generală

$$p + \rho w^2 = \text{const.}$$

Ca urmare, curgerea unui gaz printr-un canal cu secţiune variabilă va avea loc cu pierderi de presiune, chiar dacă se acceptă ipoteza că lucrul mecanic de frecare este nul. Aceste pierderi de presiune se datoresc faptului că în timpul curgerii au apărut accelerări sau decelerări ale curentului de gaz, care au dus la variaţia vitezei de curgere.

Variaţia vitezei de curgere a gazului în lungul canalului poate apare fie ca urmare a schimbului de căldură al lui cu mediul exterior (în acest caz curgerea este însoţită de o transformare termodinamică oarecare) fie ca urmare a variaţiei secţiunii de curgere oferită gazului.

Ca exemplu se consideră curgerea unui gaz printr-un canal de secţiune constantă. Neglijînd lucrul mecanic de frecare şi considerînd procesul izoterm ($\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const}$), presiunea frînată a gazului în curgere p_0 fiind constantă în orice secţiune, ($p_{01} = p_{02}$) se obţine

$$p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2}$$

În cazul cînd curgerea are loc fără respectarea condiției $w_1 = w_2$, de exemplu în cazul încălzirii sau răcirii gazului densitatea lui se va modifica și, ca urmare, debitul masic fiind constant ($\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$), viteza w_2 va crește, devenind $w_2 > w_1$. După cum se vede din relația de mai sus p_1 va fi egal cu p_2 numai dacă $w_1 = w_2$. În acest caz, condiția nefiind satisfăcută, va apărea o pierdere de presiune statică.

Se explică astfel motivul pentru care curgerea gazelor prin canalele de palete ale turbomașinilor trebuie să se facă cu viteză constantă; ca urmare secțiunea de curgere oferită trebuie să fie astfel aleasă încît să satisfacă condiția egalității vitezei de curgere.

În cazul măririi sau micșorării secțiunii de curgere (prezenței de vane, ventile, camere colectoare, canale de admisie sau refulare cu secțiuni diferite etc.) va aparea o variație a vitezei de curgere și în consecință va apare o pierdere de presiune. De aceste pierderi trebuie să se țină seamă, deoarece ele reprezintă în fond o pierdere energetică, de exemplu un consum de lucru mecanic cerut de turbosuflantele ce asigură vehicularea gazelor, sau pierderi de energie potențială transformabilă în lucru mecanic în turbomașini, etc.

Pentru exemplificare se consideră cazul general al curgerii unui gaz printr-un canal oarecare, în care are loc la un moment dat o variație a vitezei de curgere între două secțiuni oarecari, fie ca urmare a unui schimb de căldură cu pereții canalului, fie ca urmare a variației de secțiune. În absența frecărilor, pierderea de presiune va fi dată de diferența presiunilor frînate:

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02}$$

în care

$$p_{01} = p_1 + \rho_1 \frac{w_1^2}{2}; \quad p_{02} = p_2 + \rho_2 \frac{w_2^2}{2}$$

Deci:

$$\Delta p_0 = \left(p_1 + \rho_1 \frac{w_1^2}{2}\right) - \left(p_2 + \rho_2 \frac{w_2^2}{2}\right) \tag{3.113}$$

Valorile presiunilor momentane (considerate valori medii în secțiune) nefiind cunoscute, relația conține două necunoscute.

A doua ecuație aplicabilă curgerii este ecuația cantității de mișcare, scrisă sub forma

$$p_1 - p_2 = \rho_1 w_2 (w_2 - w_1)$$

Deci

$$\Delta p_0 = (p_1 - p_2) + \left(\rho_1 \frac{w_1^2}{2} - \rho_2 \frac{w_2^2}{2}\right)$$

$$\Delta p_0 = \rho_1 w_2 (w_2 - w_1) + \left(\rho_1 \frac{w_1^2}{2} - \rho_2 \frac{w_2^2}{2}\right) \tag{3.114}$$

Cunoscîndu-se densitățile ρ_1 și ρ_2, precum și vitezele w_1 și w_2, din condiția $\rho w =$ const. în cazul cînd variația lui w are loc ca urmare a schimbului de căldură gaz-pereți, fie din condiția $A_1 w_1 = A_2 w_2$ în cazul cînd variația de viteză se datorește variației secțiunii, se poate determina cu relația de mai sus pierderea de presiune între secțiunile *1* și *2*.

De exemplu, în cazul unei curgeri adiabate printr-un canal cu secțiune variabilă, calculul pierderilor de presiune se efectuează în modul următor. Se consideră mărirea bruscă a secțiunii de curgere, așa cum se vede în figura 3.31. Secțiunea *2* se alege în imediata apropiere a conductei de secțiune A_1 și, ca urmare, se consideră că vîna de curent are aceeași secțiune, deci viteza de curgere $w_2 = w_1$ (evazarea liniilor de curent și umplerea secțiunii A_2 avînd loc în secțiunea *3*).

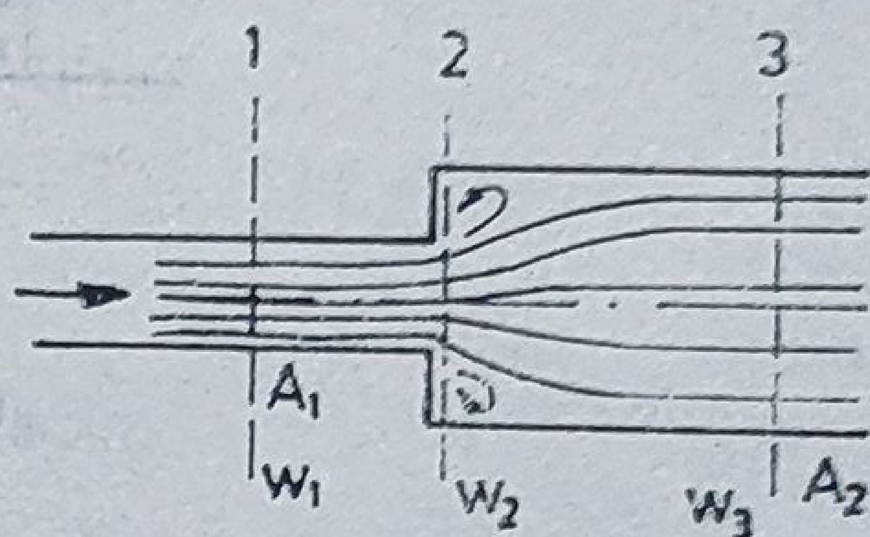


Fig. 3.31. Lărgire bruscă de secțiune la o conductă.

Deoarece procesul are loc adiabat, iar A_2/A_1 nu are valori mari, variația de presiune momentană este mică și ca urmare se poate considera că $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$. Din ecuația de continuitate pentru $\rho =$ const. se obține

$$A_1 \cdot w_1 = A_1 \cdot w_2 = A_2 \cdot w_3$$

în care

$$w_1 = w_2\,;\; w_3 = \frac{A_1}{A_2} w_1$$

Deoarece $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$ și $w_1 = w_2$, se obține egalitatea presiunilor momentane $p_1 = p_2$ în ipoteza că lucrul mecanic de frecare este egal cu zero.

3.15 REACȚIUNILE ÎN COTURILE CONDUCTELOR PENTRU TRANSPORTUL GAZELOR

Se consideră o conductă de gaze (figura 3.32) care la un moment dat își schimbă direcția făcînd un cot. În el vor apărea eforturi mecanice datorate forțelor F_x și F_y care trebuie să fie preluate de reazeme. Reazemul conductei va trebui să fie astfel calculat încît să preia forțele dirijate în direcția x și y anume F_x și F_y. Se notează cu p_1 și p_2 presiunile momentane medii ale fluidului și cu w_1 și w_2 vitezele medii în secțiunile *1* și *2*, ale căror suprafețe sînt A_1 și A_2. Forțele F_x și F_y sînt componente ale forței exercitate de gazul în curgere asupra peretelui conductei. Se notează cu $R_x = -F_x$ și $R_y = -F_y$ reacțiile conductei (respectiv a reazemului) asupra gazului. Considerînd curgerea adiabată, iar secțiunile *1* și *2* în imediata vecinătate a cotului și neglijînd lucrul mecanic de frecare, se poate accepta egalitatea $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Ca urmare, ecuația de continuitate și ecuația lui Bernoulli au formele

$$A_1 w_1 \rho = A_2 w_2 \rho; \quad p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2}$$

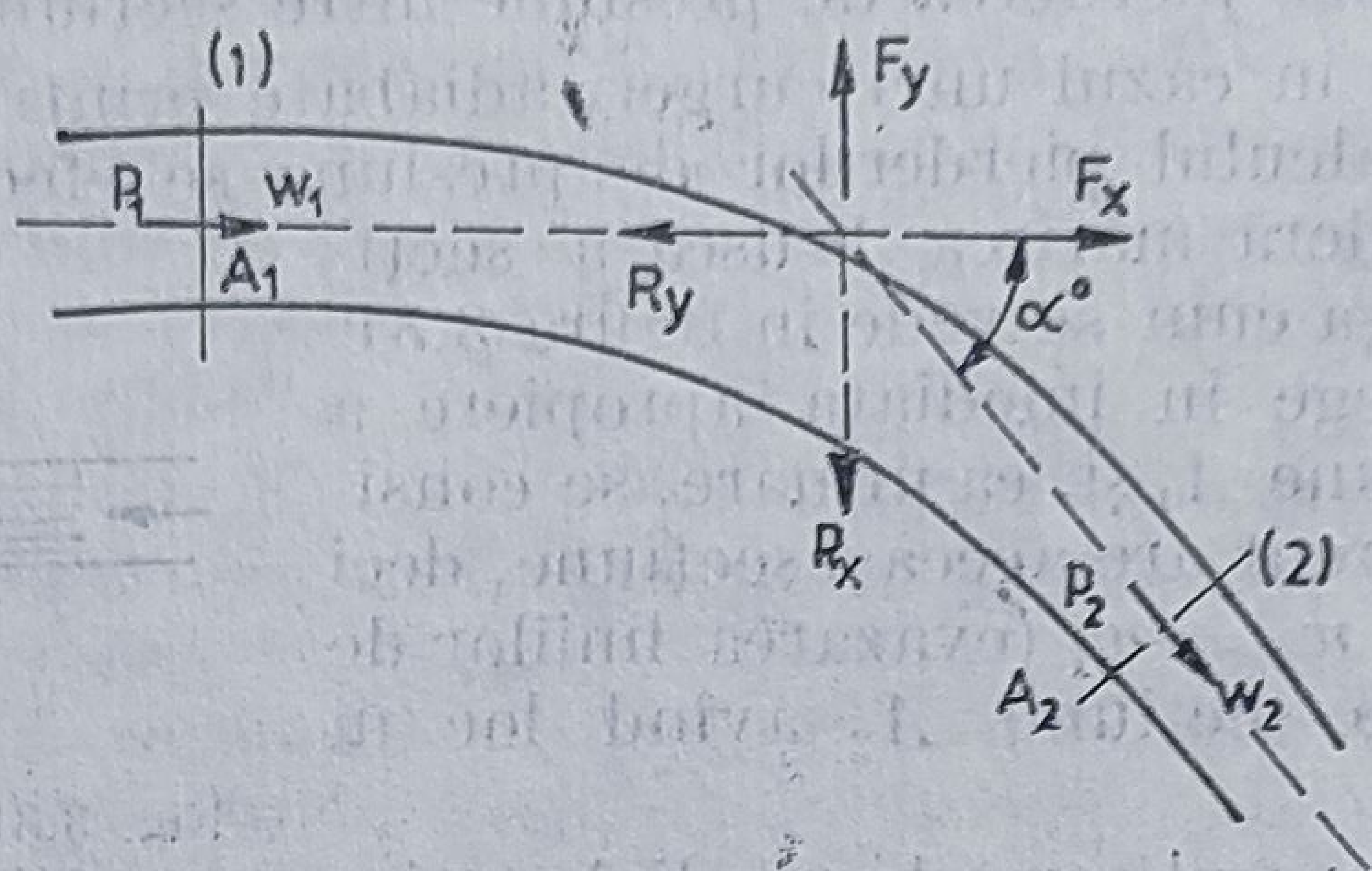


Fig. 3.32. Forțele ce apar într-o conductă curbă.

Ecuația cantității de mișcare permite determinarea componentelor forței ce acționează asupra peretelui conductei între secțiunile *1* și *2*, după direcția x și y și anume:

$$F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \alpha - R_x = \rho \dot{m}(w_2 \cos \alpha - w_1) \qquad (3.115)$$

$$F_y = - p_2 A_2 \sin \alpha + R_y = \rho \dot{m} w_2 \sin \alpha \qquad (3.116)$$

De unde se pot determina reacțiunile din reazeme:

$$R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \alpha + \rho \dot{m}(w_1 - w_2 \cos \alpha)$$

$$R_y = p_2 A_2 \sin \alpha + \rho \dot{m} w_2 \sin \alpha$$

3.16. CALCULUL UNUI EJECTOR CU GAZE PERFECTE

În figura 3.33 este reprezentat schematic un ejector ce lucrează cu agenți motor și aspirat gaze perfecte. Se notează cu $\dot{m}_1$ debitul masic al gazului motor și cu $\dot{m}_2 - \dot{m}_1$ cel aspirat.

Impulsul fluidului motor între secțiunile 0 și 3 este $I_1 = \dot{m}_1(w_3 - w_1)$

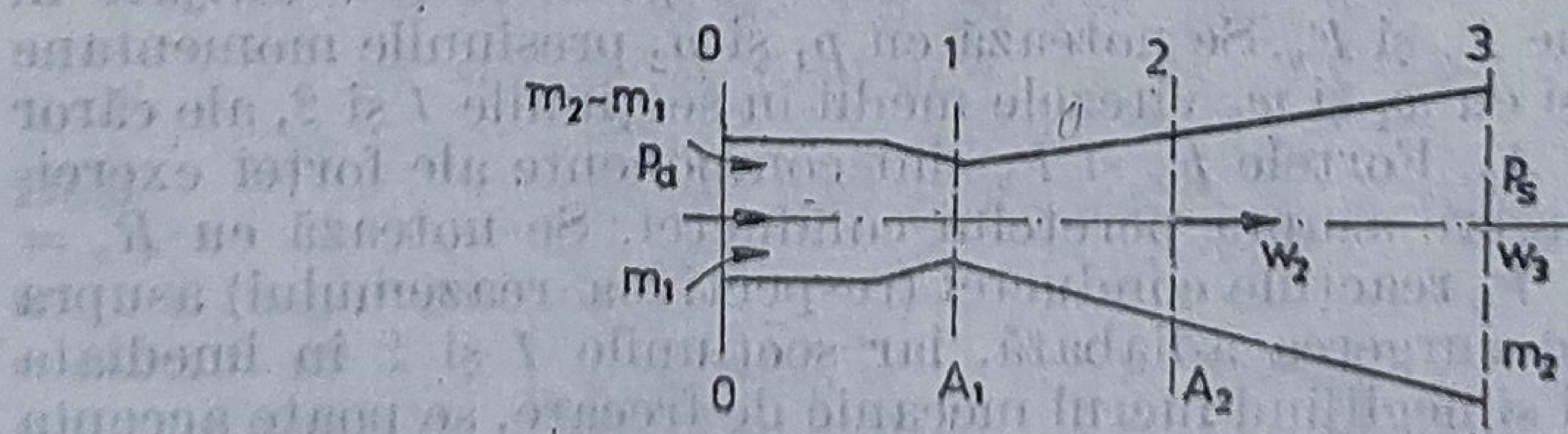


Fig. 3.33. Ejector de gaze.

Impulsul necesar pentru ca masa de gaz aspirat $(m_2 - m_1)$ să treacă de la viteza zero la viteza w_3 va fi:

$$I_2 = -(\dot{m}_2 - \dot{m}_1)(w_3 - 0) = -(\dot{m}_2 - \dot{m}_1)w_3$$

Impulsul motor este consumat pentru impulsul de antrenare, deci $I_1 = I_2$ și, ca urmare

$$\dot{m}_2 w_3 = \dot{m}_1 w_1 \rightarrow \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = \frac{w_1}{w_3}$$

Din ecuația de continuitate se obține

$$\dot{m}_1 = A_1 w_1 \rho_1; \quad \dot{m}_2 = A_3 w_3 \rho_3$$

Deci: $$\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = \frac{A_3 \cdot w_3 \cdot \rho_3}{A_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1}$$

Dar $$\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = \frac{w_1}{w_3}$$

și ca urmare $$\frac{w_1}{w_3} = \frac{A_3 \cdot w_3 \cdot \rho_3}{A_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1}$$

de unde se obține raportul

$$\frac{w_1}{w_3} = \sqrt{\frac{A_3 \rho_3}{A_1 \rho_1}}$$

Ca urmare $$\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = \sqrt{\frac{A_3 \cdot \rho_3}{A_1 \cdot \rho_1}}$$

sau pentru secțiuni cilindrice cu diametrele d_1 și d_3

$$\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = \frac{d_3}{d_1} \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}}.$$

Pentru determinarea pierderilor de presiune în ejector, se notează cu p_a presiunea gazului aspirat și cu p_1 presiunea gazului motor în secțiunea 0.

Ecuația presiunii frînate în secțiunea (0) este

— pentru gazul motor: $$p_{01} = p_1 + \rho_1 \frac{w_1^2}{2} \quad (3.117)$$

— pentru gazul aspirat: $$p_{0a} = p_a + \rho_2 \frac{w_a^2}{2} \quad (3.118)$$

Se consideră că în secțiunea (2) cele două gaze sînt complet amestecate și ca urmare ecuația de continuitate scrisă pentru secțiunile (0) și (2) este

$$\rho_1 w_1 A_1 + \rho_a w_a A_s = \rho_m w_2 A_2$$

Considerînd natura gazului motor identică cu a celui aspirat (amîndouă considerate gaze perfecte) se acceptă (pentru simplificare) $\rho_1 = \rho_a = \rho_m$. Viteza w_2 este atunci

$$w_2 = w_1 \frac{A_1}{A_2} + w_a \frac{A_a}{A_2} \tag{3.119}$$

Ecuația variației cantității de mișcare între secțiunile (0) și (2) are forma :

$$(p_1 - p_2)A_2 = \rho_m w_2^2 A_2 - \rho_1 w^2 A_1 - \rho_a w_a^2 A_a$$

sau (pentru $\rho = \text{const.}$)

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = w_2^2 - w_1^2 \frac{A_1}{A_2} - w_a^2 \frac{A_a}{A_2} \tag{3.120}$$

iar ecuația conservării energiei scrisă între secțiunile (2) și (3) unde se consideră $w_3 = 0$ este

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + 0 + l_{2-3} = p_{03} + l_{2,3}$$

unde $l_{2,3}$ este pierderea de energie între secțiunile (2) și (3) (difuzorul ejectorului), iar p_{03} este presiunea frînată a amestecului la ieșirea din difuzor dat de

$$p_{03} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} - l_{2,3} \tag{3.121}$$

Dacă presiunile p_{03}, p_a, p_1 și cele trei suprafețe A_1, A_a și A_2 sînt date prin condițiile de funcționare și constructive ale ejectorului, sau alese prin proiect, vor rămîne ca necunoscute vitezele w_a, w_1, w_2 și presiunile p_1 și p_2, de mai sus, deci 5 necunoscute pentru care se dispune de cele 5 ecuații notate (3.17)...(3.21).

4. METODE DE STUDIERE A PROCESELOR TERMOGAZODINAMICE. ANALIZA DIMENSIONALĂ; SIMILITUDINEA; STRATUL LIMITĂ DINAMIC ȘI TERMIC

Analiza unui proces termogazodinamic se poate face fie analitico-experimental prin metoda similitudinii, fie numai analitic, prin metoda stratului limită dinamic și termic.

Analiza dimensională a rezultat prin extinderea noțiunilor de asemănare geometrică și de independență a valorilor unei funcții față de sistemul unităților de măsură adoptat. Această extindere a fost folosită de Newton și Mariotte, iar Fourier a formulat legea omogenității dimensionale a unei funcții și a fundamentat teoria analizei dimensionale.

Ca primă etapă în aplicarea analizei dimensionale se poate menționa stabilirea mărimilor fizice care intervin în fenomenul studiat. Dacă în funcția care descrie fenomenul se introduc și alte mărimi care nu intervin direct, complexitatea ecuației finale va crește mult, iar determinarea ulterioară a legăturii între valorile acestor mărimi va fi îngreuiată. Dacă, dimpotrivă, se omit mărimi care influențează fenomenul, rezultatul obținut este incomplet sau eronat.

Formularea rațională a unui fenomen fizic impune — din punctul de vedere al analizei dimensionale — cunoașterea mărimilor fizice care determină fenomenul. Conform *metodei Rayleigh* fenomenul fizic studiat se poate considera ca fiind proporțional cu un produs de putere al mărimilor determinante. Din condiția omogentății dimensionale a ambilor membri ai egalității rezultă un sistem de ecuații, ale cărui soluții reprezintă exponenții mărimilor fizice. Această metodă se aplică ușor cînd fenomenul fizic studiat cuprinde pînă la cinci sau șase mărimi fizice; în cazul cînd numărul mărimilor fizice de care depinde fenomenul este mai mare decît numărul mărimilor fundamentale, în expresia finală vor apărea o serie de mărimi complexe adimensionale, al căror număr este egal cu diferența între mărimile care definesc fenomenul și cele fundamentale.

4.1. TEOREMA π

Un fenomen fizic oarecare poate fi exprimat printr-o funcție implicită de mai multe mărimi:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_k, B_{k+1}, \ldots, B_n) = 0 \qquad (4.1)$$

în care $A_1, A_2, \ldots, A_k$ reprezintă mărimile fundamentale, iar $B_{k+1}, \ldots, B_n$ — mărimi derivate.

Fenomenul fizic existînd independent de conştiinţa oamenilor, rezultă că forma funcţiei trebuie să fie dimensional omogenă, adică să nu depindă de sistemul de unităţi adoptat.

Adoptînd pentru mărimile fundamentale unităţile de măsură $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, iar pentru cele derivate $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_k$, ecuaţia de mai sus se poate scrie sub forma:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n) = 0 \tag{4.2}$$

în care $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ reprezintă valorile numerice ale mărimilor fizice $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_{k+1}, \ldots, B_n$, date de relaţiile

$$a_1 = \frac{A_1}{|\alpha_1|}\ ;\ a_2 = \frac{A_2}{|\alpha_2|}\ ;\ b_{k+1} = \frac{B_{k+1}}{|\beta_{k+1}|}\ ;\ b_n = \frac{B_n}{|\beta_n|}$$

Unităţile de măsură ale mărimilor derivate se exprimă dimensional prin produsul puterilor dimensiunilor unităţilor fundamentale, adică

$$\left.\begin{aligned} \beta_{k+1} &= \alpha_1^{m_1}, \ldots \alpha_k^{m_k} = \prod_{i=1}^{k} \alpha_i^{m_i} \\ &\vdots \\ \beta_m &= \alpha_1^{p_1}, \ldots \alpha_k^{p_k} = \prod_{i=1}^{k} \alpha_i^{p_i} \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (4.3), mărimile fizice derivate se pot scrie sub forma:

$$B_{k+1} = |b_{k+1}| \prod_{i=1}^{k} \alpha_i^{m_i} \tag{4.4}$$

Dacă unităţile de măsură pentru mărimile fundamentale sînt $\frac{\alpha_1}{c_1}, \ldots \frac{\alpha_k}{c_k}$, care sînt de $c_1, \ldots, c_k$ ori mai mici decît primele unităţi, expresia (4.4) devine

$$B_{k+1} = |b'_{k+1}| \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_i}{c_i}\right)^{m_i} \tag{4.5}$$

şi prin egalarea expresiilor (4.4) şi (4.5), rezultă

$$|b'_{k+1}| = |b_{k+1}| \prod_{i=1}^{k} c_i^{m_i}. \tag{4.6}$$

Analog:

$$|b'_n| = |b_n| \prod_{i=1}^{k} c_i^{p_i} \tag{4.7}$$

Folosind aceste rezultate, ecuaţia (4.2) prezintă forma

$$f_1\left(c_1 a_1, \ldots, c_k a_k, b_{k+1} \prod_{i=1}^{k} c_i^{m_i}, \ldots, b_n \prod_{i=1}^{k} c_i^{p_i}\right) = 0 \quad (4.8)$$

Pentru ca funcţia care exprimă fenomenul fizic să fie dimensional omogenă, trebuie eliminate constantele $c_1, c_2, \ldots, c_k$; în acest sens primele k argumente ale ecuaţiei (4.8) se egalează fie cu cîte o constantă, fie — pentru simplificarea calculelor — cu unitatea (dimensională), deci :

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 \quad a_1 = 1 & c_1 = \dfrac{1}{a_1} \\ \vdots & \\ c_k \quad a_k = 1 & c_k = \dfrac{1}{a_k} \end{array}\right\} \quad (4.9)$$

Prin introducerea acestor rezultate în ecuaţia (4.8), se obţine

$$f_1\left(1, \ldots 1, \frac{b_{k+1}}{\prod_{i=1}^{k} a_i^{m_i}}, \ldots, \frac{b_n}{\prod_{i=1}^{k} a_i^{p_i}}\right) = 0 \quad (4.10)$$

sau cu notaţiile

$$\pi_1 = \frac{b_{k+1}}{\prod_{i=1}^{k} a_i^{m_i}}, \ldots \pi_{n-k} = \frac{b_n}{\prod_{i=1}^{k} a_i^{p_i}} \quad (4.11)$$

rezultă

$$f_1(1, \ldots 1, \pi_1, \ldots, \pi_{n-k}) = 0$$

sau

$$\varphi(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}) = 0 \quad (4.12)$$

Rapoartele de forma π prezentate în expresia (4.11) sînt adimensionale, ceea ce arată că ecuaţia care exprimă un fenomen fizic oarecare poate fi adusă întotdeauna la o formă adimensională a unei funcţii de mărimi complexe adimensionale.

Pe baza celor prezentate, rezultă că teorema π enunţată pentru prima dată de Buckingham arată că dacă o funcţie de mai multe mărimi fizice este dimensional omogenă, ea poate fi redusă întotdeauna la o funcţie de un număr mai mic de variabile adimensionale. După Buckingham numărul complecşilor adimensionali este egal cu numărul n al variabilelor minus numărul k al mărimilor fundamentale. Bridgman a atras atenţia, încă din anul 1922, că această regulă de calcul nu este generală, valabilitatea limitată rezultînd din acceptarea unui număr de mărimi fundamentale pentru

fenomen egal cu numărul mărimilor fundamentale ale sistemului de unități de măsură adoptat.

Mărimile fundamentale pentru fenomenul fizic studiat trebuie să îndeplinească următoarele condiții :

— să fie independente dimensional ;
— dimensiunile să fie exprimarea tuturor mărimilor derivate de care depinde fenomenul.

Pentru a arăta modul în care se dezvoltă acest calcul, se consideră un fenomen oarecare, de exemplu accelerarea unui fluid cu ajutorul unui ventilator.

Forța axială ce ia naștere în paletele rotorului F este o funcție de viscozitatea dinamică a fluidului, densitate ρ, turație n, diametrul rotorului d, accelerația gravitațională g. Raportul adimensional π este

$$\pi = F^{x_1} \eta^{x_2} \rho^{x_3} n^{x_4} d^{x_5} g^{x_6} \tag{4.13}$$

iar ecuația de dimensiuni

$$[\pi] = \left(\frac{\text{kg } m}{s^2}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{kg}{ms}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^{x_3} \cdot \left(\frac{1}{\text{s}}\right)^{x_4} \cdot (m)^{x_5} \cdot \left(\frac{\text{m}}{s^2}\right)^{x_6} \tag{4.14}$$

sau

$$[\pi] = \text{kg}^{x_1+x_2+x_3}\, \text{m}^{x_1-x_2-3x_3+x_5+x_6}\, \text{s}^{-2x_1-x_2-x_4-2x_6} \tag{4.15}$$

Deoarece raportul π este adimensional, rezultă

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 + x_6 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_4 - 2x_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

Dispunem astfel de un sistem de 3 ecuații cu 6 necunoscute, astfel că rezolvarea acestor ecuații liniare omogene se face căutînd în matricea dimensională a variabilelor

$$\begin{array}{c} \\ \text{kg} \\ \text{m} \\ \text{s} \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{kg} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{m} & 1 & -1 & -3 & +0 & 1 & 1 \\ \text{s} & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{matrix} \tag{4.17}$$

un minor de ordinul trei diferit de zero ; acesta este :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \tag{4.18}$$

Necunoscutele principale sînt deci x_2, x_3 și x_4, astfel că dacă sistemul de ecuații se rescrie evidențiind aceste necunoscute, se obține :

$$\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= -x_1 \\ x_2 + 3x_3 &= x_1 + x_5 + x_6 \\ x_2 + x_4 &= -2x_1 - 2x_6 \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații, rezultă

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_5 + x_6}{2} - 2x_1 \\ x_3 &= x_1 + \frac{x_5 + x_6}{2} \\ x_4 &= -\frac{5x_6 + x_5}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Adoptînd pentru necunoscutele x_1, x_5 și x_6, în raport cu care s-a făcut rezolvarea, valori arbitrare, se obține

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{4.21}$$

Prin înlocuirea acestor valori rezultă :

$$\begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}, \tag{4.22}$$

iar matricea soluțiilor este

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\left\Vert \begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{matrix} \right\Vert \tag{4.23}$$

Adoptînd grupul de soluții $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, singurul care permite calculul forței axiale de împingere a rotorului, se obține :

$$k = F\eta^{-2}\rho \qquad \text{sau} \qquad F = k\eta^2 \frac{1}{\rho}$$

unde constanta k se determină experimental.

4.2. CRITERII DE SIMILITUDINE

Fenomenele fizice pot fi studiate atît pe cale teoretică cît și experimentală. Experimentările pot fi făcute direct pe obiect—realizat în mărime naturală — sau în laborator, pe modele. Cercetările pe model sînt întreprinse numai în cazul cînd calculele teoretice nu sînt posibile sau cînd informațiile dorite nu pot fi obținute pe cale teoretică ; oricum înainte de a începe o experimentare pe model este absolut necesară cunoașterea bazelor teoretice ale fenomenului respectiv deoarece în caz contrar nu pot fi interpretate corect rezultatele studiului.

Scara modelului se alege în așa fel ca repartiția valorilor medii ale mărimilor macroscopice, care determină evoluția fenomenului real, să nu prezinte deosebiri importante față de repartiția corespunzătoare pe model și în plus raportul între fenomenul principal și efectele secundare să fie aceleași pe model și în realitate.

Pentru ca fenomenul reprodus pe model să fie identic cu cel din realitate, pe lîngă similitudinea geometrică mai este necesară realizarea similitudinii tuturor mărimilor fizice care intră în structura fenomenului studiat. Aceasta arată că pentru fiecare pereche de puncte omoloage, la momente egale, raportul între valoarea unei mărimi referitoare la model și realitate trebuie să fie constant, denumit *raport de similitudine* sau *scara mărimii fizice*.

Alături de aceste scări, similitudinea folosește și o serie de mărimi complexe adimensionale, denumite *criterii de similitudine*, ca de exemplu Re (Reynolds), Nu (Nusselt) Pr (Prandtl), Ne (Newton) etc.

Menținerea constantă a valorilor numerice ale acestor criterii pentru model și realitate constituie proprietatea fundamentală a criteriilor de similitudine. Conform teoremei π, orice funcție de mai multe mărimi fizice, dimensional omogenă, care determină un fenomen fizic oarecare, poate fi redusă totdeauna la o relație între mărimi complexe adimensionale, adică la o relație între criterii de forma f (Re, Nu, Pr, Ne, ...)$= 0$; această expresie se numește *ecuație criterială*.

Similitudinea poate fi *completă* dacă toate criteriile corespunzătoare mărimilor fizice de pe model și din realitate sînt egale ca valoare, sau *parțială*, dacă numai o parte din valorile numerice ale criteriilor de similitudine se mențin constante. De obicei similitudinea completă a unui fenomen este greu de realizat și în consecință anumite criterii de similitudine —

corespunzătoare unor mărimi fizice cu o influenţă secundară asupra fenomenului studiat — pot avea valori diferite. În alte situaţii similitudinea parţială intervine datorită dimensiunilor reduse ale modelului, evoluţia fenomenului putînd fi influenţată de o serie de factori lipsiţi de importanţă pentru modelul real.

Teoria similitudinii prezintă în general două aspecte : unul care se referă la proprietăţile fenomenelor asemenea şi altul cu privire la stabilirea condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească două fenomene pentru ca ele să fie asemenea.

Pentru ca două fenomene să fie asemenea, ele trebuie să prezinte condiţii identice de unicitate prin care un proces devine univoc determinat. Condiţiile de unicitate sînt determinate prin proprietăţile de evoluţie a fiecărui proces şi se compun din :

— proprietăţi geometrice, care caracterizează forma şi dimensiunile corpului sau sistemului în care are loc procesul ;

— parametrii termofizici, care caracterizează proprietăţile mediului şi corpurilor care formează sistemul ;

— condiţii la limită, care caracterizează particularităţile desfăşurării procesului la interfaţa corp-mediu ;

— condiţii iniţiale, care caracterizează particularităţile desfăşurării procesului în timp ;

— interacţiunea între corp şi mediul ambiant.

4.3. ANALIZA PRINCIPALELOR CRITERII DE SIMILITUDINE FOLOSITE ÎN TERMOGAZODINAMICĂ

Criteriul de similitudine Reynolds. Acest criteriu, definit prin expresia $\mathrm{Re} = \dfrac{wl}{\nu}$, are un rol important în termogazodinamică, evidenţiind raportul dintre forţele de inerţie şi de viscozitate. Semnificaţiile mărimilor care intervin sînt : w — viteza medie a fluidului, m/s ; l — lungimea caracteristică, m ; ν — viscozitatea cinematică a fluidului în m²/s.

Forţa de inerţie, obţinută din legea a doua a mecanicii, are expresia

$$F_i = m\,\frac{\mathrm{d}y_v^2}{\mathrm{d}\tau^2} = k\rho l^2 w^2$$

iar forţa de viscozitate, conform ipotezei lui Newton, este

$$F_v = \eta A\,\frac{w}{l} = \nu\rho l w$$

Raportul între forţa de inerţie şi forţa de viscozitate este

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{k\rho l^2 w^2}{\nu\rho l w} = k\,\frac{wl}{\nu} = k \cdot \mathrm{Re}$$

Această relație exprimă proporționalitatea raportului celor două forțe prin criteriul Reynolds. Pe măsură ce valoarea criteriului Re este mai mică, influența viscozității este mai mare, iar pentru numere Re mari, rolul preponderent îl au forțele de inerție.

Criteriul de similitudine Mach. La viteze mici orice fluid poate fi considerat incompresibil; cu creșterea vitezei, influența forțelor elastice se mărește, devenind preponderente la viteze sonice, cînd influența forțelor de viscozitate și de greutate devine neglijabilă.

Raportul forțelor de presiune pentru două elemente de volum cu latura Δl este

$$\frac{\Delta F_{p_1}}{\Delta F_{p_2}} = \frac{E_1 \Delta l_1^2}{E_2 \Delta l_2^2}$$

în care E reprezintă modulul de elasticitate al mediului, care potrivit legii lui Newton este determinat de produsul $E = a^2 \rho$, unde a reprezintă viteza sunetului.

Cum similitudinea forțelor de compresibilitate este realizată simultan cu similitudinea forțelor de inerție, rezultă :

$$\frac{\Delta F_{p_1}}{\Delta F_{p_2}} = \frac{\Delta F_{i_1}}{\Delta F_{i_2}} = \frac{a_1^2 \rho_1 \Delta l_1^2}{a_2^2 \rho_2 \Delta l_2^2} = \frac{\rho_1 \Delta l_1^3 \dfrac{d^2 y_1}{d \tau_1^2}}{\rho_2 \Delta l_2^3 \dfrac{d^2 y_2}{d \tau_2^2}}$$

sau $$\frac{w_1}{a_1} = \frac{w_2}{a_2} = \frac{w}{a} = \mathrm{M}$$

în care w reprezintă viteza medie a fluidului, iar a — viteza sunetului, în fluid, în m/s.

Pentru numere Mach apropiate de zero ($w \ll a$), influența forțelor de compresibilitate este neglijabilă, fluidul putînd fi considerat incompresibil.

Criteriul de similitudine Nusselt. Caracterizează similitudinea transferului de căldură prin suprafața care se găsește la interfața cu un fluid; $\mathrm{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}$. Criteriul Nusselt poate fi considerat ca raportul între fluxul termic transferat prin convecție, caracterizat prin valoarea coeficientului de transfer de căldură convectiv α și fluxul termic transferat prin conducție printr-un strat de grosime l. Semnificațiile mărimilor menționate sînt : α — ceficientul de convecție termică a fluidului, W/m²K ; l — lungimea determinată a schimbului de căldură, m ; λ — conductivitatea termică a fluidului, W/m.K.

Criteriul de similitudine Pèclet. Criteriul Péclet reflectă modul în care fenomenul de transfer de căldură este influențat de viteza de curgere a fluidului, dimensiunile corpului și viteza de variație a temperaturii în curent. Expresia criteriului Péclet este $\mathrm{Pe} = \frac{wl}{a}$, în care w reprezintă

viteza medie a fluidului în m/s ; l — dimensiunea determinantă, m ; a — difuzivitatea termică a fluidului $\left(a = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}\right)$, în m²/s.

Ţinînd seamă de semnificaţia termenilor din expresia criteriului Péclet rezultă că el este proporţional cu raportul între fluxul de căldură convectiv şi cel conductiv. De altfel el rezultă din ecuaţia fundamentală a conducţiei pentru un fluid în mişcare nepermanentă.

Criteriul de similitudine Prandtl. Dacă se compară expresiile criteriilor de similitudine $\mathrm{Re} = \frac{wl}{\nu}$ şi $\mathrm{Pe} = \frac{wl}{a}$, se constată o mare asemănare determinată de identitatea expresiilor de la numărător. Combinarea acestor criterii, conduce la obţinerea criteriului Prandtl, $\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{a}$ în care ν este viscozitatea cinematică a fluidului în m²/s, iar a — difuzivitatea termică, m²/s. Pentru gaze valoarea criteriului Prandtl este apropiată de unitate, iar pentru lichide ajunge la valori de 10^3 sau mai mari. Criteriul de similitudine Prandtl constituie o mărime proporţională cu raportul între intensitatea transferului de substanţă şi de căldură.

Criteriul de similitudine Biot. Între criteriile prezentate, numai criteriul Nusselt constituie o condiţie de asemănare extinsă la limita fluidului, fără însă ca el să aibă o legătură cu proprietăţile fizice ale corpului care delimitează fluidul.

Analiza condiţiilor termice la suprafaţa de separaţie între fluid şi corp pune în evidenţă corespondenţa univocă între gradientul de temperatură al corpului solid şi diferenţa de temperatură între fluid şi corp, exprimată prin ecuaţia

$$\alpha \Delta t = \lambda \mathrm{grad}\, t$$

în care :

α reprezintă coeficientul de convecţie între fluid şi corp, în W/(m²·K) ;
Δt — diferenţa de temperatură între fluid şi corp, în K ;
λ — conductivitatea termică a corpului solid, în W/(m²·K) ;
grad t—gradientul de temperatură, în K/m.

Se constată că această ecuaţie are aceeaşi structură ca şi cea din care rezultă criteriul Nusselt, criteriul Biot prezentînd expresia

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

Diferenţa între expresia criteriului Biot şi Nusselt este aceea că în criteriul Biot intră conductivitatea termică a corpului solid şi nu a fluidului, ca la criteriul Nusselt. De asemenea, este de menţionat că valoarea coeficientului de convecţie α din criteriul Biot intră ca o mărime cunoscută, care se determină cu ajutorul criteriului Nusselt.

Criteriul Biot este proporţional cu raportul între saltul (gradientul) de temperatură în corp şi diferenţa de temperatură între fluid şi corp, el fiind utilizat la determinarea distribuţiei temperaturii într-un corp solid.

Criteriul de similitudine Froude. În cazul unui fluid incompresibil în care rolul determinant îl au forţele de inerţie şi de greutate, expresia $\frac{w^2}{gl}$ este proporţională cu raportul între forţele de inerţie $k\rho w^2 l^2$ şi de greutate $\rho l^3 g$, el purtînd denumirea de criteriul Froude $Fr = \frac{w^2}{gl}$. Criteriul Froude este utilizat totdeauna cînd greutatea fluidului joacă un rol important asupra modului în care are loc mişcarea (de exemplu plutirea navelor, curgerea apei peste un baraj deversor).

Criteriul de similitudine Galilei. Mişcarea liberă a unui fluid se realizează cu o viteză de valoare necunoscută, astfel că criteriile Reynolds şi Froude dependente de această viteză nu pot fi utilizate pentru descrierea acestei mişcări. Eliminarea vitezei rezultă din expresia $Re^2/Fr = \frac{g \cdot l^3}{\nu^2}$, care constituie criteriul Galilei, $Ga = \frac{gl^3}{\nu^2}$.

Criteriul de similitudine Arhimede. Pentru mişcarea liberă a unui fluid, densitatea este o mărime fizică cu rol esenţial. Închiderea expresiei $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, care exprimă neomogenitatea cîmpului de densitate a fluidului, în criteriul de similitudine Galilei duce la criteriul Arhimede, $Ar = \frac{gl^3}{\nu^2}\frac{\Delta\rho}{\rho}$, rezultînd că exprimă raportul între forţa ascensională $gl^3\Delta\rho$ şi de inerţie $\rho w^2 l^2$.

Criteriul de siwilitudine Grashof. Transportul de căldură prin convecţie este legat de curenţii de fluid, care în cazul mişcării libere a fluidelor se realizează numai datorită forţelor gravitaţionale. În cazul cînd variaţia densităţii este determinată de temperatură, din expresia lineară de dependenţă a densităţii fluidului cu temperatura $\rho = \rho_0(1 + \beta\Delta t)$ rezultă că $\beta\Delta t = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ (în care β reprezintă coeficientul de dilatare volumică, iar Δt — diferenţa de temperatură).

Expresia criteriului Grashof, anume $Gr = \frac{gl^3}{\nu^2}\ \beta\Delta t$, este o modificare din punct de vedere termic a criteriului Arhimede.

Criteriul de similitudine Fourier. Criteriul de similitudine Fourier este singurul criteriu în alcătuirea căruia intră timpul, caracterizînd, din acest punct de vedere, procesele de transfer de căldură în regim nepermanent.

Criteriul Fourier, $Fo = \frac{a\tau}{l^2}$, reprezintă deci o mărime proporţională cu raportul între timpul τ caracteristic variaţiei condiţiilor din me-

diul înconjurător și timpul $\frac{l^2}{a}$ care determină variația cîmpului termic al corpului considerat. Din această expresie rezultă că timpul caracteristic variației cîmpului termic al corpului este proporțional cu pătratul dimensiunii determinante l a corpului și invers proporțional cu difuzivitatea termică a. În cazul unui regim permanent, noțiunea de timp dispare și deci criteriul Fourier își pierde importanța.

În tabelul 4.1 sînt prezentate cîteva din criteriile de similitudine, utilizate curent.

Criteriul de similitudine Schmidt. Acest criteriu intervine în cazul fenomenelor de difuzie, atunci cînd transportul de substanță este provocat exclusiv de diferența de concentrație și nu de presiune sau temperatură.

Cantitatea de substanță transportată prin difuzie este proporțională cu expresia $w \cdot l/\mathfrak{D}$ (unde $\mathfrak{D}$ reprezintă coeficientul de difuzie în m^2/s) și raportul față de criteriul Reynolds poartă denumirea de criteriul Schmidt, dat de relația

$$\mathrm{Sc} = \frac{\frac{wl}{\mathfrak{D}}}{\frac{wl}{\nu}} = \frac{\nu}{\mathfrak{D}}$$

Criteriul de similitudine Euler. Atunci cînd forțele de presiune prezintă o valoare importantă față de forțele de inerție, se folosește criteriul Euler, definit ca raportul acestor forțe $\mathrm{Eu} = \Delta p/\rho w^2$ în care Δp reprezintă căderea de presiune, ρ densitatea iar w viteza de deplasare a fluidului.

Stabilirea valorii criteriului Euler este condiționată deci de cunoașterea regimului de presiuni și viteze, deci el nu poate fi calculat decît după determinarea forțelor care acționează asupra curentului de fluid aflat în echilibru dinamic. Rezultă astfel că valoarea criteriului de similitudine Euler nu este independentă, el fiind funcție de criteriul Reynolds, Froude și Schmidt.

În cazul unei mișcări permanente sau atunci cînd forțele masice sînt neglijabile, expresia criteriului Euler se simplifică, el fiind dependent numai de criteriul Reynolds.

De o importanță deosebită este criteriul Euler în cazul proceselor de cavitație, unde Δp se înlocuiește prin diferența $p - p_v$ (unde p_v este presiunea de vaporizare respectivă), dublul criteriului Euler $2(p - p_v)/\rho w^2$ reprezentînd cifra de cavitație.

4.4. REALIZAREA UNUI MODEL SIMIL.

Realizarea unui model simil care să permită studiul experimental al fenomenelor termogazodinamice ce au loc în realitate este prima condiție ce trebuie îndeplinită de cercetător.

Deoarece fenomenele ce au loc pe model trebuie să fie identice calitativ și cantitativ cu cele ce au loc în realitate, modelul trebuie să respecte

Tabelul 4.1

Criterii de similitudine

Denumirea criteriului	Simbol	Relația de calcul	Semnificația fizică (utilizare)
1	2	3	4
Arhimede	Ar	$\frac{gl^3}{\nu^2}\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}$	Forțele gravitaționale/forțele de viscozitate (mișcare liberă)
Biot$_m$	Bi$_m$	$\frac{\alpha l}{\mathfrak{D}}$	Viteza transferului de masă la interfață/viteza transferului de căldură în peretele solid (transfer de masă)
Bagnold	B	$\frac{3c\alpha\rho_g w^2}{4d\rho_p g}$	Forțele ascensionale/forțele gravitaționale (curgere medii bifazice) ρ_p, ρ_g = densitate la temperatura peretelui, respectiv gazului.
Bingham	Bm	$\frac{\tau_y L}{\eta w}$	Tensiunea de curgere/tensiunea datorată viscozității (curgere de tip Bingham) L = lățimea canalului prin care curge fluidul
Biot	Bi	$\frac{\alpha l}{\lambda}$	Rezistența termică internă/rezistența termică la suprafață (transfer de căldură)
Bond	Bo	$\frac{(\rho_g - \rho_l)l^2 \cdot g}{\sigma}$	Forțele gravitaționale/forțele tensiunii superficiale (mișcarea bulelor gazoase în lichid)
Bouguer	Bu	$\frac{3C_p L_{rad}}{4\rho_p R_p}$	(Transferul de căldură prin radiație în curenți de aer cu particule de praf). ρ_p = densitatea prafului R_p = raza medie a particulei de praf; C_p = cantitatea de praf/m³ aer (kg/m³)
Bridgman	Br	$\frac{\eta w^2}{\alpha \Delta t}$	Căldura generată prin frecare/căldura transferată prin convecție (curgeri laminare)
Carbot	Ca	$\frac{T_2 - T_1}{T_2}$	(Cicluri termodinamice) T_1, T_2 temperatura a două surse de căldură
Clausius	Cl	$\frac{w^3 l\rho}{\lambda \Delta t}$	(Transferul de căldură în cugere forțată)
Croco	Cr	$\left[1 + \frac{2}{(k-1)M^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$	Viteza de curgere/viteza maximă de curgere (curgerea fluidelor compresibile)
Dulong	Du	$\frac{w^2}{gc_p \Delta T}$	
Deborah	D	$\frac{\tau_r}{\tau_0}$	Timpul de relaxare/timpul de observare (reologie) τ_r = timpul de relaxare; τ_0 = timpul observare

1	2	3	4
Eckert (Dulong)	E (Du)	$\frac{w^2}{c_p \Delta T}$	(Curgerea fluidelor compresibile)
Euler	Eu	$\frac{p}{\rho w}$	Forțele de presiune/forțele de inerție (frecarea fluidelor la curgerea prin conducte)
Fourier	Fo	$\frac{a\tau}{l^2}$	(transfer de căldură în regim tranzitoriu)
Fourier (de masă)	Fo_m	$\frac{\mathfrak{D}\tau}{l^2}$	(transfer de masă în regim tranzitoriu)
Froude (Boussinesq) (Vedernikov)	Fr (B) (V)	$\frac{w^2}{gl}$	Forțele de inerție/forțele gravitaționale (curgerea fluidelor compresibile)
Galileu	Ga	$\frac{gl^3}{\nu^3}$	Forțele gravitaționale /forțele de viscozitate (curgerea fluidelor viscoase)
Gay-Lussac	Ga	$\frac{1}{\beta \Delta T}$	(dilatarea gazelor)
Grashoff	Gr	$\frac{g\beta l^3 \Delta T}{\nu^2}$	Forțele de perturbație/forțele de viscozitate (schimb de căldură prin convecție liberă)
Graetz	Gz	$\frac{\dot{m} c_p}{\lambda l}$	Capacitatea termică a unui fluid/transferul de căldură prin convecție (curgerea forțată)
Gukhman	Gu	$\frac{t_g - t_{pu}}{t_g}$	(transfer de căldură convectiv prin evaporare în procese izobare-izoterme)
Hooke (Cauchy)	Ho (C)	$\frac{\rho w^2}{E}$	Forțele de inerție/forțele de compresibilitate (curgerea fluidelor compresibile-elasticitatea mediilor în curgere)
Hedstrom	He	$\frac{\tau_y l}{\eta w} \; \frac{wl\rho}{\mu}$ (Bm · Re)	Curgerea fluidelor de tip Bingham (curgere plastică)
Homocronicitate	Ho	$\frac{w \cdot \tau}{l}$	Durata procesului/timpul necesar ca fluidul să parcurgă distanța l, (alegerea rapoartelor de similitudine pentru timp)
Jakob	Ja	$\frac{c_{pl}\rho_l \Delta t}{r\rho_v}$	Raza maximă a bulei de vapori/grosimea filmului de lichid supraîncălzit (fierbere)
Karman	K	$\frac{\rho d^3 \Delta_p/\Delta l}{\eta^2}$	(Curgerea fluidelor prin conducte)
Knudsen	Kn	$\frac{l_0}{l}$	Lungimea drumului liber mijlociu lungimea caracteristică (curgerea gazelor la presiuni scăzute)
Kirpicev	Ki	$\frac{\alpha l}{\lambda . w} \; \frac{\alpha l}{\lambda}$ (Bi · Nu)	Intensitatea schimbului de căldură cu exteriorul/schimbul de căldură intern (transferul de căldură)

1	2	3	4
Kosivici	Ko	$\frac{rm}{c\Delta t}$	Căldura necesară pentru vaporizare/căldură necesară încălzirii (transferul de căldură convectiv în timpul vaporizării unui lichid).
Kutateladze	K	$\frac{r}{c_p(t_l - t_v)}$	(transfer de căldură și masă în timpul vaporizării unui lichid) t_l, t_p = temperatura lichidului și a peretelui
Kapița	Ka	$\frac{\sigma}{g\rho^3\nu^4}$	(curgerea fluidelor viscoase cu frecare)
Kondratiev	Ko	$Nu \cdot Pr_l \frac{Pr_p}{Pr_l}$	(Schimbul de căldură convectiv Pr_p = criteriul Prantdl la temperatura peretelui ; Pr_l = idem la temperatura lichidului
Lagrange	La	$\frac{\mathfrak{D} + E_{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}}$	Viteza (transferului molecular și difuziv/viteza transferului molecular (transferul de masă în mișcarea turbulentă)
Lewis	Le	$\frac{\alpha}{\sigma c_p}$	(transfer de căldură și masă)
Mach (Maiewski) (Sarrau)	M (Ma) (Sa)	$\frac{w}{a}$	Viteza de curgere/viteza de propagare a sunetului (curgerea fluidelor compresibile)
Mondt	Mo	$\frac{\alpha\delta\Delta t_f}{\lambda\Delta t_p}$	Căldura transmisă prin convecție/căldura transmisă prin conducție (transfer de căldură) Δt_f, Δt_p = căderea de temperatură perete-fluid, respectiv interfață perete
Newton	Ne	$\frac{R_f}{\rho w^2 l^2}$	Forțele de frecare/forțele de inerție (frecare în canale)
Nusselt	Nu	$\frac{\alpha l}{\lambda}$	Căldura transmis prin convecție/căldură transmisă prin conducție (transfer de căldură)
Nusselt (de masă)	Nu_m	$\frac{ml}{\mathfrak{D}\Delta C}$	Fluxul de masă total/fluxul specific al difuziei moleculare pentru un strat de grosime 1 (transferul de masă)
Peclet	Pe	$\frac{\rho c_p wl}{\lambda}$ (RePr)	Transferul de căldură total/transferul de căldură conductiv (transferul de căldură)
Peclet (de masă)	Pe_m	$\frac{wl}{D}$	Transferul de căldură total/transferul de masă difuziv (transferul de masă)
Poiseille	P	$\frac{d\Delta p/\Delta l}{\eta w}$	(Curgerea fluidelor în mișcare laminară) $\Delta p/\Delta l$ = pierdere de presiune specifică

Tabelul 4.1 (continuare)

1	2	3	4
Prandtl	Pr	$\frac{c_p \rho \nu}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$	Difuzivitatea momentană/difuzivitate termică (trnsferul de căldură convectiv la mișcarea forțată a fluidului)
Rayleigh	Ra	$\frac{g\beta l^3 \Delta t^3 c_p \cdot \rho^2}{\eta \tau}$ (Gr · Pr)	Forțele de inerție/forțele de tensiune interfață (convecție cobinat-liberă și forțată).
Reech	R	$\frac{1}{Fr}$	Forțele gravitaționale/forțele de inerție (curgerea fluidelor compresibile)
Reynolds	Re	$\frac{w \cdot l}{\nu}$	Forțele de inerție/forțele de viscozitate (curgerea fluidelor)
Smidt	Sc	$\frac{\nu}{\mathfrak{D}}$	Viscozitate cinematică/difuzivitate moleculară (transferul de masă)
Stanton	St	$\frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha}{\rho c_p w}$	Fluxul termic/capacitatea calorică a fluidului (transferul de căldură prin convecție forțată)
Strouhal	Sh	$\frac{l}{w\tau}$	(Curgere în regim nestabilizat)
Scherwood	Sh	$\frac{al}{\mathfrak{D}}$	Difuzivitatea masei/difuzivitatea moleculară (transfer de masă)
Suratman	Su	$\frac{Re^2}{We}$	(dinamica particulelor în suspensie într-un gaz în curgere)
Weber	We	$\frac{w^2 l \cdot \rho}{\sigma}$	

Simboluri utilizate:
a = coeficient de difuzibilitate termică; a = viteza de propagare a sunetului în fluide; c_{pc} = = căldura specifică a picăturilor de lichid; c = căldura specifică; C_p = cantitatea de praf în aer, kg/m^3; $\mathfrak{D}$ = coeficient de difuzie molecular; E = modul de elasticitate; $E_{\mathfrak{D}}$ = coeficient de transfer de masă difuziv; g = accelerația gravitației; $\dot{m}$ = debit masic în kg/h sau kg/s; l_0 — drumul liber mijlociu molecular; l = lungime curentă (caracterisică); L_{rad} = lungimea medie a radiației; m = masă de fluid (kg); Δp = pierderi de presiune; p = presiunea; q = flux termic specific; r = căldura de vaporizare; R_f = forța de frecare, t = temperatura °C; T = temperatura în K; t_g = temperatura gazului; w = viteza curentă; α = coeficientul de convecție; β = coeficientul de dilatare cubică; Δt = diferența de temperatură; δ = grosimea peretelui; λ = conducție termică; η = viscozitatea dinamică; ν = viscozitate cinematică; ρ_v = densitatea vaporilor; ρ_l = densitatea lichidului; ρ = densitatea mediu omogen; σ = tensiune superficială; τ = timp; τ_y = tensiune de frecare în planul y.

toate legile similitudinii. Pentru construirea unui model simil se procedează în felul următor :

1. Se identifică toate ecuaţiile ce guvernează fenomenul din realitate, din punct de vedere gazodinamic, geometric, mecanic, termic etc. Pentru exemplificare se presupune un proces de curgere unidirecţional. Se consideră că ecuaţiile identificate sînt :

— ecuaţia de mişcare Navier-Stockes,
— ecuaţia de transfer a căldurii Newton-Fourier,
— ecuaţia Fourier-Kirchoff.

Deci :

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \rho\left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}\right) = \rho \cdot g(1 - \beta \cdot \Delta t) - $$

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right) \quad (4.24)$$

$$\alpha \cdot \Delta t = - \lambda \frac{dt}{dx}$$

$$\rho c_p \frac{dt}{d\tau} + \rho c_p w \,\mathrm{grad}\, t - \frac{Dp}{d\tau} = \lambda \cdot \nabla^2 t + l_{fr} \quad (4.25)$$

2. Din aceste ecuaţii se obţin criteriile :

— din ecuaţia de mişcare :

$$\mathrm{Sh} = \frac{l}{w\tau}\ ;\ \mathrm{Fr} = \frac{gl}{w^2}\ ;\ \mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho w^2}\ ;\ \mathrm{Re} = \frac{wl}{\nu}\ ;\ \mathrm{Ga} = \frac{l^3 g}{\nu^2}$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{l^3 g \beta \Delta t}{\nu^2}\ ;\ \mathrm{Ar} = \frac{l^3 g \Delta \rho}{\rho \nu^2}$$

Din egalitatea ecuaţiilor Newton-Fourier (convecţie-conducţie) se obţine criteriul Nusselt :

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$$

Din ecuaţia Fourier-Kirchoff, dacă se neglijează termenii $Dp/d\tau$ şi l_{fr}, primul avînd o valoare egală cu zero pentru un regim de curgere permanent stabilizat, iar al doilea o valoare infinit mică, dar iau în schimb în considerare sursele interne de căldură, exprimate de relaţia

$$\dot{m} = \frac{dq_i}{dV}\ ;\ dq_i = \frac{\partial}{\partial \tau}(\vec{r} \rho dV)$$

$$\dot{m} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\rho \vec{r} dV}{dV}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\vec{r} \rho) \quad (4.26)$$

în care $\vec{r}$ este poziţia punctului considerat. Ecuaţia Fourier-Kirchoff pentru model şi realitate capătă atunci forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\rho_1 c_{p_1} t_1) + \vec{w}_1 \frac{\partial}{\partial l_1}(\rho_1 c_{p_1} t_1)\vec{n}_1^0 = \frac{\partial}{\partial l_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial l_1}\right) + \frac{\partial}{\partial l_1}(\rho_1 \cdot r_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2}(\rho_2 c_{p_2} t_2) + w_2 \frac{\partial}{\partial l_2}(\rho_2 c_{p_2} t_2)\vec{n}_2^0 = \frac{\partial}{\partial l_2}\left(\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial l_2}\right) + \frac{\partial}{\partial l_2}(\rho_2 r_2)$$

unde $\vec{n}_1^0$ şi $\vec{n}_2^0$ sînt direcţiile caracteristice. Ţinînd seama de constantele de similitudine şi de legea II-a a similitudinii, din relaţia de mai sus se obţin rapoartele

$$\frac{K_\rho K_{c_p} K_t}{K_\tau} = \frac{K_w K_\rho \cdot K_{c_p} K_t}{K_l} = \frac{K_\lambda K_t}{K_l^2} = \frac{K_r K_\rho}{K_\tau} = 1$$

Din aceste rapoarte se obţin criteriile :

Newton — Ne $= \frac{w\tau}{l}$; Fourier — Fo $= \frac{a\tau}{l^2} = \frac{\lambda\tau}{\rho c_p l^2}$

Péclet — Pe $= \frac{wl}{a}$; Prandtl — Pr $= \frac{\nu}{a}$

Kutateladze — K $= \frac{r}{c_p \cdot \Delta t}$ (r — căldura de vaporizare)

3. Pentru ca două fenomene să fie simile este necesar ca toate criteriile ce au fost obţinute din ecuaţiile fenomenului să aibă aceeaşi valoare pe model şi în realitate.

Pentru exemplificare se consideră că fenomenul studiat este curgerea gazului prin canalele formate de palete mobile ale unei turbine cu gaze. Se cunosc pentru turbina de gaze toate mărimile geometrice ale canalului format de palete, cele termofizice ale gazului, precum şi cele dinamice şi cinematice ale curgerii.

Modelul trebuie să fie astfel construit, iar curgerea şi transferul de căldură să aibă loc pe model în aşa fel încît toate fenomenele termogazodinamice să fie identice cu cele ce au loc în realitate. Această condiţie se îndeplineşte numai dacă valoarea tuturor criteriilor determinate pentru cazul respectiv au aceleaşi valori pe model ca în realitate.

Realizarea modelului sub forma unei machete, numai cu respectarea similitudinii geometrice, va crea imaginea mărită sau micşorată a canalului, dar nu va fi un model simil. Spre exemplu : canalul are în realitate lăţimea/înălţimea = 25/250 mm ; viteza medie de curgere a gazelor corespunzătoare unui $M_1 = 0{,}8$; temperatura medie a gazelor $t_{g_1} = 300°C$. Dacă s-ar recurge la o machetă şi pentru model constanta de similitudine a lungimilor ar fi $K_l = 10$, canalul model va avea dimensiunile de 250/2500 mm. Dacă s-ar păstra aceeaşi constantă de similitudine şi pentru celelalte mărimi, termice, dinamice etc., va rezulta pe model o

viteză de curgere corespunzătoare lui $M_2 = 8$ și o temperatură a gazelor $t_{g_2} = 3000°C$. Dar nici chiar în aceste condiții fenomenele ce vor avea loc pe machetă nu vor fi identice cantitativ și calitativ cu cele ce au loc în turbină, deoarece fenomenele gazodinamice și termice nu sînt exprimate prin ecuații liniare de simplă proporționalitate.

Modelul simil trebuie să îndeplinească însă condiția egalității tuturor criteriilor determinante ale proceselor, adică să fie satisfăcute relațiile:

$$Sh_1 = Sh_2; \quad Fr_1 = Fr_2; \quad Eu_1 = Eu_2; \quad Re_1 = Re_2;$$

$$Ga_1 = Ga_2; \quad Gr_1 = Gr_2; \quad Ar_1 = Ar_2; \quad Nu_1 = Nu_2;$$

$$M_1 = M_2; \quad Ne_1 = Ne_2; \quad Fe_1 = Fe_2; \quad \text{etc.}$$

Condiția de egalitate de mai sus se respectă de la sine prin construcția corectă a modelului, alegerea corespunzătoare a constantelor termofizice ale gazului și a mărimilor caracteristice a curgerii, bazată pe următorul raționament.

Se scriu identitățile criteriale exprimate mai sus în funcție de constantele de asemănare, obținîndu-se identitățile:

$$Sh_1 = \frac{l_1}{w_1 \cdot \sigma_1} = Sh_2 = \frac{l_2}{w_2 \cdot \sigma_2}, \text{ deci } \frac{K_l}{K_w \cdot K_\tau} = 1$$

$$Fr_1 = Fr_2, \text{ deci } \frac{K_g \cdot K_l}{K_w} = 1; \quad Eu_1 = Eu_2, \text{ deci } \frac{K_p}{K_\rho \cdot K_w} = 1$$

. . . .

Deci pentru ca un criteriu de asemănare să aibă aceeași valoare pe model și în realitate este necesar și suficient ca rapoartele constantelor de asemănare corespunzătoare criteriului respectiv să fie egal cu 1. Ca urmare, pentru cele două procese (1) și (2), Re_1 va fi egal cu Re_2, dacă $K_w . K_l / K_\nu = 1$.

Din exemplul prezentat se obțin următoarele 11 constante de asemănare $K_l, K_w, K_\tau, K_p, K_\rho, K_\nu, K_\beta, K_\lambda, K_\alpha, K_{c_p}, K_t$. Ele trebuie să fie rezolvate simultan astfel încît să satisfacă toate cele 12 criterii.

Pentru rezolvare se face apel la tehnica electronică de calcul.

În concluzie, se poate întîmpla ca un model simil care să permită studierea procesului termogazodinamic din canalele de palete ale unei turbine cu gaze să nu aibă nimic comun cu o machetă, deoarece spre exemplu K_ρ poate să aibă o valoare care să ceară curgerea prin canale al unui alt gaz sau fluid decît gazele de ardere, iar K_w poate să aibă o valoare care să ducă la o viteză medie ce ar corespunde lui $M = 0,01$.

Deci similitudinea a două fenomene se rezolvă automat prin construirea corectă a modelului, adică prin determinarea corectă a constantelor de asemănare.

4.5. INTERPRETAREA REZULTATELOR CERCETĂRILOR EXPERIMENTALE PE UN MODEL SIMIL, PRIN ANALIZA DIMENSIONALĂ

După realizarea modelului simil, se efectuează cercetări experimentale care au drept scop punerea în evidenţă a parametrilor ce influenţează procesul studiat. Rezultatele obţinute trebuind să aibă o valabilitate generală pentru grupul de fenomene studiate, este necesar ca să poată fi puse sub forma unei ecuaţii criteriale de tipul

$$f(\mathrm{Re}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Nu}, \mathrm{Ar}, \mathrm{Sh}, \ldots) = 0$$

Pentru aceasta se face apel la analiza dimensională. După cum s-a văzut, principiul analizei dimensionale se bazează pe considerentul că toate mărimile cantitative ale unui proces se pot exprima în funcţie de un număr limitat de mărimi fundamentale. Se consideră de exemplu că aceste mărimi fundamentale sînt masa M lungimea L şi timpul τ. Celelalte mărimi, ca de exemplu viteza, acceleraţia, forţa, cantitatea de mişcare, etc, pot fi considerate mărimi derivate, exprimabile în funcţie de acestea. De exemplu dimensiunea unei forţe este $ML\tau^{-2}$, deci este exprimabilă prin mărimile fundamentale. Se pot de asemenea considera de exemplu ca unităţi fundamentale şi forţa, lungimea şi timpul (F, L, τ), masa fiind pentru acest sistem o mărime derivată cu dimensiunea $F \cdot L^{-1} \cdot \tau^{2}$. În tabelul 4.2 sînt date spre exemplificare unităţile de măsură ale unor

Tabelul 4.2.

Unităţile de măsură ale unor mărimi uzuale

Mărimea derivată	Dimensiunea în sistemul	
	$M \cdot L \cdot \tau$	$F \cdot L \cdot \tau$
Viteza	$L \cdot \tau^{-1}$	—
Viteza unghiulară	τ^{-1}	—
Acceleraţia	$L \cdot \tau^{-2}$	—
Masa	M	$F \cdot \tau^{-2} \cdot L^{-1}$
Forţa	$M \cdot L \cdot \tau^{-2}$	F
Presiunea	$M \cdot L^{-1} \cdot \tau^{-2}$	$F \cdot L$
Lucrul mecanic	$M \cdot L^{2} \cdot \tau^{-2}$	$F \cdot \tau$
Cantitatea de mişcare	$M \cdot L \cdot \tau^{-1}$	$F \cdot L$
Densitatea (ρ)	$M \cdot L^{-3}$	$F \cdot \tau^{2} \cdot L^{-4}$
Masă specifică	$M \cdot L^{-2} \cdot \tau^{-2}$	$F \cdot L^{-3}$
Vicozitate dinamică (μ)	$ML^{-1} \cdot \tau^{-1}$	$F \cdot \tau \cdot L^{-2}$
Viscozitate cinamatică (ν)	$L^{2} \cdot \tau^{-1}$	—

mărimi în cele două sisteme de unități de măsură. La baza analizei dimensionale stă teorema a II-a a similitudinei (teorema π), bazată pe omogenitatea dimensională.

Pentru explicitarea metodei descrise în paragraful 4.2, se dau mai jos cîteva exemple simple.

(a) Studiul pe un model simil a căldurii schimbate de un gaz în curgerea subsonică, cu pereții canalului (determinarea lui α).

Se determină experimental pe modelul simil că fluxul termic schimbat de gaz cu pereții canalului depinde de viteza medie de curgere a fluidului prin canal w; diferența dintre temperatura peretelui și a gazului Δt; proprietățile termofizice ale fluidului; diametrul conductei. Deci calitativ se poate scrie funcția

$$q = f(\Delta t, \lambda, c_p, \rho, \mu, d, w)$$

Se face apel la teorema π. Se aleg 3 unități fundamentale și anume M, L, τ, alegîndu-se 5 mărimi primare, ale căror dimensiuni sînt:

$$\Delta t \to (\theta);\ \lambda \to \left(\frac{q}{L \cdot \tau \cdot \theta}\right);\ \rho \to \left(\frac{M}{L^3}\right);\ d \to (m);\ w \to \left(\frac{L}{\tau}\right)$$

Drept mărimi secundare se aleg q, c_p și μ, deci se obțin 3 rapoarte adimensionale π_1, π_2, π_3 care vor fi

$$\pi_1 = \frac{q}{\Delta t^{a_1} \lambda^{b_1} \rho^{c_1} d^{d_1} w^{e_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{c_p}{\Delta t^{a_2} \lambda^{b_2} \rho^{c_2} d^{d_2} w^{e_2}}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\Delta t^{a_3} \lambda^{b_3} \rho^{c_3} d^{d_3} w^{e_3}}$$

Se rezolvă raportul adimensional π_1 pe baza principiului omogenității dimensionale care spune că dimensiunea numărătorului lui π_1 va trebui să fie egală cu aceea a numitorului lui. Ca urmare trebuie să fie satisfăcută ecuația de dimensiuni:

$$\left[\frac{q}{L^2 \cdot \tau}\right] = [\theta]^{a_1} \cdot \left[\frac{q}{L \cdot \tau \cdot \theta}\right]^{b_1} \left[\frac{M}{L^3}\right]^{c_1} \cdot [L]^{d_1} \cdot \left[\frac{L}{\tau}\right]^{e_1}$$

Suma exponenților pentru fiecare unitate de măsură ale celor două părți ale ecuației trebuie să fie egală. Se obține atunci

— pentru masă $[M] \ldots c_1 = 0$
— pentru cantitatea de căldură $[q] \ldots b_1 = 1$
— pentru temperatură $[\theta] \ldots a_1 - b_1 = 0;\ a_1 = b_1 = 1$
— pentru timp $[\tau] \ldots -b - e_1 = -1;\ e_1 = 0$
— pentru lungime $[L] \ldots -b_1 - 3c_1 + d_1 + e_1 = -2;\ d_1 = -1$

In troducînd valorile obţinute mai sus în expresia lui π_1 se obţine

$$\pi_1 = \frac{q}{\Delta t^1 \lambda^1 \rho^0 d^{-1} w^0} = \frac{qd}{\Delta t \lambda} = \frac{\alpha \Delta t d}{\Delta t \lambda} = \frac{\alpha d}{\lambda} = \mathrm{Nu}$$

S-a considerat că fluxul termic este schimbat de gaz cu peretele numai prin convecţie ($q = \alpha \cdot \Delta t$), ceea ce a permis să se obţină expresia lui π_1 ca fiind criteriul Nusselt. Prin aceeaşi metodă se obţin şi mărimile adimensionale π_2 şi π_3 :

$$\pi_2 = \frac{c_p \rho w d}{\lambda} = \mathrm{Pe} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho w d} = \frac{\nu}{w d} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

Deci funcţia ce exprimă fenomenul va deveni ecuaţia criterială

$$f(\mathrm{Nu}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) = 0$$

Apoi, prin încercări experimentale efectuate pe modelul simil, se va determina forma explicită a funcţiei.

(b) Se cercetează forţa F ce se exercită de un gaz în mişcare asupra unui corp solid înecat în el.

Se constată experimental pe modelul simil că forţa F depinde de: mărimile termofizice ale gazului în curgere; viteza medie de curgere; suprafaţa corpului înecat în gaz. Ecuaţia ce exprimă fenomenul va avea forma:

$$f(F, \rho, \mu, L^2, w) = 0$$

Dimensiunile mărimilor sînt

$$F[\mathrm{ML}/\tau^2]; \ \rho[\mathrm{M}/\mathrm{L}^3]; \ \mu[\mathrm{M}/\mathrm{L}\tau]; \ L[\mathrm{L}]; \ w[\mathrm{L}/\tau]$$

Trebuie alese 3 mărimi principale ($K = 3$) în funcţie de care se va exprima forţa F. Deoarece există mai multe posibilităţi de alegere, vor exista mai multe variante de rezolvare:

Varianta 1. Se aleg mărimile ρ, L, w şi ca urmare se obţin numerele adimensionale

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho^{a_1} w^{b_1} L^{c_1}}; \ \pi_2 = \frac{\mu}{\rho^{a_2} w^{b_2} L^{c_2}}$$

Pe baza aceluiaşi principiu al omogenităţii dimensionale care a fost aplicat în exemplul (1) prezentat mai sus, se obţine: $a_1 = 1$; $b_1 = 2$; $c_1 = 2$; $a_2 = b_2 = c_2 = 1$. Ca urmare π_1 şi π_2 capătă expresiile

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho w^2 L^2}; \ \pi_2 = \frac{\mu}{\rho w L}$$

Expresia π_1 este cunoscută în hidrostatică sub denumirea de *coeficientul forţei de imersiune*, deci:

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho w^2 L^2} = f\left(\frac{\rho w L}{\mu}\right) = f(\mathrm{Re})$$

iar π_2 :

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho w L} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

Deci se obţine

$$f(\pi_1, \pi_2) = f\left(\frac{F}{\rho w^2 L^2}, \frac{\mu}{\rho w L}\right) = f(\mathrm{Re}^m) = 0$$

Varianta 2. Se aleg mărimile μ, L, w ca mărimi principal e, iar ca secundare F şi ρ. Se obţine prin metoda analizei dimensionale :

$$\pi_1 = \frac{F}{\mu^{a_1} w^{b_1} L^{c_1}} = \frac{F}{\mu w L} \; ; \quad \pi_2 = \frac{\rho}{\mu^{a_2} w^{b_2} L^{c_2}} = \frac{\rho w L}{\mu}$$

Deci ecuaţia criterială obţinută şi în acest caz este tot o funcţie numai de criteriul Reynolds.

(c) Determinarea pierderii de presiune la curgerea unui gaz printr-o conductă circulară. Se cunoaşte din mecanica fluidelor că pierderile de presiune la curgerea unui gaz printr-o conductă circulară definită precis geometric şi tehnologic depinde în cea mai mare măsură de valoarea criteriului Re al curgerii respective.

După cum se ştie produsul $\rho . w^2$ al curgerii reprezintă variaţia cantităţii de mişcare la curgerea unui gaz în regim permanent printr-un canal de secţiune constantă egală cu unitatea. Deci acest produs reprezintă fizic forţa de inerţie pe unitatea de suprafaţă . În cazul cînd curentul de gaz se frînează şi ca urmare cantitatea de mişcare pe direcţia de curgere devine nulă, forţa ce se exercită de curent pe unitatea de suprafaţă ce a frînat curentul este chiar produsul $\rho . w^2$ adică $\rho w(w-0) = \rho w^2$.

Pe de altă parte raportul w/L indică gradientul de viteză ce apare în curentul de gaz. De exemplu, la curgerea gazului printr-un canal circular viteza variază în secţiune de la 0, lîngă perete, la o valoare maximă în axa conductei. Ca urmare, raportul w/R (în care R = raza conductei) va indica gradientul de viteză pe axa y, iar raportul $\mu \cdot w/R$ forţele de frecare internă (de viscozitate).

Criteriul Reynolds sub forma

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot w \cdot l}{\mu} = \frac{\rho \cdot w^2}{\dfrac{\mu w}{l}}$$

sugerează că el reprezintă fizic raportul dintre forţele de inerţie (numărătorul) şi forţele de viscozitate (numitorul) în secţiunea considerată. Ca o mare, o creştere a valorii criteriului Re reprezintă fizic o creştere a efectului influenţei inerţiei asupra curgerii, iar o micşorare a lui indică o creştere a influenţei forţelor de viscozitate. Se consideră curgerea unui gaz printr-o conductă cilindrică şi se caută să se determine ecuaţia criterială care să pună în evidenţă pierderea de presiune Δp.

Se constată experimental, pe modelul simil, că pierderea de presiune este o funcție de ρ, μ, w_m, D, L, în care w_m este viteza medie de curgere în secțiune, D diametrul conductei și L lungimea ei. Ecuația fenomenului va avea forma

$$f(\Delta p, \rho, \mu, w_m, D, L) = 0$$

Se aleg drept parametrii principali ρ, w, D iar secundari Δp și L. Mărimile adimensionale π_1, π_2, π_3 vor fi determinate ca mai sus, obținînd

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho^{a_1} \cdot w_m^{b_1} \cdot D^{c_1}}$$

Din condiția omogenității dimensionale se obține:

$$\left[\frac{M}{L \cdot \tau^2}\right] = \left[\frac{M}{L^3}\right]^{a_1} \cdot \left[\frac{L}{\tau}\right]^{b_1} \cdot [L]^{c_1}$$

Se obține $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 0$ și, ca urmare, ecuația care reprezintă pierderea de presiune raportată la forțele de inerție este

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho w_m^2}$$

π_2 capătă forma care reprezintă inversul criteriului Re:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho^{a_2} w_m^{b_2} D^{c_2}}$$

$$\left[\frac{M}{L \cdot \tau}\right] = \left[\frac{M}{L^3}\right]^{a_2} \cdot \left[\frac{L}{\tau}\right]^{b_2} \cdot [L]^{c_2} \rightarrow a_2 = 1;\ b_2 = 1:\ c_2 = 1$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho \cdot w_m \cdot D}$$

Pentru π_3 se obține

$$\pi_3 = \frac{L}{\rho^{a_3} w_m^{b_3} D^{c_3}} \rightarrow a_3 = b_3 = 0;\ c_3 = 1$$

$$\pi_3 = \frac{L}{D}.$$

Deci ecuația devine

$$f\left(\frac{\Delta p}{\rho w_m^2}, \frac{\mu}{\rho w_m D}, \frac{L}{D}\right) = 0$$

$$\frac{\Delta p}{\rho w_m^2} = \frac{L}{D} f(\mathrm{Re}) = c_f \frac{L}{D}$$

în care c_f este coeficientul de frecare și este funcție numai de criteriul Reynolds $[c_f = f(\mathrm{Re})]$

(d) Determinarea parametrilor de care depinde puterea cerută pentru antrenarea unui ventilator. Se consideră o serie de ventilatoare de construcţie geometrică identică. Se notează cu : N — viteza de rotaţie a rotorului; D = diametrul rotorului; $\dot{V}$ = debitul volumetric al lui; P = puterea cerută de la motorul de antrenare; ρ şi μ = densitatea şi viscozitatea gazului vehiculat de ventilator. Se studiază factorii ce influenţează asupra puterii cerute de ventilator, făcînd apel la metoda analizei dimensionale.

Se consideră experimental că puterea cerută de ventilator depinde de

$$f(P, \rho. \mu, N, D, V) = 0$$

Ca mărimi fundamentale se aleg 3 din cele 6 variabile şi anume ρ, N şi D

Mărimile adimensionale π_1, π_2, şi π_3 se obţin prin metoda analizei dimensionale şi anume

$$\pi_1 = \frac{P}{\rho^{a_1} N^{b_1} D^{c_1}} = \frac{P}{\rho N^3 D^5} \rightarrow [a_1 = 1; \ b_1 = 3; c_1 = 5]$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho^{a_2} N^{b_2} D^{c_2}} = \frac{\mu}{\rho N D^2} \rightarrow [a_2 = b_2 = 1; \ c_2 = 2]$$

$$\pi_3 = \frac{V}{\rho^{a_3} N^{b_3} D^{c_3}} = \frac{V}{N D^3} \rightarrow [a_3 = 0; \ b_3 = 1; \ c_3 = 3]$$

Deci funcţia capătă forma

$$f\left(\frac{P}{\rho D^5 N^3}, \frac{\mu}{\rho N D^2}, \frac{\dot{V}}{N D}\right) = 0$$

$$\frac{P}{\rho N^3 D^5} = f\left(\frac{V}{N D^3}, \frac{\mu}{\rho N D^2}\right)$$

Deoarece curgerea gazului prin rotorul ventilatorulu are loc cu o turbulenţă mare, influenţa viscozităţii faţă de aceea a forţelor de inerţie este foarte mică şi ca urmare se poate neglija parametrul al doilea al funcţiei (care reprezintă criteriul Re); ca urmare ea devine :

$$\frac{P}{\rho N^3 D^5} = f\left(\frac{V}{N D^3}\right)$$

4.6. CRITERII DE SIMILITUDINE FOLOSITE PENTRU MEDIUL BIFAZIC MONOCOMPONENT

În cazul mediilor bifazice monocomponente, studiul experimental pe modele prin metoda similitudinii, avînd în vedere prezenţa simultană a celor două faze şi interacţiunea dintre ele, este mai dificil decît în cazul gazelor perfecte.

Prima problemă dificilă constă în determinarea valorilor numerice ale criteriilor adimensionale ale proceselor ce au loc în medii bifazice. Dificultatea apare deoarece în timpul curgerii are loc trecerea continuă a unei faze în cealaltă. Dacă s-a reușit să se determine valoarea criteriilor de similitudine ale amestecului bifazic, mersul calculului experimental și analitic este identic cu cel al unui gaz perfect.

În cazul mediilor bifazice, unele din criteriile discutate mai înainte nu au aceeași importanță ca aceea pe care o au în cazul mediului gazos monocomponent. De exemplu, criteriul Mach, pentru valori $M < 3$, se calculează în funcție de participarea celor două faze în amestec, dar pentru $M > 3$ el se calculează considerînd că amestecul bifazic este compus numai din faza gazoasă.

Pentru determinarea criteriilor caracteristice ale mediului bifazic, se face apel (în primul rînd) la ecuația continuității și ecuația impulsului :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0 \tag{4.27}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} = \operatorname{div} \sum + \vec{B} \rho \tag{4.28}$$

Se admite că tensorul forțelor superficiale E din interiorul fazei lichide se poate exprima în funcție de tensorul de deformare J_1 al ei și de presiunea p_l prin relația

$$E = 2\mu_l J_l - \left(p_l + \frac{2}{3}\mu_l \operatorname{div} \vec{w}_l\right) g_l$$

în care $J_l = \frac{\partial w_{lx}}{\partial x} = \frac{\partial w_{ly}}{\partial y} = \ldots; \quad P = -p_l \cdot g_l$

Deoarece

$$g_{xx} = g_{xz} = g_{yx} = \ldots = 0$$

și :

$$J_{xx} = \frac{\partial w_x}{\partial x}; \; J_{yy} = \frac{\partial w_y}{\partial y}; \; J_{zz} = \frac{\partial w_z}{\partial z}; \; J_{xy} = J_{yx} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right); \; J_{zx} = J_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right); \ldots$$

ecuațiile continuității și impulsului pentru mediul bifazic capătă formele

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0 \tag{4.29}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{grad}\left[\varphi_l \mu_l \left(2J_l - \frac{2}{3}\operatorname{div} \vec{w}_l\right)\right] +$$

$$+ \rho \vec{B} + \overline{\operatorname{div}(D_l - \vec{D}_v)}\, \varphi_v \tag{4.30}$$

în care $p = \varphi_l \cdot p_l + \varphi_v p_v$. Se folosesc constantele de similitudine $w_2 = K_w \cdot w_l$; $\varphi_2 = K_\varphi \varphi_l$; $\mu_2 = K_\mu \cdot \mu_l$; $B_2 = K_B B_l$, etc.

Scriind ecuaţia continuităţii pentru fenomenul din realitate (indicele 1) şi pentru cel de pe modelul simil (indicele 2) se obţine

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \sigma_1} + \text{div}(\rho \vec{w})_1 = 0; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial \sigma_2} + \text{div}(\rho \vec{w})_2 = 0$$

Ţinînd seama de constantele de similitudine şi de legea a doua a ei, ecuaţia de pe model capătă forma

$$\frac{K_\rho}{K_\tau} \frac{\partial \rho_1}{\partial \sigma_1} + K_\rho K_w \, \text{div} \, (\rho \vec{w})_1 = 0$$

de unde se obţine

$$\frac{K_\rho}{K_\tau} = K_\rho K_w; \quad \frac{K_\rho}{K_\tau K_w} = 1; \quad \frac{\rho}{\tau w} = \text{Sh}$$

Sh este criteriul Struhal, care este caracteristic curgerilor mediului bifazic. El pune în evidenţă periodicitatea unui fenomen ce apare în timpul curgerii. Deci pentru ca să se realizeze un model simil este necesar ca $\text{Sh}_2 = \text{Sh}_1$.

Ecuaţia continuităţii, scrisă pentru cele două faze ale mediului bifazic, are forma de mai jos — în care l se referă la faza lichidă, iar v la faza de vapori:

$$\frac{\partial(\rho_l \varphi_l)}{\partial \tau} + \text{div}\,(\rho_l \varphi_l \vec{w}_l) = -\chi \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial(\rho_v \varphi_v)}{\partial \tau} + \text{div}\,(\rho_v \varphi_v \vec{w}_v) = \chi \tag{4.32}$$

În care χ este cantitatea de lichid ce trece în stare de vapori. Folosind constantele de similitudine, se obţine criteriul de similitudine al trecerii unei faze în alta, sub forma

$$\frac{\chi \cdot l}{\rho \varphi w} = \text{Const.}; \quad \frac{K_\chi K_l}{K_\rho K_\varphi K_w} = 1 \tag{4.33}$$

Desigur că pentru obţinerea similitudinii proceselor ce au loc în fiecare fază a mediului bifazic va trebui să existe egalitatea:

$$\frac{\chi l_{l_1}}{\rho_{l_1} \varphi_{l_1} w_{l_1}} = \frac{\chi l_{l_2}}{\rho_{l_2} \varphi_{l_2} w_{l_2}}; \quad \frac{\chi l_{v_1}}{\rho_{v_1} \varphi_{v_1} w_{v_1}} = \frac{\chi l_{v_2}}{\rho_{v_2} \varphi_{v_2} w_{v_2}}$$

Din ecuaţia cantităţii de mişcare se obţine

$$\frac{K_\rho \cdot K_w}{K_\tau} \rho \frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{K_p}{K_l} \text{grad}\, p + K_\rho K_B \rho \vec{B} +$$
$$+ K_{\varphi_l} K_{\mu_l} \frac{K_{w_l}}{K_{l_l}} \text{grad} \left[\varphi_l \mu_l (2 J_l - \frac{2}{3} \text{div}\, \vec{w}_l \right] +$$
$$+ \frac{K_{\varphi_v} K_{\Delta D}}{K_l} \text{div}\,(D_l - \vec{D}_v)\, \varphi_v$$

de unde, pentru $\tau=1$ se obțin relațiile criteriale :

$$\frac{K_p}{K_\rho \cdot K_w} = 1 ; \quad \frac{p}{\rho \cdot w} = \mathrm{Eu} \tag{4.34}$$

$$\frac{K_{\varphi_l} \cdot K_{\mu_l} \cdot K_{w_l}}{K_l \cdot K_\rho \cdot K_w^2} = 1 ; \quad \frac{\varphi_l \cdot \mu_l w_l}{l \cdot \rho \cdot w^2} = \mathrm{Re}_{bf_l} \tag{4.35}$$

$$\frac{K_B \cdot K_l}{K_w^2} = 1 ; \quad \frac{B \cdot L}{w^2} = \mathrm{Fr}_{bf_l} \tag{4.36}$$

După cum se vede, se obțin unele criterii a căror expresie este identică atît pentru mediul lichid cît și pentru cel gazos, deci va avea aceeași formă și pentru cel bifazic, de exemplu Eu ; altele ca de exemplu Re_{bf_l} și Fr_{bf_l} a căror expresie pentru faza lichidă este diferită de cea gazoasă, au expresii diferite pentru bifazic față de gazul monofazic. Motivul pentru care ele poartă totuși aceeași denumire (la mediul bifazic ca la cel monofazic), deși expresia este diferită constă în faptul că ele reprezintă aceleași rapoarte de forțe. De exemplu atît Re cît și Re_{bf}, exprimă același raport dintre forțele de inerție și cele de presiune.

Deoarece metoda de obținere a criteriilor de similitudine caracteristice mediilor bifazice este aceeași cu acea folosită la obținerea criteriilor caracteristice gazelor perfecte, ele nu se vor mai relua ci numai specifica. Astfel pentru ca fenomenele ce au loc pe modelul experimental să fie simil cu cel ce are loc în realitate pentru un mediu bifazic este necesar ca valoarea criteriilor determinante ale lui să fie egală.

Cele mai des întîlnite criterii de similitudine în studiul termogazodinamicii mediilor bifazice sînt :

(1) Pentru ca impulsul să aibă valoarea egală pe model și în realitate este necesar să fie satisfăcută egalitatea

$$\frac{l_1}{\tau_{l_1} w_{l_1}} = \frac{l_2}{\tau_{l_2} w_{l_2}} ; \quad \frac{l_1}{\tau_{v_1} w_{v_1}} = \frac{l_2}{\tau_{v_2} w_{v_2}} ; \quad \mathrm{Sh}_{l_1} = \mathrm{Sh}_{l_2} ; \ldots \mathrm{Sh}_{v_1} = \mathrm{Sh}_{v_2} \tag{4.37}$$

(2) Pentru ca procesul de schimb de căldură convectiv interfazic să fie simil, ese necesară satisfacerea egalităților

$$\frac{\chi w_t l}{\rho_v \varphi_v w_v^2} = \mathrm{Const.} ; \quad \frac{\chi l}{\rho_v \varphi_v w_v} = \mathrm{Const.}$$

$$\frac{\chi w_t l}{\rho_l \varphi_l w_l^2} = \mathrm{Const.} ; \quad \frac{\chi l}{\rho_l \varphi_l w_l} = \mathrm{Const.} \tag{4.38}$$

șn care w_t este viteza de trecere a unei faze în alta ; iar χ-cantitatea de lichid ce trece în fază de vapori. Dacă viteza de curgere este identică pe model și în realitate, relația capătă o formă mai simplă și anume :

$$\frac{\rho_l \varphi_l}{\rho_v \varphi_v} = \frac{\rho \chi_l}{\rho \chi_v} = \frac{\chi_l}{\chi_v} = \mathrm{Const.}$$

(3) Pentru ca raportul forțelor de presiune și de inerție să fie egal, trebuie satisfăcută relația

$$\frac{p_l}{\rho_l w_l^2} = \mathrm{Eu}_l = \frac{p_v}{\rho_v w_v^2} = \mathrm{Eu}_v \tag{4.39}$$

Această relație presupune egalitatea energiei de deplasare a celor două faze, ceea ce înseamnă că trebuie să fie satisfăcută simultan și egalitatea

$$\frac{p_{l_1} \rho_{v_1}}{p_{v_1} \rho_{l_1}} = \frac{p_{l_2} \rho_{v_2}}{p_{v_2} \rho_{l_2}}$$

(4) Pentru a avea o curgere cu același caracter, atît pentru faza lichidă cît și pentru cea de vapori (laminar, turbulent, etc) este necesar să existe egalitatea

$$\mathrm{Re}_{l_1} = \frac{\rho_{l_1} w_{l_1} l_1}{\mu_{l_1}} = \frac{\rho_{l_2} w_{l_2} l_2}{\mu_{l_2}} = \mathrm{Re}_{l_2} \text{ iar } \mathrm{Re}_{v_1} = \mathrm{Re}_{v_2} \tag{4.30}$$

(5) De asemenea criteriul Froude trebuie să aibă aceeași valoare:

$$\frac{w_l^2}{gl} = \mathrm{Fr}_l\,;\ \mathrm{Fr}_{l_1} = \mathrm{Fr}_{l_2}\,;\ \mathrm{Fr}_{v_1} = \mathrm{Fr}_{v_2} \tag{4.31}$$

(6) Criteriul Weber trebuie să aibă și el aceeași valoare, deci

$$\frac{\varphi_v}{\varphi_l} \cdot \frac{\sigma}{r \rho_l w_l^2} = \mathrm{We}_l\,;\ \frac{\sigma}{r \rho_v w_v^2} = \mathrm{We}_v \tag{4.32}$$

în care r este raza picăturii de lichid în suspensie în faza gazoasă.

(7) Pentru ca raportul dintre forțele tangențiale și impuls pe suprafața de separație a celor două faze să fie egal pe model și în realitate trebuie satisfăcută egalitatea

$$\frac{\gamma w_v \varphi_v}{l \rho_l \varphi_l w_l^2} = \mathrm{Const}_l\,;\ \frac{\gamma \cdot w_l \varphi_l}{l \rho_v \varphi_v w_v^2} = \mathrm{Const}_v \tag{4.33}$$

în care γ este coeficientul de frecarea viscoasă interfazic.

4.7. CRITERII DE SIMILITUDINE ENERGETICĂ FOLOSITE PENTRU MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Criteriile de similitudine dinamică denumite și energetice ale mediilor bifazice se obțin din ecuația conservării energiei. Tehnica de terminare a lor este simplă, așa încît se vor prezenta numai criteriile cele mai des întîlnite.

Pentru ca două procese termogazodinamice ale unui mediu bifazic să fie simile din punct de vedere dinamic, este necesar să fie egale următoarele criterii :

(1) Criteriul Mach maxim (M_{max}) exprimat pentru cele două faze sub froma :

$$\frac{w_l^2}{2h_{0l}} = M^2_{max_l}; \quad \frac{w_v^2}{2h_{0v}} = M^2_{max_v} \tag{4.34}$$

(2)Raportul dintre energia cinetică și entalpia totală în raport cu viteza de curgere:

$$\frac{w_l^3\tau}{lh_{0l}} = \text{Const}_l; \quad \frac{w_v^3\tau}{lh_{0v}} = \text{Const}_v;$$

Relația este de fapt raportul dintre criteriul Mach și criteriul Strouhal. Ca urmare relația se mai poate scrie sub forma

$$\frac{w_l^3\tau}{l\cdot h_{0l}} = \frac{M^2_{max_l}}{Sh_l}; \quad \frac{w_v^3\tau}{l\cdot h_{0v}} = \frac{M^2_{max_v}}{Sh_v} \tag{4.35}$$

(3) Criteriul de similitudine al trecerii unei faze în cealaltă, dat de relația

$$\frac{w_l^3\rho_1\varphi_1}{l\cdot\chi w_l} = \text{Const}_l; \quad \frac{w_v^3\rho_v\varphi_v}{l\chi w_v} = \text{Const}_v \tag{4.36}$$

(4) Criteriile Reynolds, Péclet și Prandtl trebuie de asemenea să fie egale pentru cele două faze :

$$\frac{\rho_l w_l c_{p_l} l}{\lambda_l} = \frac{w_l l}{a_l} = Pe_l; \quad \frac{w_v l}{a_v} = Pe_v \tag{4.37}$$

în care a este coeficientul de difuzibilitate termică : $a = \lambda/c_p\cdot\rho$.

$$\frac{\varphi_l\mu_l w_l}{l\rho_l w^2} = Re_l; \quad \frac{\varphi_v\mu_v w_v}{l\rho_v w^2} = Re_v$$

$$\frac{Pe_l}{Re_l} = Pr_l; \quad \frac{Pe_v}{Re_v} = Pr_v. \tag{4.38}$$

(5) Iar criteriul Nesselt pentru schimbul de căldură interfazic :

$$\frac{\alpha_{lv}l}{\lambda_l} = Nu_l; \quad \frac{\alpha_{lv}l}{\lambda_v} = Nu_v \tag{4.39}$$

Cunoscînd criteriile dinamice energetice ale mediului bifazic, prin teoria similitudinii se pot obține constantele de asemănare K_ρ, K_w, K_φ, etc. și se va putea construi modelul pe care se vor efectua încercările experimentale. Apoi cu ajutorul analizei dimensionale se va putea determina funcția criterială ce caracterizează procesul studiat. În tabelul 4.3 sînt prezentate criteriile utilizate în modelarea proceselor ce au loc în mediile bifazice monocomponente în curgere.

Tabelul 4.3

Criteriile de similitudine a mediilor bifazice monocomponente

Nr. crt.	Denumirea criteriului	Simbol	Relația de calcul	Obs.
1	Constante adimensionale	—	$\frac{\chi_l \cdot l}{\rho_l \cdot \rho_l \cdot w_l} = \text{const}_l$; $\frac{\chi_v \cdot l}{\rho_v \cdot \rho_v \cdot w_v} = \text{const}_v$	
2	Euler	Eu	$\frac{p_l}{\rho_l \cdot w_l} = \text{Eu}_l$; $\frac{p_v}{\rho_v \cdot w_v} = \text{Eu}_v$	
3	Reynolds bifazic	Re_{bf}	$\frac{\varphi_l \cdot \mu_l \cdot w_l}{l \cdot \rho \cdot w^2} = \text{Re}_{bf_l}$; $\frac{\varphi_v \cdot \mu_v \cdot w_v}{l \cdot \rho \cdot w^2} = \text{Re}_{bf_v}$	
4	Froud	Fr	$\frac{B \cdot l}{w_l} = \text{Fr}_{bf_l}$; $\frac{B \cdot l}{w_v} = \text{Fr}_{bf_v}$	
5	Strouhal	Sh	$\frac{l}{\tau_v \cdot w_v} = \text{Sh}_v$; $\frac{l}{\tau_l \cdot w_l} = \text{Sh}_l$	
6	Raport de similitudine	—	$\frac{\rho_l \cdot \varphi_l}{\rho_v \cdot \varphi_v} = \frac{\rho \cdot x_l}{\rho \cdot x_v} = \frac{x_l}{x_v}$	
7	Euler	Eu	$\frac{p_l}{\rho_l \cdot w_l} = \text{Eu}_l$; $\frac{p_v}{\rho_v \cdot w_v} = \text{Eu}_v$	
8	Constantă	—	$\frac{p_l \cdot \rho_v}{p_v \cdot \rho_l} = \text{const.}$	
9	Reynolds	Re	$\frac{\rho_l \cdot w_l \cdot l}{\mu_l} = \text{Re}_l$; $\frac{\rho_v w_v l}{\mu_v} = \text{Re}_v$	
10	Webber	We	$\frac{\varphi_v}{\varphi_l} \frac{\sigma}{r \cdot \rho_l \cdot w_l^2} = \text{We}_l$; $\frac{\sigma}{r \cdot \rho_v \cdot w_v^2} = \text{We}_v$	

Tabelul 4.3 (continuare)

11	Constante de similitudine	—	$\frac{\gamma \cdot w_v \cdot \varphi_v}{l \cdot \rho_l \cdot \varphi_l \cdot w_l^2} = \text{const}_l$ $\frac{\gamma \cdot w_l}{l \cdot \rho_v \cdot w_v^2} = \text{const}_v$	γ = coeficientul de viscozitate interfazic
12	Mach$_{max}$ bifazic	M	$\frac{w_l^2}{a_l^2} = M^2_{max_l}$; $\frac{w_v^2}{a_l^2} = M^2_{max_v}$	
13	Constante de similitudine	—	$\frac{w_l^3 \cdot \tau}{l \cdot h_l} = \frac{M^2_{max_l}}{Sh_l} = \text{const}_l$ $\frac{w_v^3 \cdot \tau}{l \cdot h_v} = \frac{M^2_{max_v}}{Sh_v} = \text{const}_v$	
14	constante		$\frac{w_l^3 \cdot \rho_l \cdot \varphi_l}{l \cdot \chi \cdot \mu_t} = \text{const}_l$ $\frac{w_v^3 \cdot \rho_v \cdot \varphi_v}{l \cdot \chi \cdot \mu_t} = \text{const}_v$	
15	Prandtl	Pr	$\frac{Pe_v}{Re_v} = Pr_v$; $\frac{Pe_l}{Re_l} = Pr_l$	

4.8. STRATUL LIMITĂ DINAMIC

A doua metodă de studiere a proceselor termogazodinamice se bazează pe teoria stratului limită dinamic și termic.

La studiul macroscopic al curgerilor, ecuațiile Navier-Stokes nu permit lămurirea fenomenelor ce au loc în stratul de gaz adiacent la peretele solid. În acest strat denumit *strat limită dinamic*, influența reciprocă a forțelor de inerție și de viscozitate trebuie să fie explicitată prin ecuații complimentare.

Se consideră, pentru exemplificare, curgerea unui gaz printr-un canal de o secțiune oarecare, cu o valoare a criteriului Reynolds $0,1 \leq Re \leq 0,8$.

Mișcarea gazului se poate împărți în două zone distincte și anume : (1) o zonă de lîngă peretele canalui sau lîngă peretele oricărui corp solid aflat în curentul de gaz, denumită „strat limită dinamic“ în care forțele de vîscozitate au aceeași pondere cu celelalte forțe ce acționează asupra masei de gaz : (2) o zonă de deasupra stratului limită dinamic, denumită zona de curgere liberă a fluidului, unde influența forțelor de vîscozitate este neglijabılă față de celelalte forțe.

Pentru determinarea caracterisiticilor curgerii în zona liberă a fluidului se face apel la ecuațiile de mișcare a gazului. Pentru stratul limită dinamic, ecuațiile au însă o altă formă, de obicei mai simplă decît pentru zona liberă. Studiul stratului limită dinamic constă în precizarea acestor ecuații.

Grosimea stratului limită depinde de raportul dintre forțele de inerție și de cele de viscozitate. Cînd în curgerea respectivă forțele de inerție sînt mai mari decît cele de viscozitate, deci valoarea criteriului Re este mare, grosimea stratului limită dinamic este mică, și invers. Deci criteriul Re joacă un rol hotărîtor în determinarea grosimii stratului limită. Între caracterul mișcării gazului în stratul limită și în zona liberă există desigur o strînsă dependență, ce poate fi explicată teoretic în diferite moduri, de exemplu prin așa-numita teorie a stratului limită a lui Prandtl. Această teorie are la bază ipoteza existenței zonei libere de curgere, indiferent de existența sau absența stratului limită dinamic. De asemenea se consideră cunoscute legile de mișcare a gazului în zona liberă. Teoria lui Prandtl consideră că stratul limită este determinat numai de legile de mișcarea din zona liberă, deci consideră o influență unilaterală între cele două zone ale curgerii. Dezvoltarea ulterioară a cercetărilor a arătat că teoria lui Prandtl asupra stratului limită nu este suficientă pentru toate cazurile posibile de curgere în special pentru curgerile transsonice și supersonice.

Completarea teoriei lui Prandtl asupra stratului limită a devenit posibilă odată cu perfecționarea metodelor de cercetare experimentală. Acestea au pus în evidență influența pe care o are și stratul limită asupra zonei libere de curgere a gazului. Una din constatările importante a arătat că datorită frînării gazului în stratul limită, liniile de curent ale fluidului în curgere se deplasează spre zona liberă și, ca urmare, va apărea o viteză de deplasare transversală în el.

În cazul curgerii gazului în jurul unui corp imobil, așa cum se arată în fig. 4.1, viteza de curgere pe direcție perpendiculară pe suprafață va

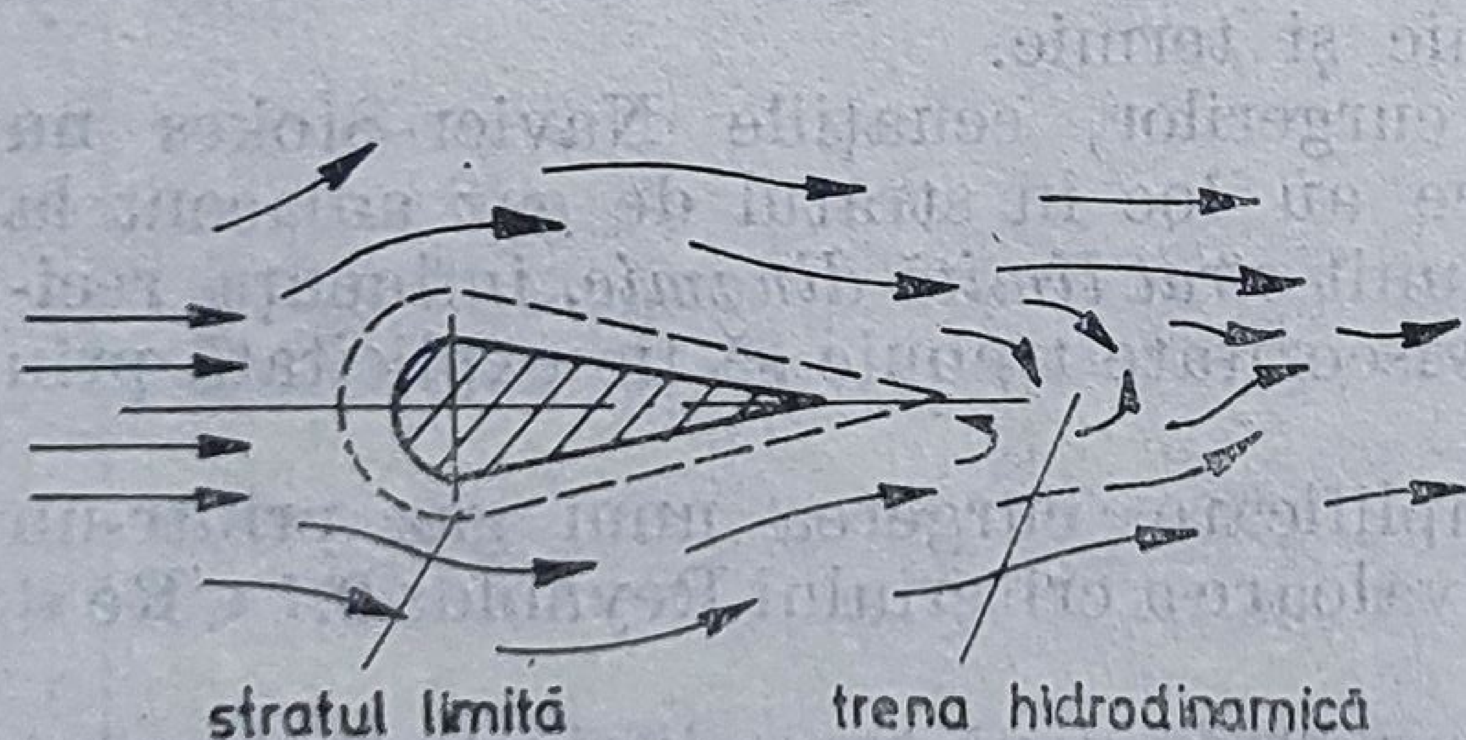


Fig. 4.1. Curgere unidirecțională a unui gaz în jurul unui corp.

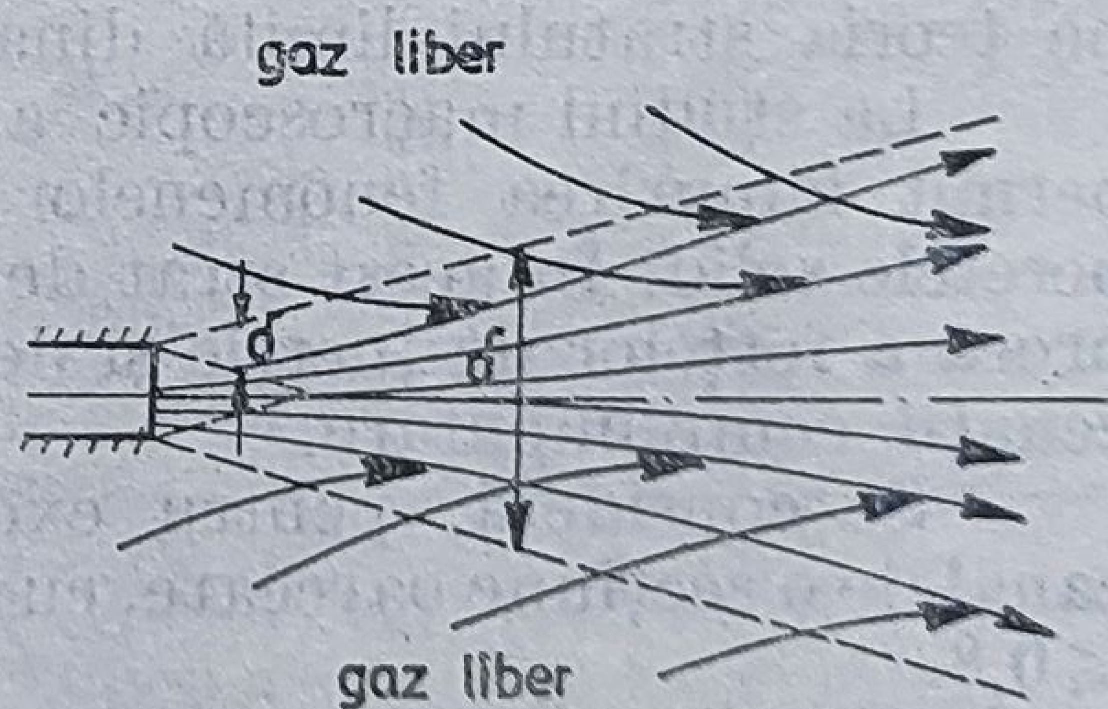


Fig. 4.2. Stratul limită dinamic al unui jet liber de gaz.

trece de la valoarea zero, pe care o are la suprafața de contact cu corpul, la viteza de curgere din zona liberă. Deci într-un strat adiacent peretelui va avea loc o variație a vitezei de curgere. Ca urmare a vitezei diferite a liniilor de curent în direcția y (perpendiculară pe x), între ele vor apărea

forțe de frecare internă datorită viscozității fluidului, de intensitate comparabilă celor de inerție.

În spatele corpului solid au loc modificări ale traiectoriei liniilor de curent, deci ale regimului de curgere, care se datoresc tocmai existenței stratului limită dinamic. Această „umbră hidrodinamică" a corpului poartă denumirea de „trenă hidrodinamică" sau „silaj" și pune în evidență influența pe care o are stratul limită asupra zonei libere (neturburate) a curentului de gaz.

Un alt exemplu al influenței stratului limită asupra zonei libere de curgere a gazului îl constituie spectrul gazodinamic al unui jet de gaz ce pătrunde într-o masă de gaz imobilă, cu proprietăți termofizice identice cu cele ale gazului din jet (fig. 4.2). Liniile de curent externe ale jetului (ce pătrunde în gazul liber în repaos), ca urmare a frecării interne (viscozității) îl vor antrena pe acesta, creînd un strat limită a cărei grosime este notată cu δ. La orificiul de formare a jetului, grosimea δ va fi egală cu zero, însă în direcția de curgere forțele de viscozitate vor antrena gazul imobil, ceea ce va face ca grosimea lui δ să devină din ce în ce mai mare (pe măsură ce locul măsurătorii este mai depărtat de orificiul de formare al jetului).

După o distanță oarecare de la gura jetului, forțele de frecare vîscoasă vor acționa în toată secțiunea jetului, astfel încît grosimea stratului limită dinamic δ va umple toată secțiunea de curgere a jetului.

Caracterul mișcării în stratul limită dinamic poate fi laminar, tranzitoriu sau turbulent. În figura 4.3 se prezintă schematic procesul de formare a stratului limită dinamic laminar, la curgerea unui gaz cu viteza $w_1 < a(0{,}1\, a \leq w_1 \leq 0{,}8a)$ ce întîlnește la un moment dat o suprafață solidă plană paralelă cu direcția de curgere.

Pentru $0 \leq x < x_{cr}$ grosimea stratului limită notată cu δ_x variază de la 0 la δ_x. Această distanță x_{cr} poartă denumirea de „lungime critică"

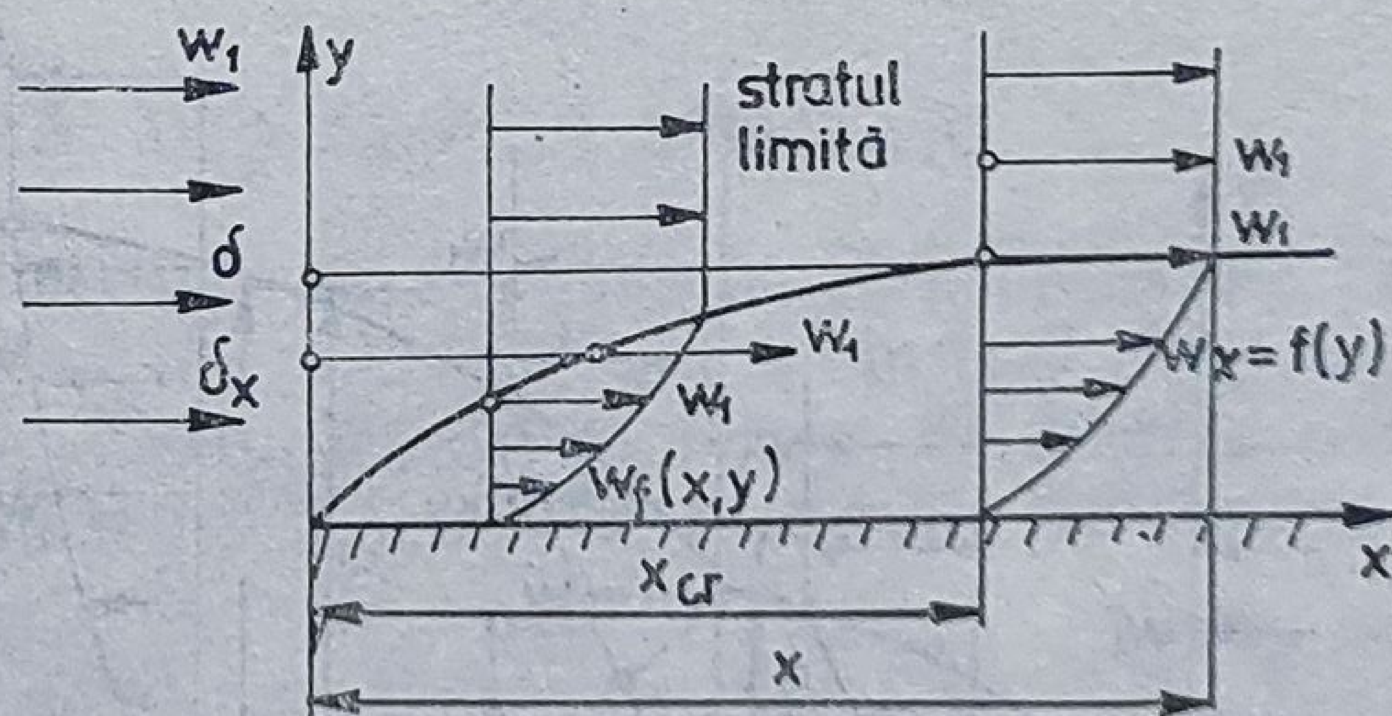


Fig. 4.3. Stratul limită dinamic laminar.

sau „lungime de stabilizare a stratului limită dinamic". Variația vitezei w_x la o distanță y de la perete și anume $y < \delta_x$ și $x < x_{cr}$ are o pantă mai mare decît pentru $x \geq x_{cr}$. După parcurgerea distanței x_{cr}, în cazul unei curgeri potențiale, grosimea stratului limită rămîne constantă, pentru orice valoare a lui x. În cazul curgerii limitate de două suprafețe paralele (canale de secțiune constantă, conducte, etc.) fenomenul de formare a

stratului limită laminar este identic pentru amîndouă suprafeţele, ceea ce duce la o curbă de variaţie a vitezei într-o secţiune a canalului, cu profil simetric, aşa cum este prezentat în fig. 4.4. În funcţie de caracterul mişcării în stratul limită dinamic, el poartă denumirea de strat limită dinamic *tranzitoriu* sau *turbulent*.

Pentru $x < x_{cr}$ viteza de curgere într-o secţiune oarecare x şi la cota y depinde de viteză iniţială w_1 şi de coordonatele x şi y ale punctului,

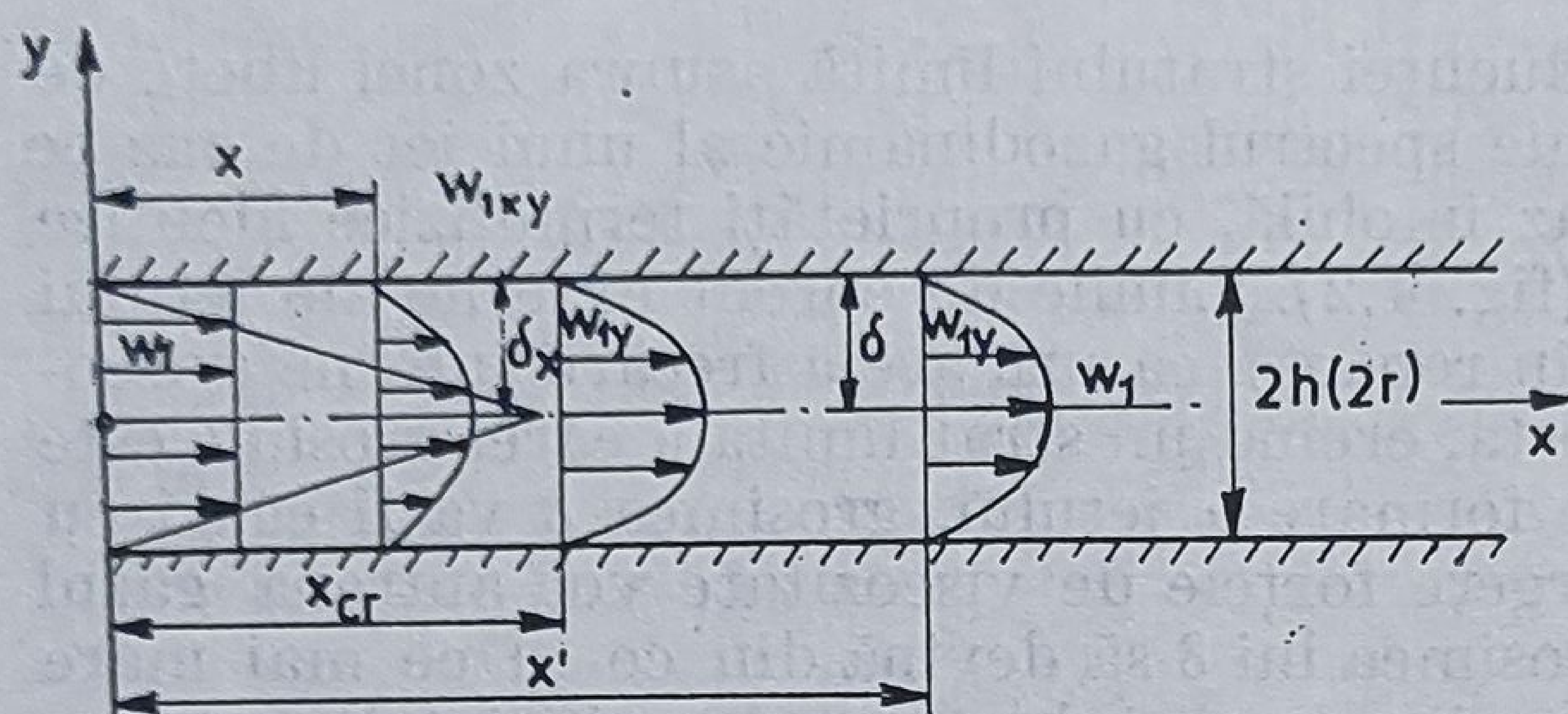


Fig. 4.4. Stratul limită dinamic laminar la curgerea unui gaz printr-o conductă.

iar pentru $x > x_{cr}$ ea nu mai depinde decît de ordonata y. Grosimea stratului limită δ_x pentru $x < x_{cr}$ depinde de abscisa x a secţiunii, avînd $\delta_x < \delta$.

Curgerea în stratul limită are un caracter laminar dacă şi curgerea gazului în zona liberă este laminară.

În cazul cînd curgerea în zona liberă este turbulentă, ($Re > 10^4$ pentru conducte circulare sau $Re > Re_{cr}$ pentru alte situaţii), dar este subsonică ($w_1 < a$) mişcarea în stratul limită are un caracter laminar lîngă perete şi turbulent deasupra acestuia. În figura 4.5 se prezintă schematic procesul de formare a stratului limită dinamic turbulent.

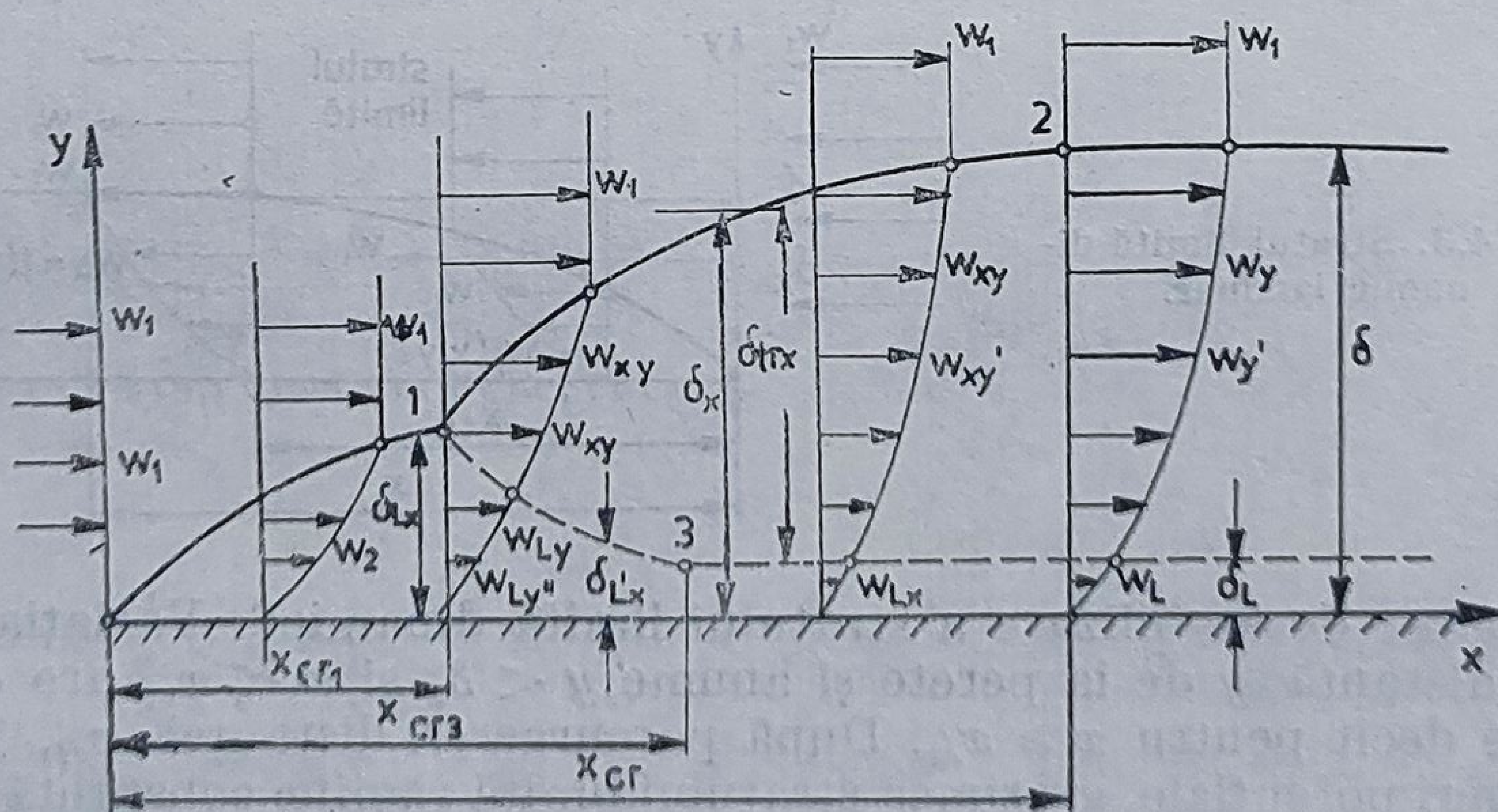


Fig. 4.5. Formarea stratului limită dinamic turbulent.

Pe distanța x_{cr1} de la muchia de intrare a peretelui, se formează stratul limită laminar, a cărei grosime δ_{Lx} este funcție de x pînă la $x \leqslant x_{cr1}$.

Curba 0—1 din figura 4.5 reprezintă grosimea stratului limită laminar δ_{Lx}. După $x = x_{cr1}$ pînă la $x \leqslant x_{cr3}$ stratul limită laminar se micșorează, fiind reprezentat pe figura 4.5 prin linia punctată de lîngă perete. De la $x = x_{cr3}$ înainte, deci de la punctul *3* înainte, în direcția de curgere, grosimea stratului limită dinamic laminar devine δ_L și rămîne la valoarea constantă pentru orice valoare $x > x_{cr3}$.

Începînd de la $x = x_{cr1}$ înainte începe să se formeze stratul limită dinamic cu mișcare tranzitorie, a cărei grosime δ_{tr} variază odată cu micșorarea lui δ_{Lx} și cu creșterea lui L_x.

Distanța Δx_{tr1} pe care are loc mișcarea tranzitorie nu poate fi determinată teoretic cu precizie, ea depinzînd de intensitatea forțelor de viscozitate din gaz. Experimental s-a constatat că Δx_{tr} este relativ mică, deoarece la o distanță mică după $x = x_{cr1}$ apare în stratul limită mișcarea turbulentă. Ca urmare de la x_{cr1} la x_{cr} grosimea stratului limită dinamic turbulent va crește continuu, pînă cînd la $x = x_{cr3}$ grosimea lui s-a stabilizat și pentru orice $x > x_{cr3}$ va rămîne constantă și egală cu δ. Deci stratul limită δ va fi compus dintr-un strat δ_L în care mișcarea rămîne laminară și unul $\delta - \delta_L$ unde mișcarea este turbulentă. În tabelul 4.4 sînt prezentate mărimile caracteristice ale stratului limită dinamic determinate analitic sau experimental. Existența celor două feluri de curgeri, laminar și turbulent, în stratul limită dinamic se explică prin variația raportului dintre forțele ce acționează în masa gazului. Existența unui strat limită dinamic este deci posibilă numai în cazul fluidelor (gazelor) vîscoase. Pentru gazele în stare de suprafluiditate, de exemplu izotopul He singurul gaz natural ce prezintă caracterul natural de suprafluiditate sau pentru gaze aduse artificial în această stare (plasmă) curgerea are loc fără existența unui strat limită.

4.9. STRATUL LIMITĂ DINAMIC LAMINAR

Pentru determinarea ecuațiilor de curgere în stratul limită laminar se consideră curgerea bidirecțională a unui fluid în lungul unei suprafețe plane, în regim permanent stabilizat. Netinînd seama de forțele ascensionale și gravitaționale, ecuațiile de mișcare sînt ecuațiile Navier-Stockes :

$$\left.\begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right] \\ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left[\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (4.40)$$

iar ecuația de continuitate, considerînd fluidul incompresibil :

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (4.41)$$

Tabelul 4.4.

Mărimi caracteristice a stratului limită dinamic

Mărimea caracteristică	Expresia de calcul	Metoda de determinare
1	2	3
Re_{cr} = valoarea Re la care se schimbă natura curgerii $Re < Re_{cr}$ — laminar $Re > Re_{cr}$ — turbulent	Pentru suprafețe plane: $Re_{cr} = \frac{l \cdot w_m}{\nu} \approx 3 \cdot 10^5$ Pentru tuburi circulare: $Re = \frac{w_m \cdot d}{s} \approx 2360$ unde: w_m = viteza medie; ν = viscozitatea cinematică a fluidului	Experimental
	Stratul limită laminar	
L = grosimea stratului limită laminar la distanța x în cazul curgerii pe suprafețe plane	$\delta_L = 5,83 \frac{x}{Re^{1/2}}$	Analitic și verificată experimental
Legea de variație a vitezei în stratul limită, la distanța x de la origine, pentru stratul limită laminar	Suprafață plană: $\frac{w_x}{w_1} = 1.5 \frac{\nu}{\delta} - 0,5 \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}$	Empiric (soluția Pohlhausen)
	Pentru tuburi circulare: $w_x = w_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ unde: $-R < r < + R$ ($r = 0$ în axă) $w_x \Big\vert_{r=0} = w_{max}$ viteza medie: $w_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R w_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi . r\, dr$ $w_m = \frac{1}{2} w_{max}$	Expresia w_∞ stabilită analitic pe bază ecuației Nawier-Stokes
	Pentru canale cu secțiune rectangulară de lățime $2 \cdot h$: $w_x = w_{max}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$ — viteza medie: $w_m = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} w_{max}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) dy$ $w_m = \frac{2}{3} w_{max}$	Analitic

Tabelul 4.4 (continuare)

1	2	3
Lungimea de stabilizare (x_{cr}) în cazul unei curgeri laminare printr-o conductă	$x_{cr} = 0{,}0575 \cdot d \cdot \mathrm{Re}_1$ d = diametrul conductei; Re_1 în zona de intrare.	Soluția Langhaar
	Stratul limită turbulent	
Grosimea stratului limită turbulent δ_x (fig. 4.5) la idstanța x	Suprafața plană $\delta_x = 0{,}376 \dfrac{x}{\mathrm{Re}^{3/5}}$	Experimental
Grosimea substratului laminar δ_L (fig. 4.5)	Tub circular: $\delta_L = \dfrac{37{,}2 \cdot d}{\mathrm{Re}^{0{,}912}}$	Experimental
Legea de variație a vitezei pe direcția x în stratul limită turbulent	Suprafață plană $w_x = w_1 \left(\dfrac{y}{\delta}\right)^{1/7}$	Soluția van Karman
	Conductă circulară: $\delta = R;\ w_1 = w_{max}$ $y = R - r$ $w_x = w_{max}\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)^{1/7}$ viteza medie: $w_m = \dfrac{1}{\pi \cdot R^2}\displaystyle\int_0^R w_{max}\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)^{1/7} \times$ $\times 2\pi r dr$ $w_m = \dfrac{49}{60} w_{max} = 0{,}17 \cdot w_{max}$	
	Canal rectangular de lățime $2 \cdot h$: $w_x = w_{max}\left(\dfrac{y}{h}\right)^{1/7}$ viteza medie: $w_m = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{+h} w_x \cdot dy$ $w_m = \dfrac{1}{2} w_{max} \displaystyle\int_{-1}^{+1}\left(\dfrac{y}{h}\right) d\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $w_m = \dfrac{7}{8} w_{max}.$	
x_{cr} — lungimea critică în curgerea turbulentă (lungimea de stabilizare)	Suprafață plană: $x_{cr} = 4{,}85 \cdot 10^5 \dfrac{\nu}{w_m}$ Conductă circulară: $x_{cr} \approx 50 \cdot d$	

Ţinînd seama de notaţiile din figura 4.3, condiţiile la limită ale stratului limită sînt

— pentru $y = 0$; $w_x = 0$; $w_y = 0$

— pentru $y = \delta$; $w_x = w_1$

Ca urmare a forţelor de frecare internă (de viscozitate) viteza w_x variază (funcţie de y) între 0 şi w_1 pentru $0 \leqslant y \leqslant \delta$.

Deci $w_x = 0 \ldots w_1$ sau $w_x/x = 0 \ldots 1$ pentru $x = 0 \ldots 1$. Ca urmare a valorilor lui w_x termenii din ecuaţia Navier-Stockes la limită capătă formele

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = 0\left(\frac{w_1}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0\left(\frac{w_1}{\delta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = 0\left(\frac{w_1}{l^2}\right); \quad \frac{\partial w_x}{\partial x} = 0\left(\frac{w_1}{l}\right)$$

Curgerea avînd loc în regim permanent stabilizat, ordinul de mărime a lui $\partial w_x / \partial x$ va fi egal cu $\partial w_y / \partial y$, deci ecuaţia se poate integra obţinîndu-se pentru w_y:

$$w_u = \int_0^\delta \frac{\partial w_x}{\partial x}\,\mathrm{d}y = 0\left(\frac{w_1}{l}, \delta\right) = 0(\delta)$$

De asemenea

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = 0\left(\frac{w_1}{l^2}, \delta\right) = 0\left(\frac{\delta}{l}\right); \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = 0\left(\frac{w_1}{l^3}, \delta\right) = 0\left(\frac{\delta}{l^2}\right)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = 0\left(\frac{w_1}{l}\right) = 0(1); \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = 0\left(\frac{w_1}{l, \delta}\right) = 0\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

Prin definiţie, grosimea stratului limită δ este mai mică decît x şi ca urmare

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}.$$

Variaţia vitezei de curgere în decelerarea liberă a unui gaz, deci şi în stratul limită, se datoreşte faptului că forţele de inerţie devin egale sau chiar mai mici decît forţele de viscozitate. Ca urmare se pot scrie relaţiile ce exprimă aceste forţe:

— forţele de viscozitate:

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0\left(\nu, \frac{w_1}{\delta^2}\right) \tag{4.42}$$

— forţele de inerţie:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0\left(w_1, \frac{w_1}{l}\right) + 0\left(\frac{w_1}{l}, \delta, \frac{w_1}{\delta}\right) \tag{4.43}$$

Din ultima relaţie se obţine ecuaţia ce permite calculul grosimii stratului limită şi anume:

$$\nu \frac{w_1}{\delta^2} \approx \frac{w_1^2}{l}\,; \quad \frac{\delta}{l} = \frac{1}{\sqrt{\frac{w_1 l}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

Ca urmare, grosimea stratului limită la o distanţă oarecare x va fi

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\,; \quad \left[\mathrm{Re}_x = \frac{w_1 x}{\nu}\right] \tag{4.44}$$

Grosimea stratului limită depinzînd de raportul dintre forţele de inerţie şi a celor de vîscozitate va fi exprimată de criteriul ce exprimă acest raport şi anume de criteriul Reynolds. Odată cu micşorarea forţelor de vîscozitate, creşte valoarea criteriului Re şi ca urmare grosimea stratului limită va scădea.

Deoarece w_1/x este de ordinul întîi, prin egalarea forţelor de viscozitate cu cele de inerţie, se obţine $\nu \approx \delta^2$. Atunci ecuaţiile Navier-Stockes capătă forma

$$w_1 \frac{w_1 \cdot \delta}{l^2} + \frac{w_1}{l}\,\delta\,\frac{w_1}{l} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{w_1}{l\delta}$$

Dacă se consideră $\nu \approx \delta^2$ şi $w_1/l = 0(1)$ se obţine

$$\delta + \delta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \delta \tag{4.45}$$

Pentru ca relaţia să fie onogenă, ordinul de mărime al lui $\partial p/\partial y$ trebuie să fie egal cu cel al lui δ şi ca urmare primul termen din partea dreaptă a ecuaţiei se poate neglija. Ca urmare pe direcţia y, diferenţiala $\partial p/\partial y = 0$, adică variaţia de presiune pe direcţia y trebuie să fie practic nulă. Ca urmare, ecuaţiile de mişcare în stratul limită laminar vor fi date de relaţiile

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0. \tag{4.47}$$

În cazul cînd se consideră o curgere ce ar avea loc în jurul unui corp cu un profil oarecare, relaţiile de mai sus îşi păstrează valabilitatea, cu singura deosebire că axa y va fi considerată ca fiind perpendiculară pe tangenta la suprafaţa corpului în punctul considerat.

Integrarea acestor ecuaţii pentru un caz general este foarte dificilă, avînd în vedere complexitatea condiţiilor la limită, ea fiind posibilă numai pentru curgeri potenţiale, în care caz $\partial p/\partial x = 0$, ceea ce înseamnă că

$p =$ const. în lungul axei x și profilul vitezei pe direcția y este funcție numai de y, adică este satisfăcută condiția

$$w_x = w_1 f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Pentru determinarea analitică a grosimii δ a stratului limită dinamic laminar se face apel la ecuația cantității de mișcare și a momentului cantității de mișcare.

Țelul final al studiului teoretic al grosimii δ este determinarea legăturii ce există între mărimile caracteristice ale curgerii și forțelor ce acționează în stratul limită. Se consideră cu notațiile din figura 4.6 un element

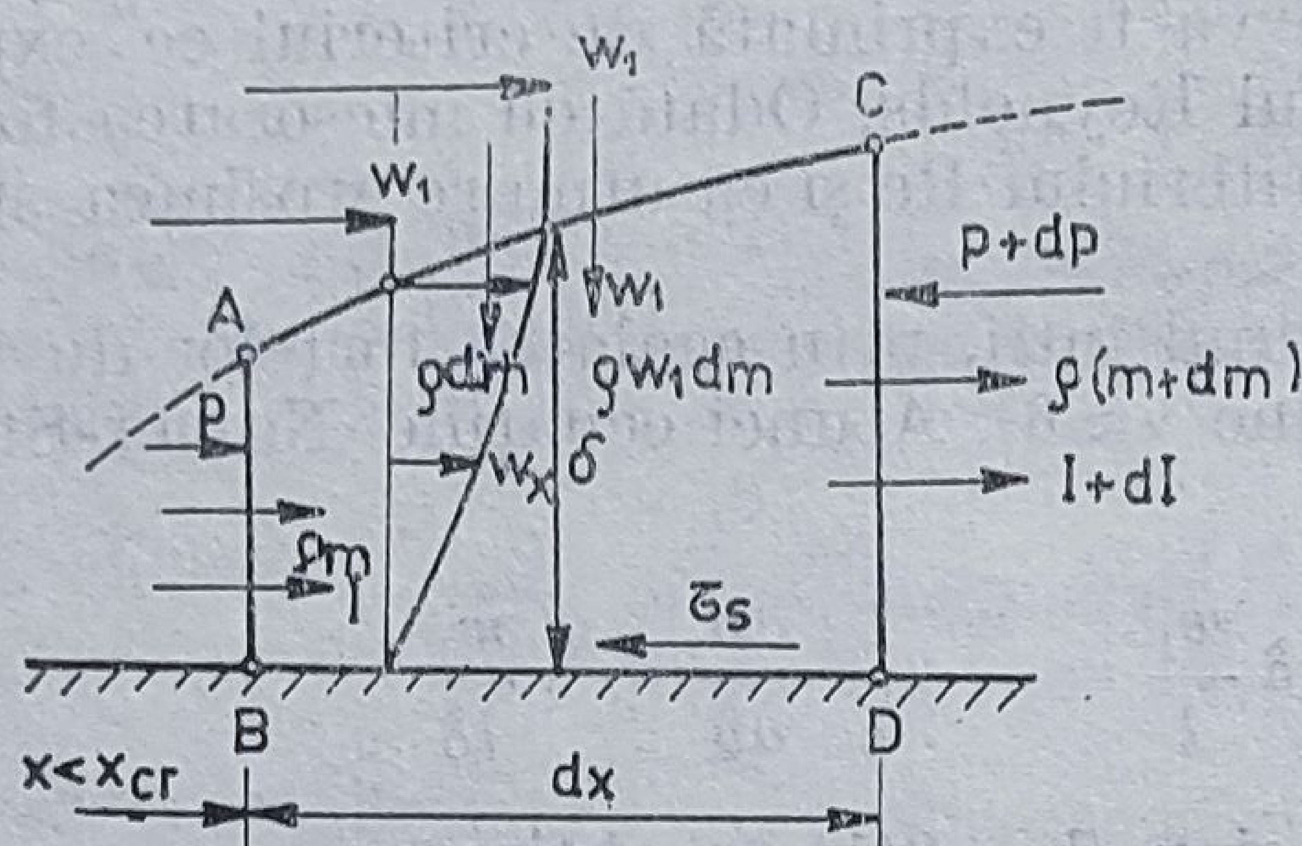


Fig. 4.6. Element de volum din stratul limită dinamic turbulent.

de volum $dV = \delta \cdot dx \cdot 1$ din stratul limită, situat la distanța x de la bordul de atac al suprafeței plane peste care curge un gaz cu o viteză medie în zona netulburată $w_1 < a$. Se notează cu : $\dot{m}$ — debitul volumic ce străbate suprafața AB; I — cantitatea de mișcare (impulsul pe aceeași suprafață); ρ — densitatea gazului; τ — forța de frecare (tensiunea) între gaz și suprafața BD a peretelui; p — presiunea specifică la perete.

Debitul volumic $d\dot{m}$ ce străbate suprafața AC crește cu dx, ceea ce explică mărimea grosimii δ a stratului limită în perioada de stabilizare ($x \leqslant x_{cr}$). Viteza w_x în stratul limită crește de la 0 la w_1 dar tinde asimptotic către ea. Se consideră că $w_x = w_1$ cu o aproximație de 1%, ipoteză necesară pentru a se putea defini granița stratului limită.

Variația impulsului în elementul de volum condiderat pe distanța dx este

$$(I + dI) - I = dI = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho w_x^2 \, dy \tag{4.48}$$

iar variația impulsului ca urmare a variației masei este dată de relația

$$w_1 \rho \, d\dot{m} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho w_1 w_x \, dy$$

în care $$\dot{m} = \int_0^\delta w_x \cdot dy \, ; \quad I = \int_0^\delta \rho \cdot w_x^2 \cdot dy$$

Variaţia totală a impulsului elementului de volum dV în timpul $d\tau$ va fi

$$d\tau \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho w_x^2 \, dy - d\tau \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho w_1 w_x \, dy \qquad (4.49)$$

Relaţia trebuie să fie aproximativ egală cu suma impulsurilor forţelor exterioare de presiune ce acţionează pe direcţia x date de relaţia

$$p(\delta + d\delta) - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)(\delta + d\delta) \cong -\delta \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Proiecţiile lor pe axa y (feţele AC şi BD) sînt nule.

Forţele de frecare τ_s ce acţionează pe direcţia x pe cele 4 feţe ale elementului de volum considerat se reduc la cele ce acţionează pe suprafaţa BD, deoarece cele de pe suprafaţa AC sînt neglijabile, avînd în vedere ipoteza că $w_x \Big|_{AC} \approx w_1$ deci $\partial w_x / \partial y \Big|_{y=\delta} = 0$, iar proiecţiile celor de pe suprafeţele AB şi CD sînt nule prin perpendicularitatea lor pe direcţia x.

Deci variaţia cantităţii de mişcare pe direcţia x în timpul $d\tau$ este dată de relaţia :

$$d\tau \frac{dI}{dx} dx - d\tau \rho w_1 \frac{d\dot{m}}{dx} dx = -\tau_s \, dx \, d\tau - \delta \frac{\partial p}{\partial x} dx \, d\tau$$

care duce la

$$-\tau_s - \delta \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho w_x^2 \, dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho w_1 w_x \, dy$$

Împărţind relaţia cu ρw_1^2 şi efectuînd integrările se obţine

$$\frac{\tau_s}{\rho w_1^2} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy - \frac{\delta}{\rho w_1^2} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (4.50)$$

Relaţia astfel obţinută este ecuaţia integrală de mişcare a gazului în stratul limită dinamic laminar, valabilă atît pentru zona iniţială ($x \leqslant x_{cr}$) cînd δ variază în funcţie de x cît şi pentru zona $x > x_{cr}$.

Din această ecuaţie se obţin, pentru diferite cazuri, relaţiile

— pentru $x > x_{cr}$, cînd aportul de masă $d\dot{m} = 0$, se obține

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho w_x^2\, dy = -\tau_s - \int_0^\delta \frac{dp}{dx}\, dy \tag{4.51}$$

— în cazul curgerii fluidului prin stratul limită în regim tranzitoriu, relația devine

$$\int_0^\delta \rho \frac{\partial w}{\partial \tau} dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho\, w_x^2\, dy - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho\, w_1 w_x \cdot dy = -\tau_s - \int_0^\delta \frac{dp}{dx}\, dy \tag{4.52}$$

— în cazul curgerii libere, deci cînd forțele de presiune nu generează mișcarea gazului (sînt nule) se înlocuiește termenul dp/dx cu expresia forțelor ascensionale ce generează mișcarea, $\rho \cdot g(1 - \beta \cdot \Delta t)$ obținîndu-se relația

$$\int_0^\delta \rho \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho w_x^2\, dy - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho w_1 w_x \cdot dy = -\tau_s - \int_0^\delta \rho g(1 - \beta \cdot \Delta t)\, dy \tag{4.53}$$

Ecuația generală conține trei necunoscute și anume τ_s, w_x și δ, deci pentru rezolvarea ei mai sînt ncesare încă două ecuații. De obicei se face apel la ecuația de repartiție a vitezei pe direcția y în stratul limită de forma $w_x/w_1 = f(y/\delta)$ și la expresia tensiunii tangențiale $\tau_s = f(\delta)$.

Problema tehnică ce trebuie să fie rezolvată pentru stratul limită dinamic laminar constă în determinarea grosimii δ a lui. Avînd în vedere că w_x tinde către w_1 asimptotic, egalitatea $w_x = w_1$ se va obține la infinit. Ca urmare, teoretic, grosimea stratului limită va avea valoarea δ numai la ∞, indiferent de valoarea vitezei w_1.

Pentru a obține o relație practică de calcul a grosimii δ a stratului limită, se introduc două noțiuni fictive și anume ,,grosimea de deplasare a stratului limită'' notată cu δ^* denumit și ,,deficitul de debit al stratului limită'' și ,,grosimea cantității de mișcare a stratului limită'' notat cu δ^{**} denumit și ,,deficitul de impuls al stratului limită''.

Modelul fizic al grosimii de deplasare δ^* este o grosime de fluid de debit $\dot{m}$ ce ar reprezenta distanța cu care se deplasează liniile de curent față de suprafața solidă (fig. 4.7), în cazul unui curent de gaz de viteză w_1.

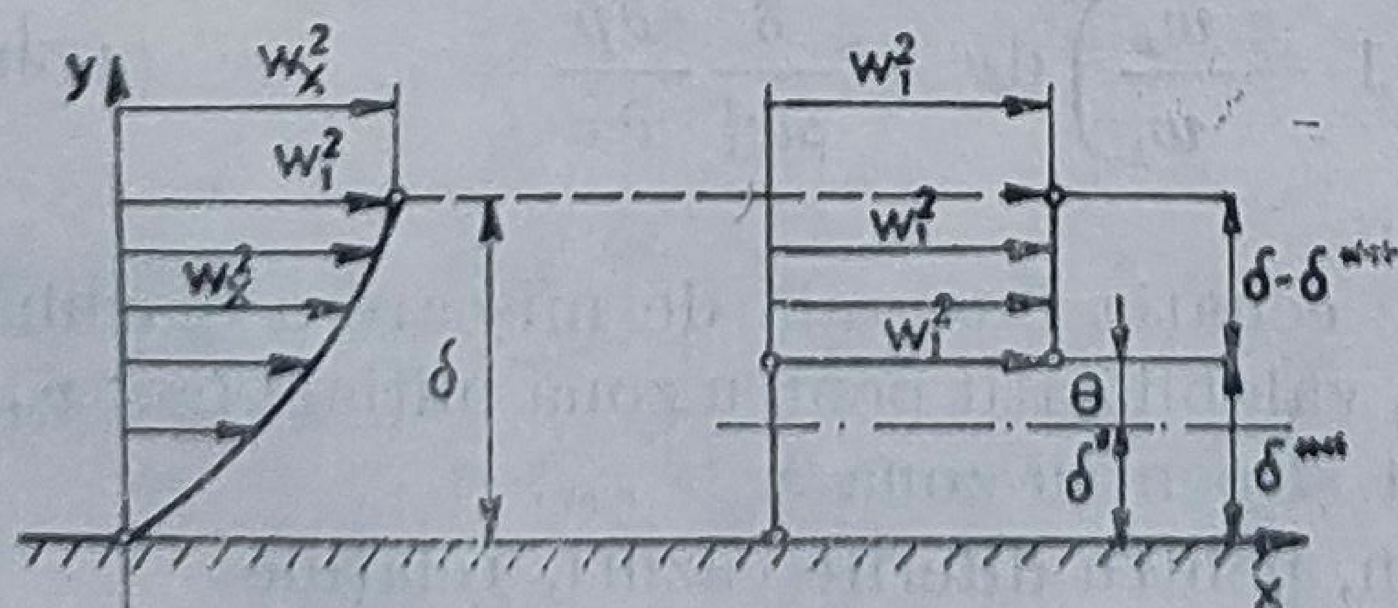


Fig. 4.7. Modelul fizic al ,,grosimii de deplasare δ^*.

Deci $(\delta - \delta^*) l$ reprezintă o secțiune echivalentă prin care ar trece un debit $\dot{m}$ egal cu cel ce trece prin secțiunea oferită de elementul de volum dV și anume: $\delta l \cdot dy$ cu o viteză constantă w_1. Calculul grosimii de deplasare δ^* se obține din expresia ce exprimă legea conservării debitului $\dot{m}$ și anume

$$\dot{m} = \int_0^\delta w_x \, dy = w_1(\delta - \delta^*) \tag{4.54}$$

din care se obține expresia lui δ^* sub forma:

$$\delta^* = \delta - \frac{1}{w_1} \int_0^\delta w_x \, dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy \tag{4.55}$$

Deci cunoscînd sau impunînd legea de variație a vitezei în stratul limită sub forma $w_x/w_1 = f(y/\delta)$, se obține valoarea lui δ^* și implicit grosimea stratului limită δ.

Prin grosimea cantității de mișcare δ^{**} se înțelege grosimea unui strat $(\delta - \delta^{**}) l$ echivalentă din punct de vedere al impulsului cu aceea a stratului limită. Ținînd seama de notațiile din figura 4.8, impulsul masei de gaz în stratul limită δ va fi

$$I = \int_0^\delta \rho w_x^2 \, dy = \rho w_1^2 (\delta - \delta^{**}) \tag{4.56}$$

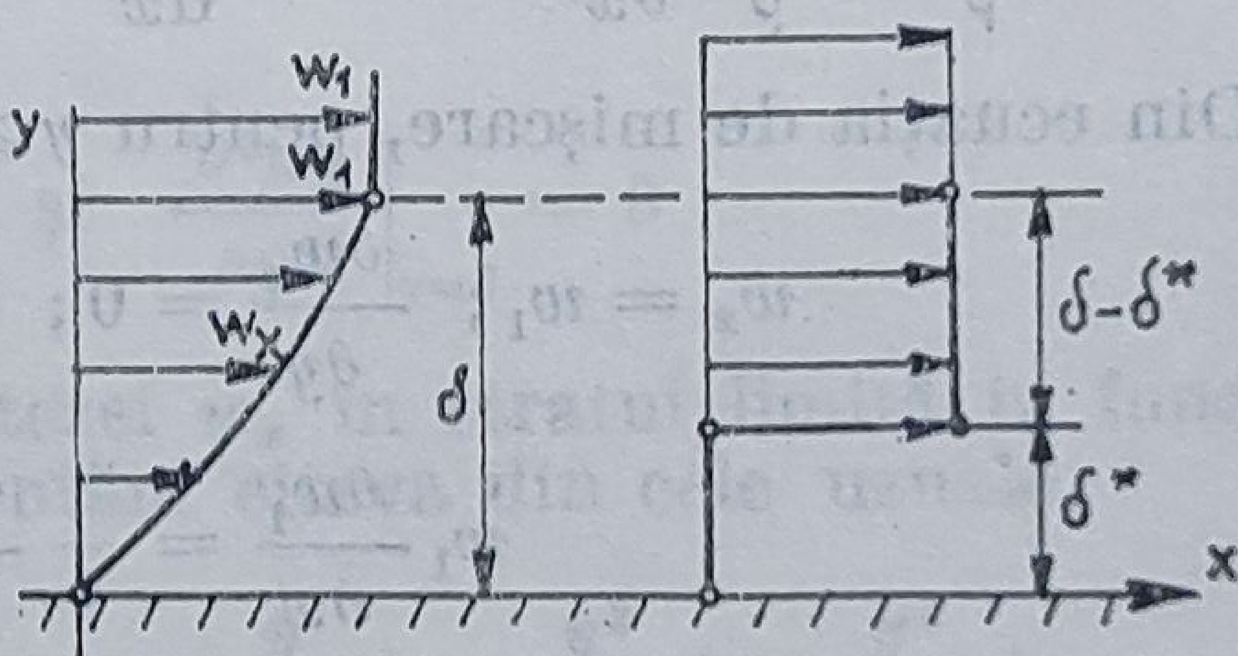


Fig. 4.8. Modelul fizic al grosimii cantității de mișcare δ^{**}

de unde se obține δ^{**} sau diferența $\theta = \delta^{**} - \delta^*$:

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{w_x^2}{w_1^2}\right) dy \tag{4.57}$$

$$\theta = \delta^{**} - \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{w_x^2}{w_1^2}\right) dy - \int_0^\delta \left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{w_x}{w_1} \left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy \tag{4.58}$$

Pentru determigarea lui δ^* se pleacă de la ecuaţia ce exprimă variaţia cantităţii de mişcare pe direcţia x, care pentru unitatea de timp ($d\tau = 1$) devine:

$$\frac{dI}{dx} = \rho w_1 \frac{d\dot{m}}{dx} = -\tau_s - \delta \frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.59}$$

Pentru simplificarea calculelor, care nu afectează exactitatea rezultatului final, s-a considerat că pe distanţa dx nu au loc schimburi energetice între gazul în curgere şi perete şi ca urmare se poate considera că $\rho = \text{const.}$

Ţinînd seama de expresia legii convervării masei şi de aceea a impulsului (figura 4.8), ecuaţia capătă forma

$$-\frac{\tau_s}{\rho} - \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx}[w_1^2(\delta - \delta^* - \theta)] - w_1 \frac{d}{dx}[w_1(\delta - \delta^*)] =$$

$$= w_1 \frac{d}{dx}(\delta - \delta^* - \theta) + 2(\delta - \delta^* - \theta) +$$

$$+ 2(\delta - \delta^* - \theta) w_1 \frac{dw_1}{dx} - w_1 \frac{d}{dx}(\delta - \delta^*) -$$

$$- (\delta - \delta^*) w_1 \frac{dw_1}{dx}$$

sau

$$-\frac{\tau_s}{\rho} - \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -w_1 \frac{d\theta}{dx} + (\delta - \delta^* - 2 \cdot \theta) w_1 \frac{dw_1}{dx}$$

Din ecuaţia de mişcare, pentru $y \geqslant \delta$, se obţine

$$w_x = w_1; \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0$$

$$w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

şi ca urmare, ecuaţia cantităţii de mişcare capătă forma

$$-\frac{\tau_s}{\rho} = -w_1^2 \frac{d\theta}{dx} - (\delta^* - 2\theta) w_1 \frac{dw_1}{dx}$$

$$\frac{\tau_s}{\rho w_1^2} = \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*)\frac{1}{w_1}\frac{dw_1}{dx}$$

Presiunea exterioară pe elementul de strat limită considerat fiind constantă, desigur că $\partial p/\partial x = 0$ şi $dw_1/dx = 0$. Ca urmare, relaţia capătă forma finală

$$\frac{\tau_s}{\rho w_1^2} = \frac{d\theta}{dx} \tag{4.60}$$

Ca exemplu de metodologie de rezolvare a ecuaţiilor stratului limită laminar se prezintă mai jos aşa-numita soluţie Pohlhausen, aplicabilă la determinarea grosimii lui în cazul curgerii unui gaz peste o placă plană. Ipotezele simplificatoare ce stau la baza acestei soluţii sînt :

— curgerea are loc în regim laminar şi fără variaţie de presiune în lungul ei, deci $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$;

— se consideră cunoscută variaţia tensiunii tangenţiale τ_s între gaz şi perete, şi anume aceea dată de relaţia

$$\frac{\tau_s}{\rho} = \nu \frac{\partial w_x}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

— se consideră cunoscută legea de variaţie a vitezei w_x în stratul limită laminar şi anume de forma

$$\frac{w_x}{w_1} = f\left(\frac{y}{\delta}\right); \quad \delta = \delta(x)$$

— curgerea în zona liberă (neturburată) a gazului este potenţială;

— liniile de curent ale gazului sînt aderente atît la placă, cît şi la zona de curgere liberă exprimată prin relaţiile :

— aderenta la placă $\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\bigg|_{y=0} = 0$

— aderenta la zona liberă

$$\frac{\partial w_x}{\partial y}\bigg|_{y=\delta} = 0 \text{ şi } \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\bigg|_{y=\delta} = 0$$

Ecuaţiile ce definesc variaţia vitezei w_x în stratul limită în funcţie de y sînt numeroase, astfel că prezentăm cîteva din cele uzuale :

$$\text{(a)}\ \frac{w_x}{w_1} = \frac{y}{\delta}; \quad \text{(b)}\ \frac{w_x}{w_1} = a_0 + a_1\frac{y}{\delta} + a_2\frac{y^2}{\delta^2} + a_3\frac{y^3}{\delta^3} + \ldots$$

$$\text{(c)}\ \frac{w_x}{w_1} = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y}{\delta}; \quad \text{(d)}\ \frac{w_x}{w_1} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}$$

Pohlhausen adoptă ecuaţia (b), care pentru condiţiile la limită capătă formele

$$\left.\begin{aligned} & w_x\Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\bigg|_{y=0} = 0 \\ & w_x\Big|_{y=\delta} = w_1; \quad \frac{\partial w_x}{\partial y}\bigg|_{y=\delta} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\bigg|_{y=\delta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

Pentru cazurile la limită, se obțin valorile constantelor : $a_0 = 0$; $a_1 = 2$; $a_2 = 0$; $a_3 = -2$; $a_4 = 1$. Deci ecuația Polhausen capătă forma

$$\frac{w_x}{w_1} = 2\frac{y}{\delta} - 2\frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4} ; \tag{4.62}$$

notînd cu $\eta = \frac{y}{\delta}$ (pentru $0 < y < \delta$) și ținînd seama că

$$\theta = \int_0^\delta \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy ; \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{w_x^2}{w_1^2}\right) dy$$

se obțin pentru soluția Pohlhausen ecuațiile

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^\delta \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 [2\eta - 2\eta^3 + \eta_4][1 - 2\eta +$$

$$+ 2\eta^3 - \eta^4] d\eta = \frac{37}{315} \tag{4.63}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{w_x^2}{w_1^2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 [1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4] d\eta = \frac{3}{10} \tag{4.64}$$

Pentru determinarea tensiunii tangențiale τ_s dintre gaz și perete pentru soluția Pohlhausen

$$\frac{\tau_s}{\rho} = \nu \frac{\partial w_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \nu w_1 \frac{2}{\delta} \tag{4.65}$$

iar ecuația cantității de mișcare

$$\frac{\tau_s}{\rho \cdot w_1^2} = \frac{d\theta}{dx} ; \quad \frac{2\mu w_1}{w_1^2 \delta} = \frac{\partial(\delta)}{\partial x} \cdot \frac{\theta}{\delta}$$

$$\frac{37}{315} \cdot \frac{\partial(\delta)}{\partial x} = \frac{2\nu}{w_1 \delta} \tag{4.66}$$

Integrînd relația între 0 și x se obține expresia grosimii stratului limită δ pentru soluția Pohlhausen :

$$\delta^2 = 34 \frac{\nu x}{w_1} ; \quad \delta = 5{,}83 \sqrt{\frac{\nu x}{w_1}} \tag{4.67}$$

Împărțind această relație cu x, se obține expresia lui δ în funcție de criteriul local Re_x al curgerii în secțiunea x :

$$\frac{\delta}{x} = 5{,}73 \sqrt{\frac{\nu}{w_1 x}} = \frac{5{,}83}{Re_x^{1/2}} = 5{,}83 \cdot Re_x^{-1/2} \tag{4.68}$$

Introducînd valoarea lui δ în expresia lui θ, se obţin mărimile caracteristice ale stratului limită laminar :

$$\theta = 0{,}685\left(\frac{\nu x}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}};\quad \delta^* = 1{,}75\left(\frac{\nu x}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}};\quad \tau_s = 0{,}346\,\rho w_1^2\,\mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \tag{4.69}$$

4.10. STRATUL LIMITĂ DINAMIC TRANZITORIU

Liniile de curent ale unui gaz în curgere laminară sînt paralele între ele şi paralele cu suprafaţa în lungul căreia curgerea are loc numai pînă la o anumită valoare a criteriului Reynolds, denumit *criteriul Reynolds critic* (Re_{cr}). La curgeri cu valori $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ are loc trecerea de la regimul de curgere laminar la cel turbulent, ceea ce se materializează prin schimbarea legii de variaţie a vitezei de curgere în funcţie de y. Valoarea lui Re_{cr} depinde de intensitatea perturbaţiilor ce acţionează asupra curgerii.

Trecerea de la regimul de curgere laminar la cel turbulent se datoreşte, din punct de vedere fizic, instabilităţii curgerii laminare. Pierderea stabilităţii curgerii laminare se datoreşte influenţei perturbaţiilor asupra cîmpului de viteză şi de presiune din curent. Dacă aceste perturbaţii se amortizează în timp, curentul se stabilizează devenind din nou laminar, iar dacă, din contră, ele se amplifică, turbulenţa va creşte. Trecerea de la regimul laminar la cel turbulent nu are loc instantaneu, ci într-o perioadă oarecare de timp, ceea ce corespunde unei plaje de valori ale lui Re_{cr} şi anume $\mathrm{Re}_{cr_{min}} \leqslant \mathrm{Re}_{cr} \leqslant \mathrm{Re}_{cr_{max}}$.

Cum valoarea criteriuluil Reynolds, penru o curgere izotermă creşte cu distanţa (pentru o placă plană $\mathrm{Re} = wx/\nu$) înseamnă că o curgere laminară devine teoretic, la o distanţă oarecare, tranzitorie şi apoi turbulentă. Dacă se ţine seama că în termogazodinamică curgerea gazelor este însoţită şi de schimb de căldură cu pereţii canalului, ceea ce va avea ca efect modificarea lui w şi ν, înseamnă că va exista întotdeauna posibilitatea trecerii într-un sens sau altu al caracterului curgerii, anume laminar în turbulent sau invers.

Ţinînd seamă că viscozitatea unui gaz este funcţie de temperatură, există următoarele posibilităţi :

(1) În cazul unui aport de căldură de la pereţi la gaz ($\Delta\nu > 0$; $\Delta x > 0$) pot apare următoarele posibilităţi în funcţie de intensitatea fluxului termic primit de gaz :

$$\frac{\Delta x}{\Delta\nu} > 0;\ \mathrm{Re}_x \text{ creşte};\ \frac{\Delta\delta}{\Delta x} > 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta\nu} = 0;\ \mathrm{Re}_x = \text{Const.};\ \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta\nu} < 0;\ \mathrm{Re}_x \text{ scade};\ \frac{\Delta\delta}{\Delta x} < 0$$

(2) la cedare de căldură de la gaz la pereţi ($\Delta\nu < 0$; $\Delta x > 0$) pot apare următoarele posibilităţi :

$$\frac{\Delta x}{\Delta \nu} \gg 0; \text{ Re}_x \text{ crește rapid}; \quad \frac{\Delta \delta}{\Delta x} \gg 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta \nu} > 0; \text{ Re}_x \text{ crește lent}; \quad \frac{\Delta \delta}{\Delta x} > 0$$

(3) în cazul unei curgeri adiabate ($\Delta\nu = 0$; $\Delta x > 0$)

$$\frac{\Delta x}{\Delta \nu} > 0; \text{ Re}_x \text{ crește}; \frac{\Delta \delta}{\Delta x} > 0$$

În figura 4.9 se prezintă variaţia criteriului Reynolds local la curgerea unui gaz perfect în trei ipoteze şi anume : fig. 4.9 *a* cazul unei curgeri

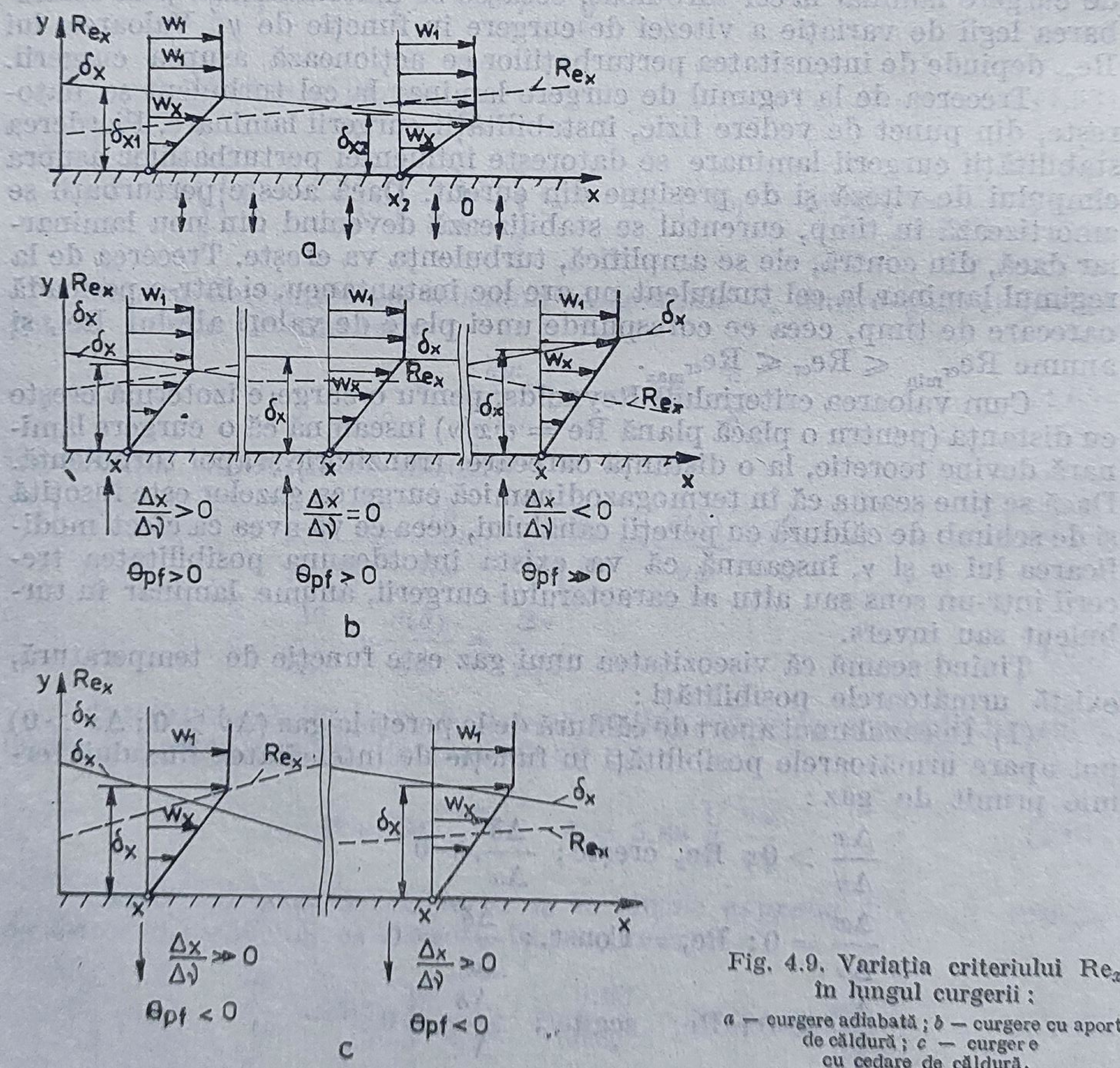


Fig. 4.9. Variaţia criteriului Re_x în lungul curgerii :

a — curgere adiabată ; *b* — curgere cu aport de căldură ; *c* — curgere cu cedare de căldură.

adiabate; fig. 4.9*b* cazul unei curgeri în care gazul este încălzit în timpul curgerii; fig. 4.9 *c*-cazul curgerii cu cedare de căldură la pereți.

Pentru toate cele trei cazuri s-a neglijat lucrul mecanic de frecare a gazului de pereți

Din cele prezentate mai sus și din figura 4.9 se constată că numai în cazul cînd în timpul curgerii gazul primește căldură de la pereți există posibilitatea de a se stabiliza un anumit regim de curgere și anume în cazul cînd $\Delta x/\Delta \nu = 0$. În celelalte cazuri, regimul laminar va trece în regim turbulent, prin regimul tranzitoriu sau invers.

Se introduce, prin analogie cu criteriul Reynolds, noțiunea de „criteriul Reynolds al grosimii δ^*" notat cu Re_{δ^*} dat de relația $Re_{\delta^*} = w_1 \cdot \delta^*/\nu$ care se poate exprima în funcție de Re_x prin ecuația

$$\frac{Re_{\delta^*}}{Re_x} = \frac{\delta^*}{x}$$

Ținînd seama de expresia lui δ^* relația se poate scrie sub forma:

$$Re_{\delta^*} = Re_x\, 1{,}75 \left(\frac{\nu}{w_1 x}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$Re_{\delta^*} = 1{,}75\, \frac{Re_x^{-\frac{1}{2}}}{x} \tag{4.70}$$

Ecuația Navier-Stokes aplicate curgerii unidirecționale a unui gaz a cărei viteză de curgere în zona liberă, notată cu w_1, și care variază în lungul curgerii, deci pe direcția x, are forma

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \tag{4.71}$$

Pentru zona liberă $(y \geqslant \delta)$ sînt îndeplinite condițiile:

$$w_x = w_1; \quad \left.\frac{\partial w_x}{\partial y}\right|_{y \geqslant \delta} = 0 \text{ și } \left.\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right|_{y \geqslant \delta} = 0$$

Ca urmare ecuația Navier-Stokes de mai sus (pentru zona liberă) capătă forma

$$w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.72}$$

care prin integrare devine:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \text{const.} \tag{4.73}$$

Expresia obținută este chiar ecuația Bernoulli, ceea ce arată că în exteriorul stratului limită, presiunea statică în gazul de curgere este depen-

9 — c. 668

dentă numai de viteza de curgere. Deci presiunea statică a gazului se transmite la peretele canalului traversînd stratul limită dinamic.

La $y = 0$ (la perete) $w_x = 0$ şi $w_y = 0$. Ca urmare, ecuaţia curgerii unidirecţionale devine

$$\left. \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{y=0}$$

Curgerea unui gaz peste un perete plan poate avea loc în două situaţii şi anume :

a) curgerea are loc fără variaţie de presiune;
b) curgerea are loc cu variaţie de presiune.

Pentru cazul (a) deci cînd $\partial p/\partial x = 0$, ecuaţia capătă forma

$$\left. \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0; \qquad \left. \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

Ca urmare, tangenta la curba $w_x = w_x(y)$ devine verticală pentru $y \geqslant \delta$, iar profilul de variaţie a vitezei în stratul limită este convex, aşa cum este prezentat în figura 4.10.

Pentru cazul (b) cînd $\partial p/\partial x \gtrless 0$, ecuaţia devine

$$\left. \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} \gtrless 0$$

Deci curba de variaţie a vitezei pentru cazul (b) prezintă un punct de inflexiune (linia punctată), în prima parte fiind concavă, apoi devenind convexă pe măsură ce $y \to \delta$. Ca urmare, apare o deformaţie a profilului de

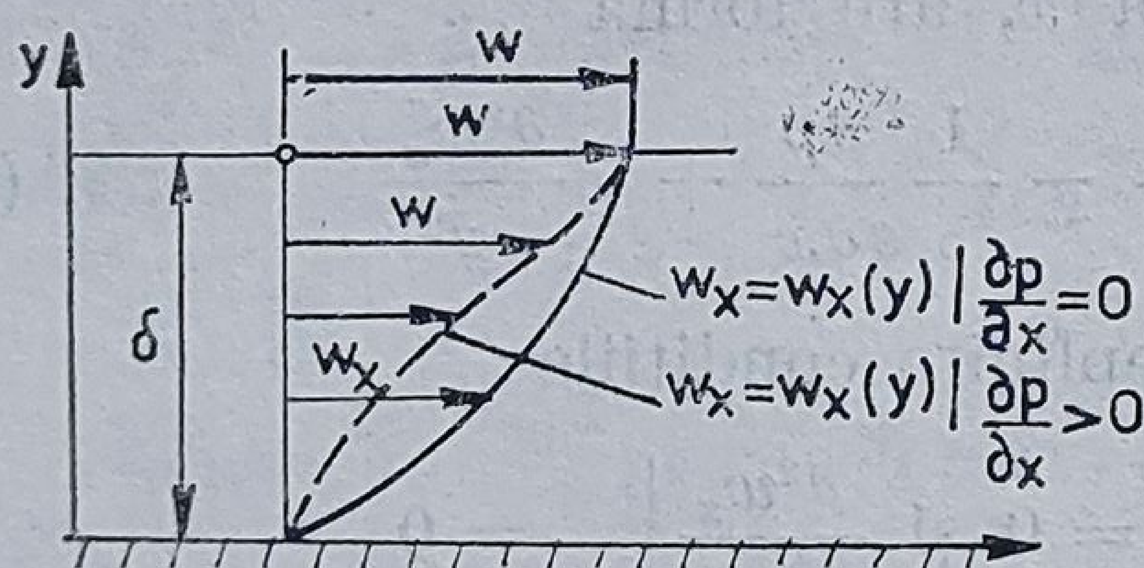


Fig. 4.10. Variaţia vitezei în stratul limită : ——— curgere fără variaţie de presiune ; — — — curgere cu variaţie de presiune.

viteză, iar viteza w_1 la limită devine $\left. w_x \right|_{y=0} = 0$. Deci lîngă perete viteza de curgere fiind egală cu zero înseamnă că lîngă el se va forma un strat de fluid imobil denumită „apă moartă" şi a cărei grosime va depinde de mărimea gradientului de presiune al curgerii în lungul plăcii.

Consecinţa fizică a acestei situaţii va fi apariţia unei instabilităţi a stratului limită ce va duce la desprinderea curentului de gaz de pe suprafaţa de contact, în zona concavă viteza de curgere putînd deveni chiar de sens contrar direcţiei medii de curgere, aşa cum se arată în figura 4.11. Această instabilitate, ce are drept consecinţă o desprindere a curentului, apare la valori ale lui $Re_{\delta*}$ mici, de exemplu pentru o placă plană la $Re_{\delta*} = 420$. Caracterul de instabilitate al stratului limită,

în cazul unei curgeri cu gradient de presiune longitudinal, a fost pus în evidență experimental. S-a constatat că această instabilitate are un caracter periodic, desprinderea liniilor de curent de pe suprafața de curgere avînd chiar o anumită frecvență, a cărei valoare depinde însă de criteriul $Re_{\delta*}$.

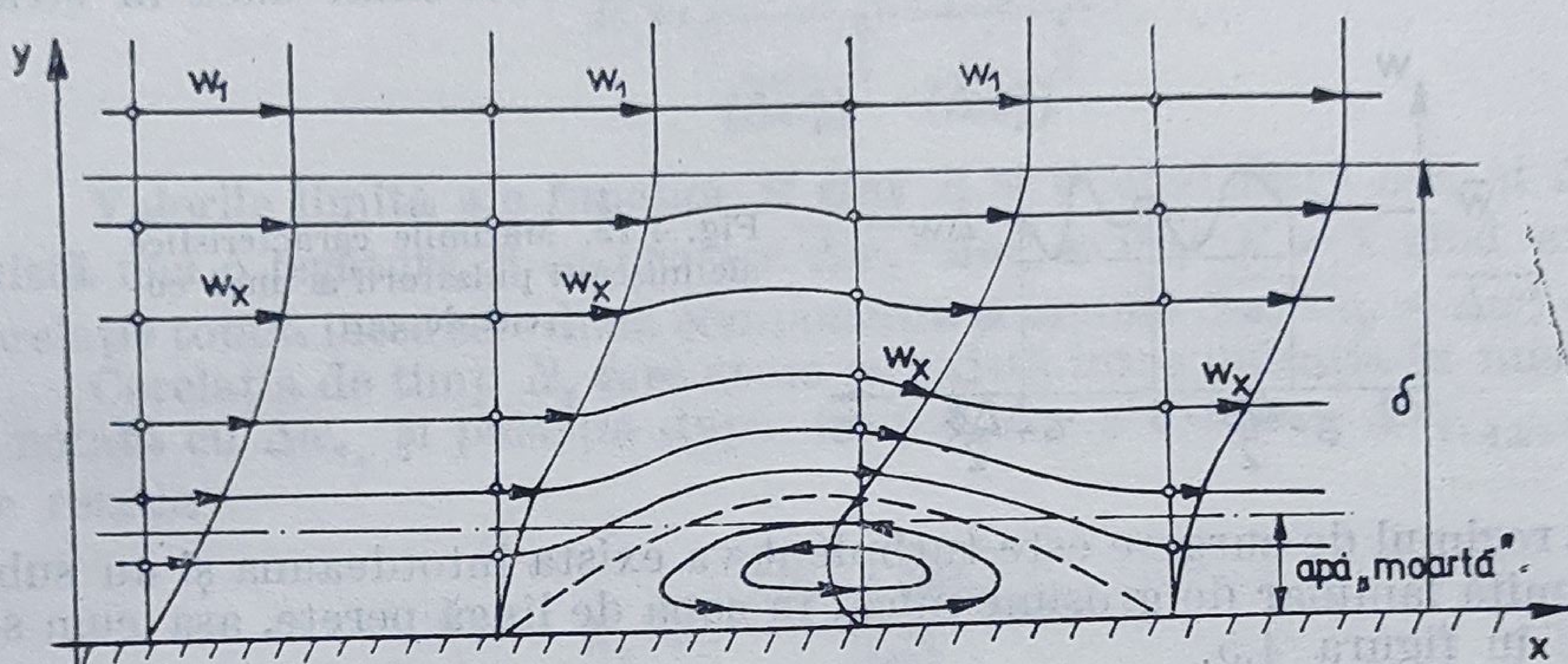


Fig. 4.11. Instabilitatea curgerii în stratul limită.

În cazul unei curgeri cu gradient de presiune negativ, cercetările experimentale au arătat că nu apar fenomene de instabilitate, deci de desprindere a stratului limită. Ca exemplu, în cazul curgerii gazului printr-un ajutaj la care $dp/dx < 0$, instabilitatea nu apare, deci forma secțiunii canalului nu joacă nici un rol, în opoziție cu curgerea printr-un difuzor, unde $dp/dx > 0$ și unde s-a constatat apariția ei, deci dependența procesului gazodinamic de forma secțiunii canalului de curgere.

În cazul curgerii unui gaz în jurul unui corp oarecare, poziția zonei în care presiunea statică are valoarea minimă joacă un rol hotărîtor în determinarea secțiunii de unde începe desprinderea stratului limită de pe suprafață.

În zona unde presiunea statică are pe un profil oarecare valoarea minimă, în acel loc va apare desprinderea curentului și ca urmare perturbarea regimului de curgere.

O altă metodă de a împiedica desprinderea curentului de gaz de un profil constă în practicarea unei fante pentru absorbția unei cantități mici de gaz. Ca urmare, presiunea pe suprafața profilului în secțiunea fantei devine negativă și liniile de curent ce ar fi avut tendința de desprindere se lipsesc de profil.

4.11. STRATUL LIMITĂ DINAMIC TURBULENT LA CURGERE CU VITEZĂ MICĂ ($M < 0,5$)

În cazul curgerii turbulente, în curentul de gaz apar atît deplasări ale particulelor de gaz pe direcția perpendiculară celei de curgere, cît și mișcări pulsatorii. Se notează cu $\overline{w}$ viteza medie de deplasare, cu compo-

nentele $\overline{w}_x$, $\overline{w}_y$ și w_z și cu Δw componenta vitezelor Δw_x, Δw_y și Δw_z a mișcării de pulsație, denumită și fluctuație.

La suprafața de contact cu peretele, componentele mișcării pulsatorii ale particulelor de gaz sînt egale cu zero, iar tensiunile datorate turbulenței au valori foarte mici. Ca urmare mișcarea gazului într-un plan apropiat de perete are loc în regim laminar. Deci chiar dacă în stratul

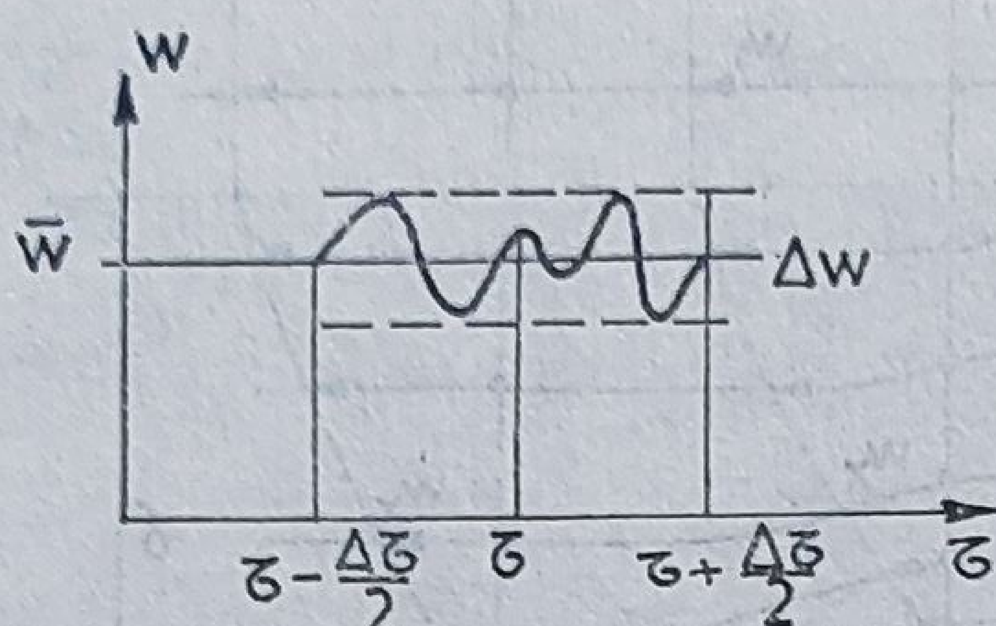


Fig. 4.12. Mărimile caracteristice ale mișcării pulsatorii a unui curent de gaz.

limită regimul de curgere este turbulent va exista întotdeauna și un substrat limită laminar de grosime mică, în zona de lîngă perete, așa cum s-a arătat în figura 4.5.

Ecuațiile de mișcare a gazului în stratul limită turbulent vor trebui să fie exprimate în funcție de viteza și presiunea medie din curent, medierea fiind făcută pe intervale scurte de timp și notate cu $\Delta\tau$. Această condiție este necesară pentru ca relațiile să poată prinde și fluctuațiile particulelor. Ținînd seama de notațiile mărimilor caracteristice ale mișcărilor pulsatorii prezentate în figura 4.12, componenta medie a vitezei pe o direcție oarecare va fi

$$\overline{w}_x = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} w_{xi}\cdot d\tau \left[\frac{m}{s}\right] \qquad (4.74)$$

în care w_{xi} este viteza instantanee dată de expresia

$$w_{xi} = \overline{w}_x + \Delta\overline{w}_x \left[\frac{m}{s}\right] \qquad (4.75)$$

În mod identic se determină componentele w_y și w_z.

Presiunea va fi de asemenea valoarea medie pe același interval de timp, dată de relația

$$\overline{p} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} p_i\, d\tau;\ p_i = p + \Delta p \qquad (4.76)$$

Rezolvarea problemelor ridicate de stratul limită turbulent în care au loc și fenomene pulsatorii se face prin metode statistice. Este necesar,

în primul rînd, a se admite prin ipoteză existenţa unei corelaţii între componentele pulsaţiei Δw_x, Δw_y, Δw_z.

Se notează cu R funcţia de corelaţie între componentele Δw_x şi Δw_y dată de relaţia :

$$R = \frac{\overline{\Delta w_x \cdot \Delta w_y}}{(\overline{\Delta w_x^2})^{\frac{1}{2}} \cdot (\overline{\Delta w_y^2})^{\frac{1}{2}}} \tag{4.77}$$

Valorile limită ale funcţiei R sînt $R = 0$ cînd între Δw_x şi Δw_y nu există nici o legătură şi ca urmare $\overline{\Delta w_x \cdot \Delta w_y} = 0$ şi $R = 1$ cînd există o corelaţie totală între cele două componente şi anume $\overline{\Delta w_x \Delta w_y} = \overline{\Delta w_x^2} = \overline{\Delta w_y^2}$.

Corelaţia de timp R_τ este aceea ce există între pulsaţia în momentul τ notată cu Δw_{x_τ} şi pulsaţia după timpul $\Delta\tau$ şi anume $\Delta w_{x_{\tau+\Delta\tau}}$, dată de relaţia

$$R_\tau = \frac{\overline{\Delta w_{x_\tau} \cdot \Delta w_{x_{\tau+\Delta\tau}}}}{\overline{\Delta w_{x_\tau}^2}} \tag{4.78}$$

Prin coerelaţia R_y dată de expresia următoare se înţelege aceea ce există între Δw_x (pulsaţia la abscisa x) şi Δw_{xy} (pulsaţia la abscisa x şi ordonata y) deci în alt punct al planului xy :

$$R_y = \frac{\overline{\Delta w_x \cdot \Delta w_{xy}}}{\overline{\Delta w_x^2}} \tag{4.79}$$

Fenomenele ce au loc în stratul limită turbulent nu pot fi rezolvate în totalitate pe baza teoriei statistice, din care cauză se face apel fie la metodele bazate pe teoria lungimii de amestec, a analogiilor Reynolds sau Taylor-Prandtl, fie la ecuaţiile de mişcare a gazului, presupunînd cunoscut profilul de viteză în zona turbulentă a stratului limită. Valorile instantanee ale componentelor vitezei de curgere pentru regimul turbulent sînt :

$$w_x = \overline{w}_l + \Delta w_x ; \quad w_y = \overline{w}_y + \Delta w_y ; \quad w_z = \overline{w}_z + \Delta w_z$$

Ecuaţia Navier-Stokes şi a continuităţii (înmulţită cu $\rho \cdot w_x$) pentru regimul permanent stabilizat şi direcţia x este

$$\rho \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + \rho w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{4.80}$$

$$\left| \rho \cdot w_x \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right|_{\rho = \text{Const.}} \tag{4.81}$$

Prin adunare membru cu membru a relaţiilor de mai sus se obţin relaţiile :

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \rho \frac{\partial (w_x^2)}{\partial x} + \rho \frac{\partial (w_x w_y)}{\partial y} + \rho \frac{\partial (w_x w_z)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} - \rho w_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau - \rho_{xy} w_x w_y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} - \rho w_x \cdot w_z) \tag{4.82}$$

Ţinînd seama de pulsaţii, relaţia capătă forma

$$\rho \frac{\partial}{\partial \tau}(\overline{w}_x + \Delta w_x) = \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} - \rho \overline{w}_x^2 - \rho \cdot \Delta w_x^2 - 2\rho \overline{w}_x \cdot \Delta w_x) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} - \rho \overline{w}_x \overline{w}_y - \rho \cdot \Delta w_x \Delta w_y - \rho \overline{w}_x \Delta w_u - \rho \Delta w_x \cdot \overline{w}_y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} - \rho \overline{w}_x \cdot w_z - \rho \Delta w_x \Delta w_z - \rho \overline{w}_x \Delta w_z - \rho \Delta w_x \overline{w}_z). \tag{4.83}$$

Deoarece termenii acestei relaţii reprezintă valorile medii ale mărimilor respective în intervalul de timp $\Delta\tau$, pulsaţiile medii vor deveni egale cu zero ($\overline{\Delta w_x} = 0$; $\overline{\Delta w_y} = 0$ etc.) şi ca urmare relaţia se simplifică căpătînd forma :

$$\rho \frac{\overline{\partial w_x}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} - \rho \overline{w_x^2} - \rho \overline{\Delta w_x^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} - \rho \overline{w}_x \overline{w}_y -$$

$$- \rho \overline{\Delta w_x \Delta w_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} - \rho \cdot \overline{w}_x \overline{w}_z - \rho \overline{\Delta w_x \Delta w_z}) \tag{4.84}$$

Dacă se înlocuiesc componentele instantanee ale vitezei prin valorile lor medii, iar forţele şi tensiunile p_{xx}, τ_{yx}, τ_{zx} cu expresiile date mai jos, se constată că ecuaţiile Navier-Stockes ale curgerii în regim laminar se pot aplica şi în cazul unei curgeri în regim turbulent :

$$p_{xx} \to (p_{xx} - \rho \overline{\Delta w_x^2}); \quad \tau_{yx} \to (\tau_{yx} - \rho \cdot \overline{\Delta w_x \Delta w_y})$$

$$\tau_{zx} \to (\tau_{zx} - \rho \overline{\Delta w_x \Delta w_z})$$

în care : $-\rho\overline{\Delta w_z^2}$; $-\rho\overline{\Delta w_x \Delta w_y}$ şi $-\rho\overline{\Delta w_x \Delta w_z}$ sînt componentele forţelor Reynolds (transferul cantităţii de mişcare datorită turbulenţei, iar p_{zx} ; τ_{yx} şi τ_{zx} reprezintă transferul cantităţii de mişcare la nivel molecular.

Ecuaţia continuităţii se scrie pentru regimul turbulent sub aceeaşi formă ca pentru cel laminar, cu condiţia ca în locul vitezelor instantanee să se introducă componentele vitezelor medii în funcţie de valorile medii ale pulsaţiilor în intervalul de timp $\Delta\tau$. În aceste condiţii ecuaţia continuităţii capătă forma

$$\left|\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right|_{\Delta w_x=\Delta w_y=\Delta w_z}=0$$

Ecuaţia cantităţii de mişcare a stratului limită turbulent are aceeaşi formă ca în cazul stratului limită laminar, cu diferenţa că tensiunea superficială la perete τ_s şi legea de distribuţie a vitezelor în substratul laminar şi stratul turbulent vor fi date de alte expresii. Rezolvarea ecuaţiilor se face folosind aceeaşi metodă ca la stratul limită dinamic laminar.

Se dă un exemplu de metodă de rezolvare a ecuaţiilor. Se consideră :

a) este cunoscută legea de distribuţie a vitezei în zona turbulentă a stratului limită turbulent şi tensiunea superficială τ_s pentru curgerea printr-o conductă circulară dată de expresia

$$\frac{w_x}{w_1}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7};\quad \tau_s=0{,}0395\,\rho\overline{w}^2\,\mathrm{Re}^{-\frac{1}{4}}$$

b) este cunoscută legea de distribuţie a vitezei în zona laminară a stratului limită turbulent şi tensiunea superficială τ_s dată de expresiile :

$$\frac{w_x}{w_{\mathrm{lam}}}=\frac{y}{\delta_{\mathrm{lam}}};\quad \tau_s=\mu\frac{w_{\mathrm{lam}}}{\tau_{\mathrm{lam}}}$$

În aceste condiţii, integrarea ecuaţiilor de curgere, continuităţii, etc. pentru stratul limită turbulent se poate face, dacă se admit ipoteze simplificatoare, sau cu soluţia Pohlhausen. Rezolvarea problemei cu soluţia Pohlhausen presupune un gradient de presiune nul în direcţia de curgere ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x=0$), dar rezultatele sînt valabile (cu o eroare acceptabilă) şi în cazul unei curgeri cu gradient de presiune ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x\gtrless 0$) însă pentru valori ale criteriului Reynolds mai mici de $6\cdot 10^6$.

Ca exemplu de rezolvare se acceptă soluţia Pohlhausen care admite prin ipoteză

$$\frac{\tau_s}{\rho\cdot w_1^2}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x};\quad \frac{w_x}{w_1}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Atunci

$$\tau_s=0{,}0233\,\rho w_1^2\left(\frac{w_1\delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

În aceste condiții, folosind relațiile găsite la stratul limită dinamic laminar, se obține :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} dy = \frac{\delta}{8}$$

de unde se obține θ :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy = \int_0^\delta \left[\frac{w_x}{w_1} - \left(\frac{w_x}{w_1}\right)^2\right] dy$$

$$\theta = \int_0^\delta \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}}\right] dy = \frac{7}{12}\delta$$

Integrînd de la 0 la x, se obține grosimea stratului limită turbulent :

$$\frac{\tau_s}{\rho w_1^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{7}{12}\frac{d\delta}{\partial x}; \quad 0{,}0233\left(\frac{w_1 \cdot \delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{\tau_s}{\rho \cdot w_1^2} = \frac{7}{12}\frac{d\delta}{dx}$$

Deci :

$$\frac{d\delta}{dx} = 0{,}239\left(\frac{\nu}{w_1 \delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^\delta \delta^{\frac{1}{4}}\, d\delta = \int_0^x 0{,}239\left(\frac{\nu}{w_1}\right)^{\frac{1}{4}} dx$$

$$\delta^{\frac{5}{4}} = 0{,}239\left(\frac{\nu}{w_1}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x$$

$$\frac{\delta}{x} = 0{,}379\left(\frac{\nu}{w_1 x}\right)^{\frac{1}{5}} = 0{,}379 \cdot \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{5}}$$

Grosimea substratului limită laminar pentru un regim turbulent, notată cu δ_L și prezentat în figura 4.5, se determină admițînd că relațiile folosite mai sus pentru substratul turbulent, referitoare la variația lui w_x și a lui τ_s sînt valabile și pentru el. Astfel, notînd cu w_L viteza de curgere a gazului în substratul laminar, se obține :

— pentru $0 < y \leq \delta_L$ $\quad \frac{w_x}{w_L} = \frac{y}{\delta_L}$; $\tau = \frac{w_L}{\delta_L}$

— pentru $\delta_L < y < \delta$: $\frac{w_x}{w_1} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$; $\tau_s = 0{,}0233\,\rho w_1^2 \left(\frac{w_1\delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}$

— pentru $y = \delta_L$: $w_x = w_L$; $\frac{w_L}{w_1} = \left(\frac{\delta_L}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$;

$$\mu \frac{w_L}{\delta_L} = 0{,}0233 \cdot \rho w_1^2 \left(\frac{w_1\delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

Deci:

$$\frac{w_L}{w_1} = 0{,}0233\,\frac{\delta_L}{\delta}\left(\frac{w_1\,\delta}{\nu}\right)^{\frac{3}{4}} = 0{,}0233\left(\frac{w_L}{w_1}\right)^{\frac{1}{7}}\left(\frac{w_1\delta}{\nu}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\left(\frac{w_L}{w_1}\right)^{\frac{1}{7}} = 0{,}0233\left(\frac{w_1\delta}{\nu}\right)^{\frac{3}{4}};\quad \frac{w_L}{w_1} = 1{,}87\left(\frac{w_1\delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{8}}$$

$$\frac{\delta_L}{\delta} = \left(\frac{w_L}{w_1}\right)^7 = 1{,}80\left(\frac{w_1\delta}{\nu}\right)^{-\frac{7}{8}}$$

şi:

$$\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} = 0{,}152 \cdot w_1\left(\frac{w_1 \cdot \delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{8}}$$

$$\frac{\delta_L}{\delta}\left(\frac{\tau_s}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = 80 \times 0{,}152 \cdot w_1\left(\frac{w_1 \cdot \delta}{\nu}\right)^{-\frac{8}{8}}$$

$$\delta_L\left(\frac{\tau_s}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = 12 w_1\delta\left(\frac{w_1\ \delta}{\nu}\right)^{-1}$$

$$\delta_L = \frac{12 \cdot \nu}{\left(\frac{\tau_s}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

4.12. STRATUL LIMITĂ DINAMIC TURBULENT LA CURGERE SUBSONICĂ CU VITEZĂ MARE ($1 > M > 0{,}5$)

În cazul curgerii gazelor cu viteze ce corespund unei cifre Mach $>0{,}5$, odată cu micşorarea vitezei de curgere în stratul limită, datorită fenomenului de frînare a curentului, apar modificări esenţiale ale mărimilor termofizice ale gazului de care nu s-a ţinut seama pînă acum.

De exemplu, expresia tensiunii superficiale τ_s dată de Newton $\tau_s = \mu(\partial w/\partial y)$ arată că ea este o funcție de viscozitate și în ultimă analiză de temperatură. Cum temperatura momentană a unui gaz depinde de viteza de curgere, valoarea lui τ în stratul limită va fi variabilă.

Expresia viscozității dinamice a unui gaz este

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{5}} \frac{T_0 + C}{T + C} \tag{4.85}$$

în care constanta C depinde și ea de temperatură. De exemplu, pentru aer, între temperaturile de 293 și 393 K valoarea constantei este $C = 0{,}75$, iar între 573 și 673 K ea este $C = 0{,}65$.

Deci influența frînării gazului în stratul limită dinamic este mult simțită de parametrii termofizici ai lui.

Caracteristica vitezelor mari de curgere este atît criteriul Mach, cît și cele două expresii complimentare ale lui și anume M_{cr} și M_{max}. Ca urmare și mărimile caracteristice ale stratului limită, în cazul curgerilor cu viteză mare, trebuie să fie explicitate în funcție de aceste criterii.

Ecuația impulsului pentru stratul limită dinamic turbulent este

$$\tau_s + \delta \frac{dp}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho_x w_x dy + w_1 \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho_x w_x\, dy \tag{4.86}$$

iar ecuația lui Bernoulli $\frac{dp}{dx} = -\rho_1 w_1 \frac{dw_1}{dx}$ (4.87)

Introducînd expresia Bernoulli în aceea a impulsului, ea capătă forma

$$w_1 \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho_x w_w dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho_x w_1 w_x dy - \frac{dw_1}{dx}\int_0^\delta \rho_x \cdot w_x \cdot dx,$$

care se poate aranja convenabil, devenind

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho_x \cdot w_x(w_1 - w_x)\, dy + \frac{dw_1}{dx}\int_0^\delta (\rho_1 w_1 - \rho_x w_x)\, dy = \tau_s \tag{4.88}$$

în care ρ_1 este densitatea medie a gazului în zona liberă a curentului, iar ρ_x densitatea în stratul limită turbulent. Se consideră, pentru simplificare, variația densității dată de aceeași lege cu variația temperaturii în stratul limită termic.

Ţinînd seamă de expresiile lui δ^* şi θ date în relaţiile de mai sus şi anume

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho_x \cdot w_x}{\rho_1 \cdot w_1}\right) dy \quad \text{şi} \quad \theta = \int_0^\delta \frac{\rho_x w_x}{\rho_1 w_1} \left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right) dy$$

se obţine forma generală a ecuaţiei impulsului :

$$\frac{d}{dx}(\theta \rho_1 w_1^2) + \delta^* \rho_1 w_1 \frac{dw_1}{dx} = \tau_s$$

$$\frac{d\theta}{dx} + (\delta^* + 2\theta) + \frac{1}{w_1}\frac{dw_1}{dx} + \frac{\theta}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} = \frac{\tau_s}{\rho_1 w_1^2}$$

Ţinînd seama de expresia criteriului Mach maxim

$$M_{max} = \frac{w_1}{w_{max}} = \frac{w_1}{\sqrt{kRT_0}}$$

în care T_0 este temperatura frînată a curentului de gaz, iar ρ_1 are expresia

$$\rho_1 = \rho_0 (1 - M_{max}^2)^{\frac{1}{k-1}}$$

relaţia impulsului, scrisă în funcţie de criteriul Mach maxim, capătă forma

$$\frac{d\theta}{dx} + \left[\delta^* + 2\theta \left(1 - \frac{1}{k-1} \frac{M_{max}^2}{1 - M_{max}^2}\right.\right] \frac{1}{M_{max}} \frac{dM}{dx} = \frac{\tau_s}{\rho_1 w_1} \qquad (4.89)$$

care se poate exprima şi în funcţie de criteriul Mach, ştiind că :

$$M_{max} = \frac{M}{\sqrt{\frac{2}{k-1} + M^2}}$$

În cazul curgerilor supersonice sau transonice cu $M \geq 1$, în stratul limită dinamic va apare unda de şoc. În stratul limită şi în unda de şoc au loc interacţiuni reciproce care duc la modificarea formei şi poziţiei acestuia.

După cum s-a arătat, în cazul cînd curgerea unui gaz peste o suprafaţă are loc cu gradient de presiune axial pozitiv ($dp/dx > 0$) apare un

fenomen de instabilitate a stratului limită ce aduce după sine o desprindere a lui de perete. În frontul unei unde de şoc apare un gradient important de presiune, care se transmite în curentul subsonic de gaz din stratul limită.

Ca urmare δ (repsectiv δ^* şi θ) creşte brusc în regiunea saltului de compresiune, care are ca efect fizic o deviere a liniilor de curent din zona liberă a curgerii, precum şi o desprindere a stratului limită dinamic de pe perete. Cercetările experimentale au arătat că pentru curgeri supersonice dar cu valori mici ale cifrei Mach, de exemplu pentru $M = 1,1$ grosimea stratului δ^* devine în frontul undei de şoc de 5 ori mai mare decît cel ce ar apare în absenţa undei de şoc.

4.13. STRATUL LIMITĂ DINAMIC LA CURGEREA GAZELOR PRIN CONDUCTE CIRCULARE

Se consideră pentru exemplificare curgerea unui gaz printr-o conductă circulară, aşa cum se vede în figura 4.13. Mărimile frînate ale gazului sînt notate cu ρ_0, T_0, p_0 etc., iar cele din secţiunea de intrare cu w_a, ρ_a, p_a, T_a etc. După cum se ştie

$$M_{max} = \frac{w}{w_{max}} = M_{cr}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$$

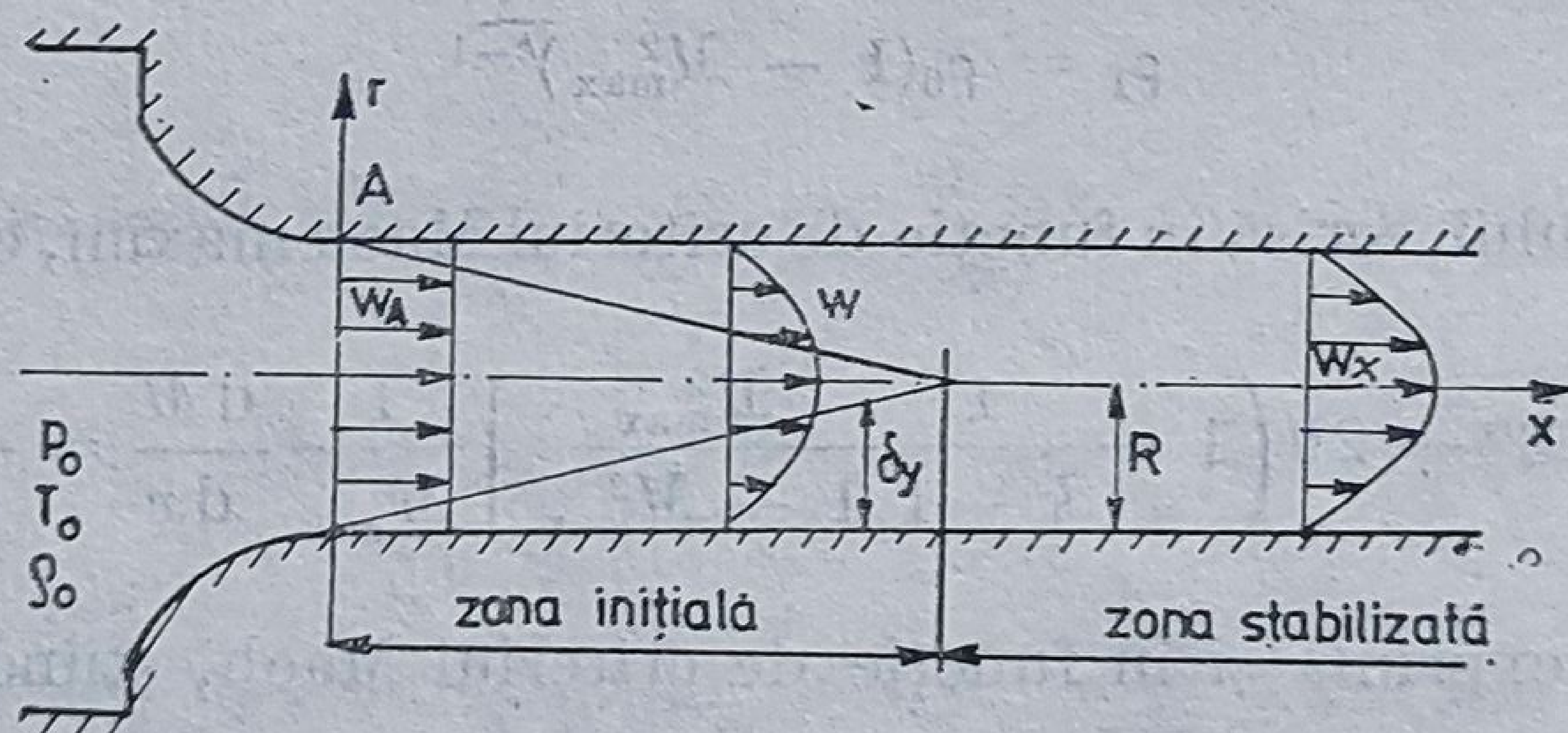


Fig. 4.13. Stratul limită la curgerea gazelor prin conducte circulare.

Valorile mărimilor caracteristice ale gazului la intrarea în conductă vor fi dat de relaţiile cunoscute

$$M_{max_a} = \frac{w_a}{w_{max_a}}\ ;\quad p_a = p_0(1 - M^2_{max_a})^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\rho_a = \rho_0(1 - M^2_{max_a})^{\frac{1}{k-1}};\quad T_a = T_0(1 - M^2_{max_a})$$

Pînă la stabilizarea regimului de curgere a gazului, care are loc pe o lungime inițială egală cu x_{cr}, grosimea stratului limită δ_y crește. Se consideră că în timpul curgerii, între gaz și perete nu are loc schimb de căldură și se neglijează lucrul mecanic de frecare. Ca urmare temperatura frînată a gazului are aceeași valoare în oricare secțiune. Deci se poate scrie :

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p} = \text{const.}$$

Ecuațiile impulsului și a continuității, aplicate secțiunii inițiale A (în care R este raza conductei, iar r raza curentă), sînt

$$d(2\pi)\int_0^R (\rho w^2 r dr + \pi R p) = 2\pi R \tau_p dx$$

$$\dot{m} = \pi R^2 \rho_a w_a = 2\pi \int_0^R \rho w r dr$$

Considerînd că prin conducta circulară curge un gaz perfect, sînt valabile relațiile

$$p = \rho \cdot R_g \cdot T ; \ \mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^q ; \ \frac{T}{T_0} = 1 - \mathrm{M}^2_{\max} \left(\frac{a}{w_{\max}}\right)^2 \qquad \text{(a și b)}$$

în care R_g este constanta generală a gazului iar q o putere oarecare, care pentru gazul perfect se poate lua egală cu 0,2.

Ținînd seama de aceste relații, ecuațiile impulsului și continuității se pot scrie sub forma adimensională, și anume

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4k}{k-1}\mathrm{M}^2_{\max}\int_0^1 \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{w}{w_{ax}}\right)^2 \bar{r} \cdot dr + \frac{p}{p_0}\right) = \frac{\bar{\tau}_p}{p_0} \qquad \text{(c)}$$

$$\frac{\dot{m}}{\pi R^2 \rho_0 w_{\max}} = \mathrm{M}_{\max a}\,(1 - \mathrm{M}_{\max a})^{\frac{1}{k-1}}$$

$$= 2\mathrm{M}_{\max}\int_0^1 \frac{\rho}{\rho_0}\frac{w}{w_{ax}}\bar{r} \cdot dr \qquad \text{(d)}$$

în care : $\bar{r} = \frac{r}{R}$; $\bar{x} = \frac{x}{R}$; $\frac{p_0}{\rho_0 w^2_{\max}} = \frac{k-1}{2k}$

S-au obţinut patru ecuaţii (a), (b), (c) şi (d) cu cinci mărimi adimensionale necunoscute : $M_{max} T/T_0$, ρ/ρ_0, p/p_0 şi δ. Cea de a cincea ecuaţie este

$$\frac{p}{p_0} = (1 - M_{max}^2)^{\frac{k}{k-1}}$$

în care $M_{max_a} = w_a/w_{max}$, [iar $M_{max} = w/w_{ax}$] (unde [w_{az}] este viteza gazului în axa conductei).

4.14. STRATUL LIMITĂ DINAMIC AL MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT

În cazul curgerii unui mediu bifazic printr-un canal, trebuie să se ţină seama de schimburile energetice interfazice ce au loc în stratul limită dinamic.

Pe de altă parte diferenţa dintre viteza de deplasare (de curgere) a picăturilor de lichid şi a vaporilor, atît în zona liberă, cît şi în stratul limită, duce la interacţiuni mecanice între cele două faze.

Picăturile de lichid din stratul limită, ca urmare a apariţiei unui gradient de viteză în faza gazoasă de antrenare, îşi micşorează viteza şi ca urmare o parte din energia cinetică a picăturilor este cedată vaporilor.

Schimburile energetice interfazice sub formă de căldură şi de energie cinetică aduc după sine atît o creştere a vitezei de curgere a fazei gazoase, cît şi o instabilitate a stratului limită dinamic.

Ca urmare a măririi vitezei de curgere a fazei de vapori, apar două fenomene şi anume :

— picăturile de lichid, ca urmare a forţelor de frecare interfazice capătă o mişcare de rotaţie ce duce şi la apariţia unor mişcări perpendiculare pe direcţia de curgere ;

— ca urmare a acestei mişcări a picăturilor de lichid ce se găsesc în stratul limită, vor apărea zone de concentraţie diferită a lor în amestecul bifazic în lungul curgerii.

Problema cea mai dificilă a stratului limită dinamic în mediu bifazic este determinarea cantitativă a proceselor interfazice de schimb de căldură şi de masă ce au loc în el. S-a constatat, experimental, că în diferite puncte ale unei secţiuni de curgere apar în stratul limită variaţii ale parametrilor termofizici ai celor două faze (ca, de exemplu, viteza, temperatura momentană, presiunea, temperatura frînată etc.), ceea ce arată că în el apar zone în care mediul bifazic se găseşte în stare de dezechilibru.

Toate schimburile energetice interfazice, de exemplu cele de energie cinetică, de căldură, de masă etc, au loc la diferenţe finite ale parametrilor caracteristici ai formei de energie respective, deci sînt procese ireversibile

ce duc la pierderi suplimentare faţă de cele ce au loc la curgerea gazelor perfecte.

Ca urmare a existenţei acestor procese de dezechilibru, nu se pot obţine ecuaţii care să descrie cu exactitate variaţia vitezei în stratul limită. Rezolvarea experimentală a problemei este şi mai dificilă, avînd în vedere că neexistînd ecuaţii analitice, realizarea similitudinii schimbărilor de fază ce au loc în stratul limită nu este posibilă.

Problema se simplifică şi se identifică cu cea prezentată la gaze, numai dacă se admit următoarele ipoteze:

1. Temperaturile momentane rămîn constante şi egale cu temperatura de saturaţie pe toată grosimea stratului limită.
2. Presiunea statică are o valoare constantă în stratul limită.
3. Se neglijează schimbul energetic interfazic sub formă de căldură, energie cinetică sau lucru mecanic.

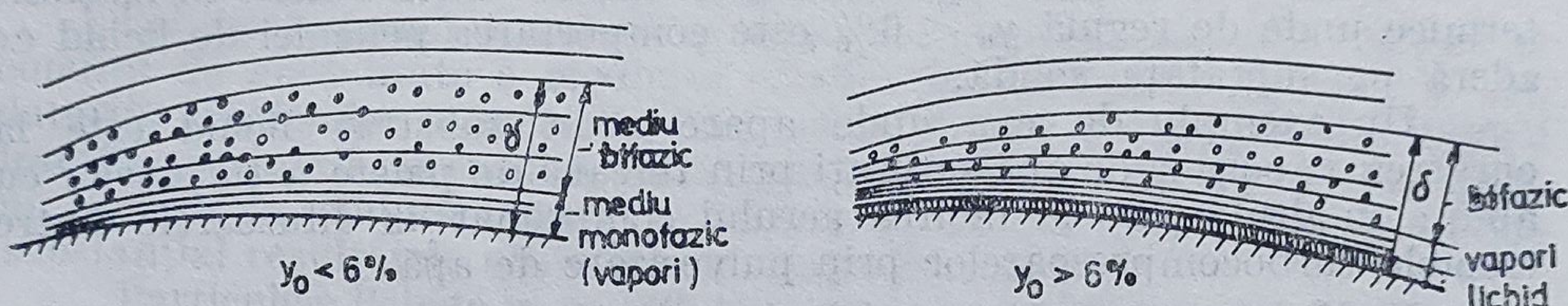


Fig. 4.14. Modelul fizic al stratului limită dinamic al mediilor bifazice monocomponente.

În figura 4.14 sînt prezentate modelele fizice adoptate pentru studiul straturilor limită ale amestecurilor bifazice, pentru o umiditate $y_0 < 6\%$ şi $y_0 > 6\%$.

Pentru umidităţi $y_0 < 6\%$, pe suprafaţa peretelui solid se formează un substrat monofazic şi anume numai de vapori saturaţi, deoarece picăturile de lichid ce au existat iniţial în el s-au vaporizat ca urmare a procesului de frînare a curentului în stratul limită şi deci de ridicare a temperaturii lui. Deasupra acestui substrat se găseşte stratul limită de mediu bifazic (la stare de saturaţie) şi cum picăturile de lichid au dimensiuni diferite şi vitezele de deplasare a lor vor fi diferite, atît ca mărime cît şi ca direcţie. Ca urmare a celor prezentate mai înainte, concentraţia mediului în fază lichidă variază pe direcţia normală la direcţia de curgere. Deci în stratul limită al unui mediu bifazic apare atît o variaţie de viteză cît şi una de concentraţie. Cu cît linia de curent este mai aproape de perete, cu atît concentraţia mediului în lichid este mai mică, ajungînd la valoarea normală numai în zona liberă. Se poate trage deci concluzia că între variaţia vitezei în stratul limită şi variaţia concentraţiei trebuie să existe o analogie. S-a constatat experimental că în zonele unde se produce fenomenul de desprindere a stratului limită de pe perete apare o peliculă instabilă de lichid lipită de el, dar care se evaporă imediat ce dispare fenomenul de desprindere.

Pentru umidităţi $y_0 > 6\%$ stratul limită este format din trei substraturi şi anume unul monofazic lichid, aderent la perete şi care se depla-

sează lent în direcţia de mişcare a mediului, apoi unul monofazic numai de vapori, şi apoi al treilea, bifazic. Ultimele două au aceleaşi caracteristici ca şi cele văzute în cazul cînd $y_0 < 6\%$.

Mărimea caracteristică a procesului de trecere a unei faze în cealaltă este coeficientul de echilibru r, dat de relaţia

$$r = \frac{h_p - h}{h_0 - h} \tag{4.90}$$

în care h_p este entalpia mediului la perete; h_0 — entalpia frînată în zona liberă a curentului; h — entalpia momentană a curentului în stratul limită.

Cînd temperatura mediului bifazic la perete devine egală cu aceea de saturaţie, $r \to 0$, deci apare fenomenul de condensare a fazei de vapori, iar dacă $r \to 1$, faza lichidă dispare, ea trecînd în fază gazoasă.

Problema cea mai importantă a stratului limită bifazic în maşinile termice unde de regulă $y_0 < 6\%$ este comportarea peliculei de lichid ce aderă pe suprafaţa solidă.

Un exemplu de caz unde apare acest substrat lichid este la curgerea vaporilor de apă saturaţi prin reţeaua de palete a turbinelor cu abur; un altul apare la răcirea aerului comprimat în difuzoarele dintre treptele turbocompresoarelor prin pulverizare de apă.

După cum s-a arătat mai înainte fenomenul de separare a fazelor apare la suprafaţa solidă, unde picăturile de lichid se aglomerează sub forma unei pelicule continui. Viteza de creştere a grosimii peliculei de lichid este direct proporţională cu viteza de formare a centrelor de condensare, adică depinde de nuclee lichide ce apar în unitatea de volum de vapori.

Masa de lichid dm_l ce se formează în timp pe suprafaţa scăldată de mediul bifazic, al cărui volum este $V = \delta_l lx$, se obţine cu expresia

$$\frac{dm_l}{d\tau} = \rho_l \frac{dV}{d\tau} = \rho_l lx \frac{d\delta_l}{d\tau} \tag{4.91}$$

în care δ_l este grosimea stratului de lichid; l — lăţimea lui; ρ = densitatea lichidului. Prin condensarea vaporilor, ce vor forma stratul de lichid de grosime δ_l, se degajă o cantitate de căldură Q_l, dată de relaţia

$$r \frac{dm_l}{d\tau} = - lx\lambda_v \frac{dT}{dy}\bigg|_{y=\delta_l} \tag{4.92}$$

în care λ_v este conductivitatea termică a vaporilor; r — căldura de vaporizare; y = ordonata pe normală la suprafaţa peliculei de lichid. Se admite că temperatura în peliculă variază liniar între temperatura de saturaţie T_s egală cu temperatura mediului bifazic şi temperatura T a peretelui pe care s-a format pelicula de lichid. Deci se poate scrie relaţia

$$\frac{dT}{dy} = - \frac{T_s - T}{\delta_l}$$

Ca urmare relaţia ce exprimă masa de lichid ce se formează la perete capătă forma

$$\frac{dm_l}{d\tau} = \rho_l \, l \, x \frac{d\delta_l}{d\tau} = \frac{1}{r} \, l \, x \, \lambda_v \frac{T_s - T}{\delta_l}$$

$$\frac{d(\delta_l^2)}{d\tau} = \frac{2\lambda(T_s - T)}{\rho_l r} \tag{4.93}$$

Pentru o curgere în regim permanent stabilizat, $d\tau = dx/w_l$. Ca urmare, creşterea grosimii stratului limită bifazic este dată de relaţia

$$\frac{d(\delta_l^2)}{dx} = \frac{2\lambda_v(T_s - T)}{\rho_l r w_l} \tag{4.94}$$

în care w_l este viteza de curgere a peliculei lichide.

Relaţia exprimă totodată şi creşterea grosimii peliculei lichide în condiţii de imobilitate a mediului bifazic. În condiţii de curgere a lui, datorită tensiunilor tangenţiale interfazice, forţele gravitaţionale, frecării interne şi frînării curentului, fenomene ce au loc în stratul limită, apare un schimb de căldură între faza lichidă şi cea de vapori, care modifică substanţial rezultatele obţinute cu relaţia de mai sus.

Particulele lichide ce se află în contact cu peretele solid fiind antrenate de mediul bifazic vor consuma din energia cinetică a acestuia şi ca urmare teoria stratului limită va fi la rîndul ei influenţată de acest proces mecanic. Aceste interacţiuni mecanice depind atît de natura mediului cît şi a peretelui.

S-a constatat experimental că la curgerea unui mediu bifazic peste o placă plană, în prima parte a ei curgerea este laminară, iar pelicula de lichid ce se formează este foarte subţire. Cu creşterea vitezei medii de curgere a mediului bifazic, apare o mişcare ondulatorie în pelicula de lichid, deci un regim tranzitoriu, care trece destul de uşor în regim turbulent.

Natura curgerii peliculei lichide este dictată de valoarea criteriului Reynolds al ei şi anume : curgerea laminară pentru $Re_l < 30...50$; curgerea tranzitorie $30...50 < Re_l < 160 ... 400$; curgerea turbulentă $Re > 160...400$. Calculul lui Re_l se face cu relaţiile

$$Re_l = \frac{\overline{w}_l \delta_l}{\nu_l}; \quad \dot{m}_l = \rho_l \overline{w}_l \delta_l; \quad Re_l = \frac{\dot{m}_l}{\mu_l}; \quad \mu_l = \nu_l \rho_l \tag{4.95}$$

4.15. STRATUL LIMITĂ DINAMIC LAMINAR AL MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT CU O UMIDITATE $y_0 > 6\%$

Însemnînd cu δ_l grosimea peliculei de lichid (a substratului lichid) şi cu l lungimea, se admite că variaţia vitezei după axa y apare la distanţa δ_l, iar după lungimea x, la distanţa l ; componenta vitezei după direcţia x este foarte mare faţă de cea după direcţia y, dică $w_{lx} \gg w_{ly}$, şi, ca urmare

pentru o distanţă l mare în comparaţie cu grosimea δ_l curgerea poate fi considerată plană. Ca urmare pentru o distanţă x mică faţă de l se poate neglija gradientul de viteză pe direcţia y, curgerea fiind deci unidirecţională. Se admite că nu există variaţie de presiune după direcţia y, deci $dp/dy = 0$ şi ca urmare ecuaţia de mişcare şi continuitate a peliculei de lichid poate fi exprimată prin formulele cunoscute:

$$\cos\alpha \cdot g\rho_l - \frac{\partial p_l}{\partial x} + \mu_l \frac{\partial^2 w_{lx}}{\partial x^2} = \rho_l \left[\frac{\partial w_{lx}}{\partial \tau} + w_{lx} \frac{\partial w_{lx}}{\partial x} + w_{ly} \frac{\partial w_{lx}}{\partial y} \right] \qquad (4.96)$$

$$\frac{\partial w_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial w_{ly}}{\partial y} = 0 \qquad (4.97)$$

în care α este unghiul făcut de vectorii acceleraţiei gravitaţionale $\vec{g}$ şi cel al vitezei $\vec{w}_{lx}$. La limită (suprafaţa peretelui) se consideră că sînt satisfăcute condiţiile

$$w_{lx} = 0; \quad w_{ly} = 0$$

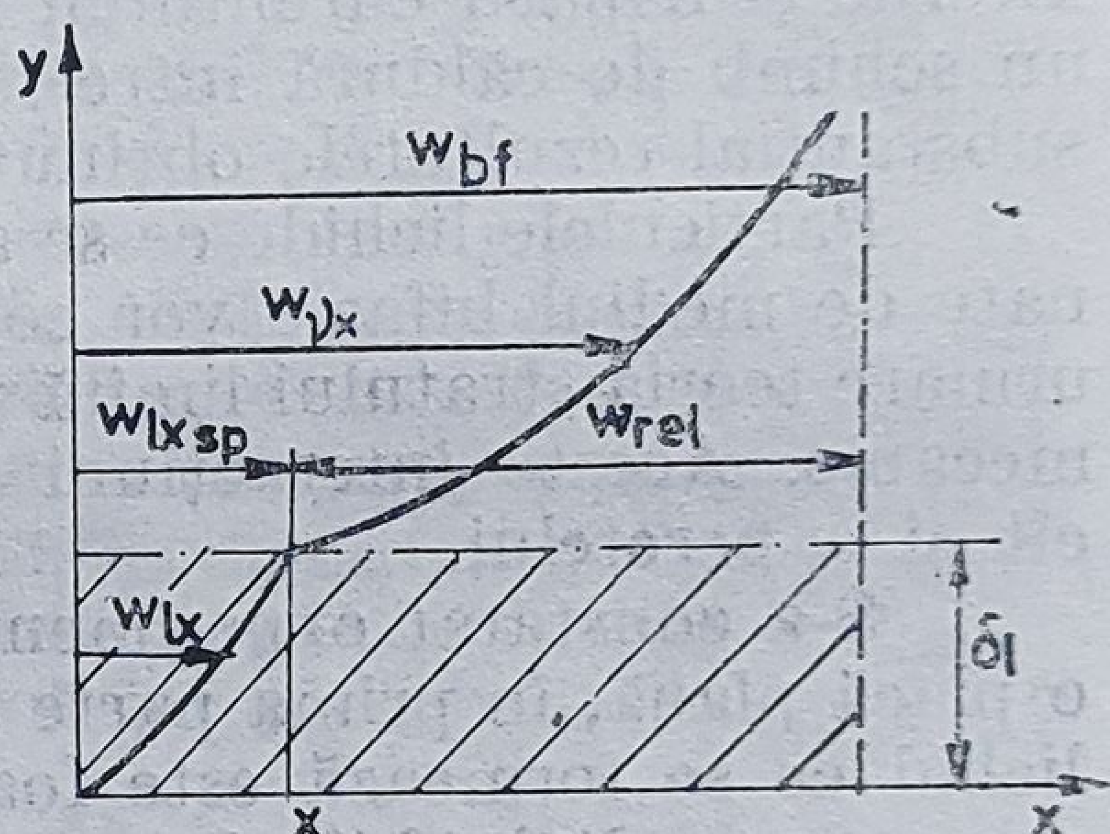


Fig. 4.15. Pelicula de lichid în stratul limită dinamic al unui mediu bifazic, cu $y > 6\%$.

Ţinînd seama de notaţiile din figura 4.15, la zona de separaţie $y = \delta_l$ sînt îndeplinite condiţiile de mai sus, valabile pentru o circulaţie a peliculei de lichid gravitaţională pentru care sînt satisfăcute condiţiile:

$$p_l - p_v = p_\sigma; \quad \mu_l = \frac{dw_{lx}}{dy} = 0$$

În cazul cînd mişcarea are loc forţat (sub acţiunea forţelor de presiune) sînt îndeplinite condiţiile

$$p_l - p_v = p_\sigma; \quad \mu_l = \frac{dw_{lx}}{dy} = \tau_w = \xi \frac{\rho_v w_{rel}^2}{2}$$

în care ξ este coeficientul de frecare interfazic (dintre vapori şi suprafaţa peliculei lichide); w_{rel} — viteza relativă de deplasare a vaporilor faţă de lichid; p_σ — presiunea interfazică dată de relaţia (4.98);

τ_w — tensiunea tangențială dintre peliculă lichidă și curentul de vapori.

$$p_\sigma = -\sigma_l \frac{d^2\delta_l}{dx^2} = \frac{\sigma_l}{B} \tag{4.98}$$

în care: $B = \left[1 + \left(\frac{d\delta_l}{dx}\right)\right]^{3/2} \frac{1}{\frac{d^2\delta_l}{dx^2}}$ (4.99)

Ținînd seama de valoarea presiunii lichidului p_l în funcție de p_σ și de ecuația continuității, ecuația de mișcare devine:

$$\frac{\partial w_{lx}}{\partial \tau} + w_{lx}\frac{\partial w_{lx}}{\partial x} - \int \frac{\partial w_{lx}}{\partial x} dy \frac{\partial w_{lx}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial p_v}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\sigma_l}{\rho_l}\frac{\partial^3 \delta_l}{\partial x^3} + \frac{\mu_l}{\rho_l}\frac{\partial^2 w_{lx}}{\partial y^2} + g \cdot \cos\alpha \tag{4.100}$$

În cazul mișcării gravitaționale a peliculei de lichid, fără schimb de căldură interfazic, cînd $\rho_l = \text{const.}$, relația capătă forma simplă:

$$\frac{\mu_l}{\rho_l} \cdot \frac{\partial^2 w_{lx}}{\partial y^2} + g \cos\alpha = 0.$$

Considerînd $\cos\alpha = 1$ (perete vertical), prin integrare se obține legea de variație a vitezei în pelicula de lichid de grosime δ_l:

$$w_{lx} = \frac{g\rho_l}{\mu_l}\left(\delta_l - \frac{y}{2}\right)$$

Din această expresie se obține viteza media $\overline{w}_{lx}$ de curgere a peliculei de lichid sau viteza curentă w_{lx} în funcție de viteza medie sau de debitul de lichid $\dot{m}_l$:

$$\overline{w}_{fx} = \frac{1}{\delta_l}\int_0^{\delta_l} w_{lx} \cdot dy = \frac{g\delta_1^2 \rho_1}{3\mu_1} \tag{4.101}$$

$$w_{lx} = 3\overline{w}_{lx}\frac{y}{\delta_l}\left(1 - \frac{y}{2\delta_l}\right)$$

$$w_{lx} = 3\frac{\dot{m}_l y}{\rho_l \delta_l^2}\left(1 - \frac{y}{2\delta_l}\right) \tag{4.102}$$

În cazul cînd curgerea are loc forțat, sub acțiunea forțelor de presiune, la suprafața peliculei lichide, deci la $y = \delta_l$, apare forța tangențială τ_w. Deoarece

$$\frac{\mu_l}{\rho_l}\frac{\delta^2 w_l}{dy^2} = 0$$

expresia capătă forma ce reprezintă ecuaţia de mişcare particularizată pentru condiţiile la limită $y = \delta_l$:

$$w_{lx} = \frac{\tau_w}{\mu_l} y \qquad (4.103)$$

în care: $\tau_w = \xi \frac{\rho_v \cdot w_{v_0}^2}{2}$

Din această expresie, ţinînd seama de notaţiile din figura 4.15, se obţine viteza de curgere a lichidului, egală cu aceea a mediului bifazic, la $y = \delta_l$, notată cu w_{lxsp} în funcţie de viteza medie a mediului bifazic în zona liberă, notată cu $\overline{w}_{bf}$.

$$w_{lx_{\text{sp}}} = \frac{\xi \rho_v \delta_l}{2\mu_l} (\overline{w}_{\text{bf}} - w_{lx_{\text{sp}}}) \qquad (4.104)$$

Deci: $$w_{lx_{\text{sp}}} = \frac{2\,\overline{w}_{\text{bf}} \cdot A + 1 \pm \sqrt{4 \cdot \overline{w}_{\text{bf}} \cdot A + 1}}{2 \cdot A} \qquad (4.105)$$

în care $A = \frac{\xi \rho_v \delta_l}{2 \mu_l}$

4.16. STRATUL LIMITĂ DINAMIC TRANZITORIU AL MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT CU O UMIDITATE $y_0 > 6\%$

Apariţia regimului de curgere tranzitoriu a peliculei de lichid în stratul limită al mediilor bifazice are loc atunci cînd $\text{Re}_l > 30-50$. Peste această valoare a lui Re începe să apară în stratul limită de lichid mişcări ondulatorii. Datorită forţei de frecare vîscoasă ce acţionează la suprafaţa despărţitoare a peliculei de lichid de pelicula bifazică a stratului limită, aceste unde sînt amortizate. Deci la curgerea diabată a mediului bifazic, regimul tranzitoriu are întotdeauna tendinţa de a trece în regim laminar.

Ecuaţiile de mişcare a stratului limită tranzitoriu ţin seama de următoarele ipoteze simplificatoare:

(a) se consideră că pelicula de lichid este plană, iar legea de repartiţie a vitezelor este aceeaşi ca la curgerea laminară;

(b) presiunea în secţiunea peliculei de lichid este constantă;

(c) viteza medie de curgere a zonei libere a mediului bifazic $w_{\text{bf}} =$ Const.

Ţinînd seama de ipotezele restrictive de mai sus, în cazul cînd mişcarea peliculei de lichid are loc sub acţiunea forţelor gravitaţionale, ecuaţia de mişcare a peliculei în regim tranzitoriu este identică cu aceea folosită

la mişcarea laminară, iar legea de variaţie a vitezei este dată de relaţia

$$\frac{\partial w_{lx}}{\partial \tau} + \frac{9}{10}\, \overline{w}_{lx} \frac{\partial w_{lx}}{\partial x} = \frac{\sigma_l}{\rho_l} \frac{\partial^3 \delta_l}{\partial x^3} - \frac{3 \nu_l \overline{w}_{l0}}{\delta_l^2} + g \cos \alpha \tag{4.106}$$

în care $\overline{w}_{l0}$ este viteza medie a peliculei de lichid în punctul x şi la timpul τ. Ţinînd seamă de notaţiile din figura 4.16 în care se reprezintă fenomenul ondulator ce apare în pelicula de lichid la regimul de curgere tranzitoriu şi considerînd că lungimea de undă l_λ este mare în raport cu amplitudinea undei, se poate scrie expresia

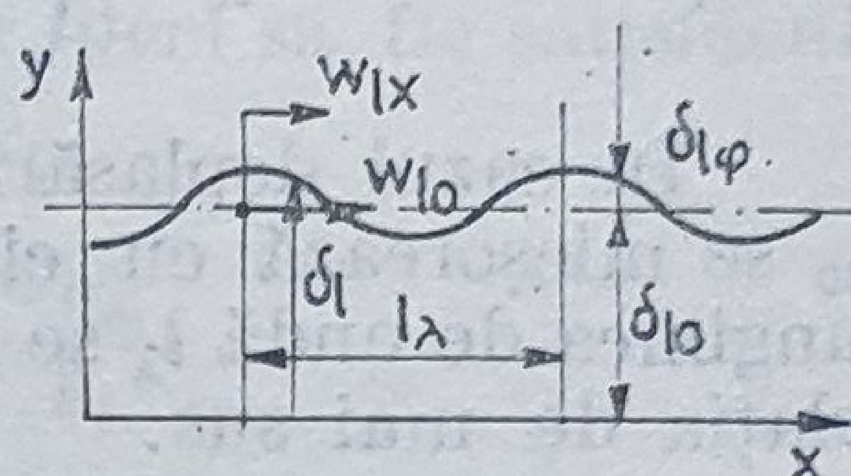


Fig. 4.16. Fenomenul ondulatoriu al peliculei de lichid din stratul limită dinamic.

$$\delta_l = \delta_{l0} + \delta_{l\varphi} \tag{4.107}$$

În cazul mişcărilor ondulatorii, grosimea δ_l şi viteza w_{lx} vor fi funcţie de x. Se notează cu w_x viteza fazică a undei şi ca urmare se poate scrie

$$\frac{\partial \delta_l}{\partial \tau} = - \frac{\partial (w_{lx} \delta_l)}{\partial x} \tag{4.108}$$

Deci :

$$\frac{\partial \delta_l}{\partial \tau} = - \delta_{l0} \cdot w_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w_{lx}}{\partial \tau} = w_\varphi \frac{\partial w_{lx}}{\partial x}$$

Deoarece s-a constatat experimental că undele de perturbaţie se amortizează în lungul suprafeţei, este obligatoriu ca energia dispersată de mişcarea ondulatorie a lichidului să fie compensată de energia gravitaţională. Pierderea de energie E_l a peliculei de lichid raportată la unitatea de lungime de undă şi energia forţelor gravitaţionale W sînt date de relaţiile :

$$-\frac{dE_l}{d\tau} = \mu_l \int_0^{\delta_l} \left(\frac{\partial w_{lx}}{\partial y} \right)^2 dy = 3\, \mu_l \frac{\overline{w}_{lx}}{\partial_l}$$

$$\overline{w} = \rho_l g w_{lx} \delta_l = \rho_l g \delta_{l0} \overline{w}_{l0} = \rho_l\, g\, \dot{m}_l \tag{4.109}$$

Regimul de curgere se stabilizează cînd energia W tinde către zero. Cercetările experimentale au arătat că grosimea peliculei de lichid din stratul limită în regim de curgere tranzitoriu este cu circa 3% mai mică decît aceea a regimului laminar ($\delta_{l0} = 0{,}97 \delta_{l_{lam}}$) iar amplitudinea undei are o valoare maximă de 0,46 δ_{l0}. Viteza fazică a undei are valori medii

$w_\varphi = 2{,}4 \cdot \overline{w}_{l0}$ în care $w_{l0} = V_l/\delta_{l0}$ (V_l = debitul volumetric al peliculei lichide). Grosimea medie a peliculei de lichid a stratului limită în regim tranzitoriu şi lungimea de undă l_λ se pot calcula cu relaţiile

$$\delta_{l0} = \left(\frac{\nu_l\ V_l}{g}\right)^{1/3}; \quad l_\lambda = 7{,}5\left(\frac{\nu_l \cdot \sigma_l}{\rho_l \cdot V_l \cdot g}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.110}$$

În cazul deplasării mediului bifazic cu viteza w_{bf} mare, grosimea δ_{l0} se micşorează cu circa 15%÷25% (valoare găsită experimental) iar lungimea de undă l_λ se micşorează cu circa 20% faţă de valoarea dată de relaţia de mai sus.

4.17. STRATUL LIMITĂ DINAMIC TURBULENT AL MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT CU O UMIDITATE $y_0 > 6\%$

S-a constatat experimental că pentru curgeri cu $\mathrm{Re}_l > 160 \div 400$, perturbaţiile ce apar în pelicula lichidă a stratului limită a unui mediu bifazic încep să se amplifice în timp (deci odată cu creşterea lui τ), aducînd după sine trecerea de la un regim de curgere laminar, la unul turbulent stabilizat. S-a admis ca valoare a stabilităţii o lungime de undă l_λ dată de relaţia de mai jos, în care σ_l este tensiunea la suprafaţa de separaţie a peliculei de lichid de mediul bifazic:

$$l_\lambda = \frac{\sigma_l}{\rho_l w_{l0}\ \delta_l}$$

În cazul cînd l_λ dat de relaţie este mai mic ca 1, trecerea din regimul laminar la cel turbulent are loc fără ca să mai apară regimul tranzitoriu.

O relaţie experimentală care permite calculul stabilităţii mişcării ondulatorii notată cu $\alpha(\tau)$ care reprezintă în fond amplitudinea undei şi în care $n = 2\ \pi/l_\lambda$, iar ρ_l — densitatea lichidului este

$$\alpha(\tau) = \exp\left[\frac{n \cdot \mathrm{Re}_l}{3}\left(\frac{2}{5} n \cdot \mathrm{Re}_l - \frac{n^3 \cdot \rho_v}{\mathrm{Re}_l^{\frac{2}{3}}}\right)\right] \tag{4.111}$$

Limita de stabilitate a perturbaţiei ondulatorii este dată de relaţia

$$\frac{2}{5} n_{cr} \cdot \mathrm{Re}_l = \frac{n_{cr}^3\ \rho_l}{\mathrm{Re}_l^{2/3}}$$

din care se obţine limita de stabilitate:

$$n_{cr} = \left[\frac{2}{5}\frac{\mathrm{Re}_l^{5/3}}{\rho_l}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.112}$$

Se trage deci concluzia că pentru $n > n_{cr}$ amplitudinea undelor $\alpha(\tau)$ scade cu timpul şi, invers, deci curgerea peliculei lichide ar fi insta-

bilă pentru orice valoare a lui Re_l ceea ce, așa cum era normal, nu a fost confirmat de rezultatele experimentale.

Considerind o repartiție lineară a vitezei în pelicula lichidă, dată de relația $w_{lx} = w_{lx_{cr}} \cdot y/\delta_l$, la suprafața de separație a peliculei lichide de mediul bifazic trebuie să existe egalitatea vitezelor, deci să fie satisfăcută relația

$$w_{vx}(\delta) = w_{lx_{cr}}; \quad \mu_v \frac{dw_{vx}}{dy} = \mu_l \frac{w_{lx_{cr}}}{\delta_l}$$

Se consideră că perturbația peliculei lichide duce la apariția unei variații a vitezei deci la o viteză w'_{lx} și implicit la o modificare a foțelor tangențiale și normale (p_6 și p_n), care la zona de separație lichid-vapori trebuie să respecte egalitățile

$$w'_{lx} = w'_{vx}; \quad w'_{ly} = w'_{vy}; \quad p'_{\tau l} = p'_{\tau v}$$

$$w'_{ly} = \frac{\partial \delta'_l}{\partial \tau} = w_{lx_{cr}} \frac{\partial \delta'_l}{\partial x}; \quad p_l - p_{ln} = \sigma_l \frac{\partial^2 \delta'_l}{\partial x^2}$$

în care σ_l este tensiunea superficială la suprafața despărțitoare a peliculei lichide de mediul bifazic.

S-a obținut pe această cale valoarea criteriului $\mathrm{Re}_{l_{cr}}$ ce definește apariția regimului turbulent de curgere a peliculei de lichid, în funcție de mărimile adimensionale N și T date de relația

$$\mathrm{Re}_{l_{cr}} = f(N, T)$$

în care $N = \dfrac{\mu_v}{\mu_l} \cdot \dfrac{\rho_l}{\rho_v}$; iar $T = \dfrac{\sigma_l \rho_l \delta_l}{\mu_l^2}$

Valorile lui $\mathrm{Re}_{l_{cr}}$ în funcție de T și N sînt prezentate în figura 4.17 pentru vaporii de apă.

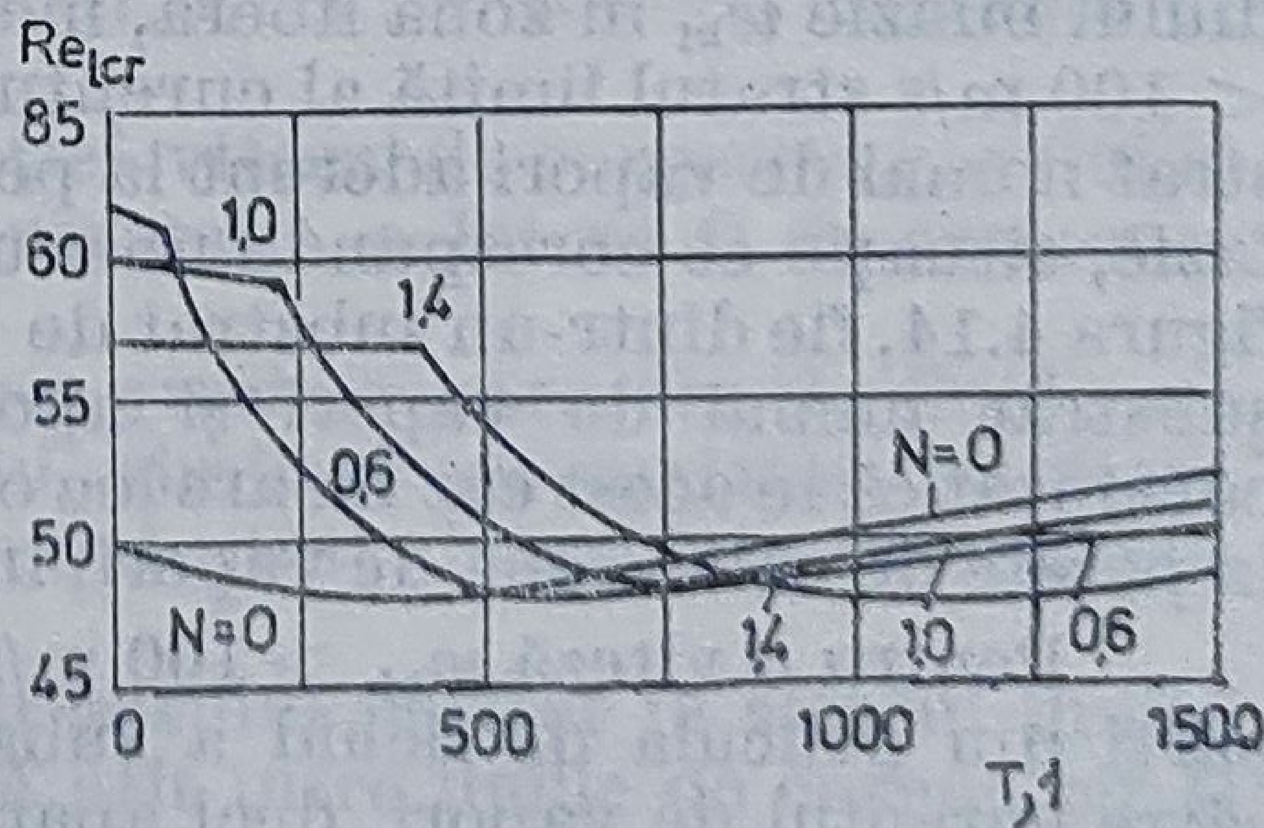


Fig. 4.17. Valorile lui Re_{cr} în funcție de mărimile T și N.

O relaţie criterială obţinută pe cale experimentală pentru determinarea vitezei critice w_{cr} la care apare regimul turbulent este

$$\frac{w_{v_{cr}}\sqrt{\rho_v}}{\sqrt[4]{g^2\sigma_l(\rho_l-\rho_v)}}=A\left(\mathrm{Re}_l,\ \mathrm{Ga},\frac{\nu_v}{\nu_l},\ \mathrm{We},\frac{\rho_l+\rho_v}{\rho_l},\frac{l_l}{l}\right)$$

în care :

l este lungimea caracteristică a suprafeţei peste care are loc curgerea ;
l_l — lungimea pe care are loc curgerea peliculei de lichid ;
Expresiile criteriilor Galileu şi Weber sînt

$$\mathrm{Ga}=\frac{g\cdot\sigma_l^{3/2}}{\nu_l(\rho_l-\rho_v)^{3/2}}\ ;\ \mathrm{We}=\frac{\sigma_l}{(\rho_l-\rho_v)l^2}$$

Criteriul Galileu caracterizează raportul dintre forţele gravitaţionale şi cele de vîscozitate, iar criteriul Weber raportul dintre tensiunea superficială şi forţele de inerţie.

Pentru diferite modele de curgere, pe baza metodei analizei dimensionale, se obţin expresii ale vitezei critice de curgere w_{cr}. Astfel :

(1) Pentru o curgere în stratul limită numai cu picături de lichid în masa de vapori (fără peliculă aderentă la perete) deci pentru $y_0 < 6\%$:

$$\frac{w_{v_{cr}}\cdot\sqrt{\rho_v}}{\sqrt[4]{g^2\cdot\sigma_l(\sigma_l-\sigma_v)}}=12{,}4\left[\frac{\sigma_l}{(\rho_l-\rho_v)\,d_l}\right]^{1/4} \qquad (4.113)$$

n care viteza se exprimă în m/s ; ρ în kgf/m³ ; g în m/s² ; σ_l în kgf/m ; d_l = diametrul picăturilor de lichid ce se găsesc în suspensie în amestecul bifazic.

(2) Pentru o curgere în stratul limită cu peliculă separată de lichid aderentă la suprafaţa solidă

$$\frac{w_{v_{cr}}\cdot\sqrt{\rho_v}}{\sqrt[4]{g^2\cdot\sigma_l(\rho_l-\rho_v)}}=1{,}41\left(\frac{\rho_l+\rho_v}{\rho_l}\right)^{1/2} \qquad (4.114)$$

Relaţiile de mai sus sînt valabile pentru o viteză de curgere a mediului bifazic w_{bf} în zona liberă, mai mică de 100 m/s. Pentru viteze $w_{bf} < 100$ m/s stratul limită al curentului bifazic este format fie dintr-un substrat numai de vapori aderent la perete şi apoi peste el un strat limită bifazic, situaţie ce corespunde unei umidităţi $y_0 < 6\%$, aşa cum se vede în figura 4.14, fie dintr-un substrat de lichid aderent la perete, urmat de un substrat numai de vapori şi apoi de unul bifazic. Experimental s-a constatat că în acest caz nu are loc o antrenare a peliculei de lichid aderentă la perete de către zona de vapori, indiferent de grosimea δ_l.

Pentru o viteză $w_{bf} > 100$ m/s, s-a constatat însă o antrenare a unei părţi din pelicula de lichid a substratului δ_l sub formă de picături, de către curentul de vapori, deci apariţia unei tendinţe de smulgere (de des-

prindere) a peliculei de pe perete. De exemplu, pentru vaporii de apă umezi, la $w_{bf} = 300$ m/s s-a constatat că aproape 70% din lichid este luat din pelicula lichidă și antrenat sub formă de picături în masa de vapori a stratului limită. În figura 4.18 se prezintă raportul dintre debitul masic al peliculei de lichid $\dot{m}_l$ și cel antrenat sub formă de picături $\dot{m}_{lp}$, în funcție de viteza de curgere w_{bf}. Acest lucru duce la o subțiere a stratului limită de lichid δ_l de la perete și ca urmare la micșorarea energiei cinetice consumate de mediul bifazic pentru antrenarea picăturilor. S-a constatat experimental că desprinderea totală a peliculei de lichid de pe suprafață nu a fost realizată nici chiar la viteze cu $M > 2{,}5$.

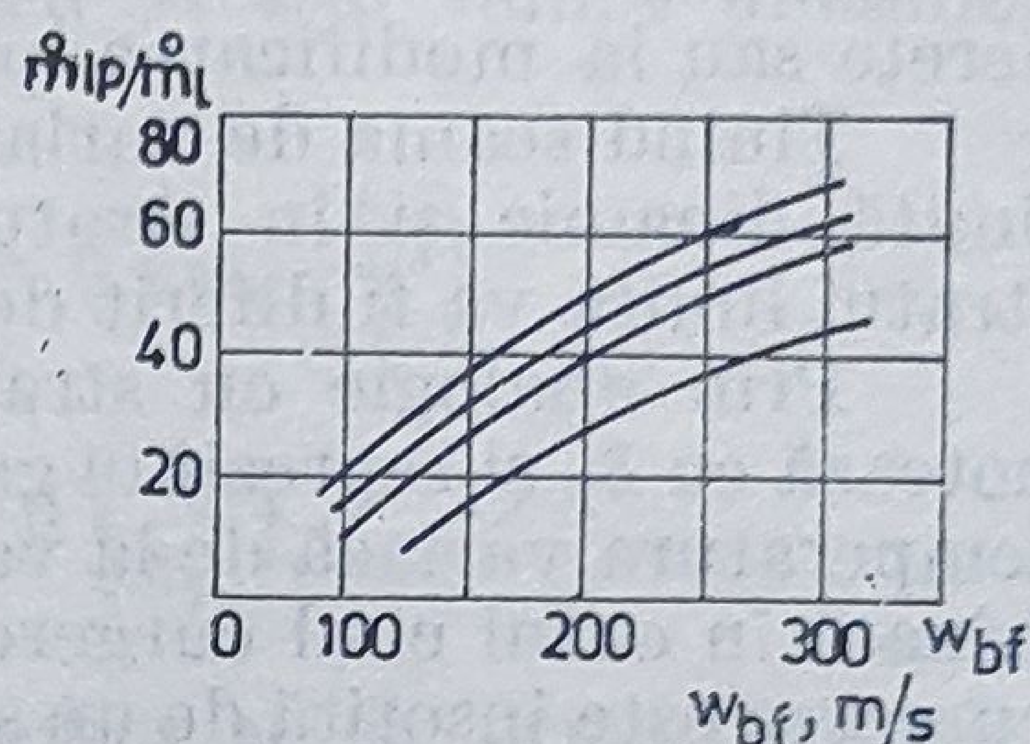


Fig. 4.18. Raportul dintre masa de picături de lichid antrenată de masa peliculei de lichid.

Relația lui w_{cr} pentru o curgere a mediului bifazic cu viteza mai mari de 100 m/s , capătă forma

$$\frac{w_{v_{cr}} \cdot \sqrt{\rho_v}}{\sqrt[4]{g^2 \cdot \sigma_l(\rho_l - \rho_v)}} = 36\left(\frac{V_l}{\rho_l}\right)^{-1/3} \tag{4.115}$$

în care V_l este debitul volumetric al lichidului în peliculă în kg/m · h dacă viteza w_v este exprimată în m/h, sau kg/m · s, dacă w_v este experimată în m/s.

Ca urmare pentru curgeri cu o viteză $w_v > w_{v_{cr}}$, regimul de curgere a peliculei de lichid este turbulent, iar pentru $w_v < w_{v_{cr}}$ el este laminar, sau tranzitoriu dacă $w_v = w_{v_{cr}}$.

4.18. STRATUL LIMITĂ TERMIC AL GAZELOR PERFECTE PENTRU VITEZE DE CURGERE FOARTE MICI ($0 < M \leqslant 0{,}3$)

Termogazodinamica se ocupă de curgerea gazelor calde sau reci prin canale, ceea ce implică admiterea unei diferențe de temperatură între aceea a peretelui canalului și cea medie a gazului. Deci va exista o diferență de temperatură $t_p - t_f$ (sau $t_f - t)_p$.

Pe de altă parte, ca urmare a variației vitezei de curgere a gazului în stratul limită dinamic, temperatura momentană a lui va fi de asemenea variabilă.

Deci în vecinătatea peretelui, într-o grosime oarecare de fluid, va apărea o variație a temperaturii gazului, similară cu variația de viteză în stratul limită dinamic, dînd naștere unui strat denumit prin analogie „strat lmită termic".

Ca urmare a variației temperaturii gazului perfect în stratul limită termic va avea loc un schimb de căldură atît între liniile de curent cît și între el și perete.

În cazul gazului bifazic, variația temperaturii în stratul limită dinamic va duce la un schimb de căldură interfazic, avînd în vedere că temperatura fazei lichide nu se modifică în funcție de viteza de curgere, în timp ce aceea a fazei gazoase suferă modificări importante. Acest schimb de căldură va duce la modificarea grosimii peliculei de lichid aderente la perete sau la modificarea participației fazei lichide în amestecul bifazic.

Ținînd seama de variația diferită a vitezei și temperaturii în stratul limită dinamic și în stratul limită termic, gradientul temperaturii în stratul limită va fi diferit de cel al vitezei.

Prin analogie cu stratul limită dinamic, stratul limită termic se notează cu δ_T și reprezintă grosimea stratului de gaz de lîngă perete în care temperatura variază de la valoarea pe care o are în zona liberă la valoarea frînată în cazul cînd curgerea este adiabată, sau la aceea a peretelui cînd curgerea este însoțită de un schimb de căldură cu pereții canalului.

În cazul gazelor perfecte, în care există aproape o egalitate între vîscozitatea și coeficientul de difuzivitate termică a lor, $\nu \approx a$, grosimea stratului limită termic δ_T va fi aproximativ egală cu aceea a stratului limită dinamic adică $\delta = \delta_T$.

În cazul în care $\nu \neq a$, și $\delta_T \gtrless \delta$. Prin analogie cu noțiunile folosite la stratul limită dinamic, se folosește și pentru cel termic termenul de strat limită termic laminar, tranzitoriu și turbulent.

În cazul curgerii izotermice a gazului cu $M \leqslant 0{,}3$, și fără schimb de căldură cu pereții canalului se poate accepta ipoteza că temperatura gazului la perete este egală cu temperatura peretelui, ca urmare a faptului că frînarea curentului modifică foarte puțin temperatura momentană.

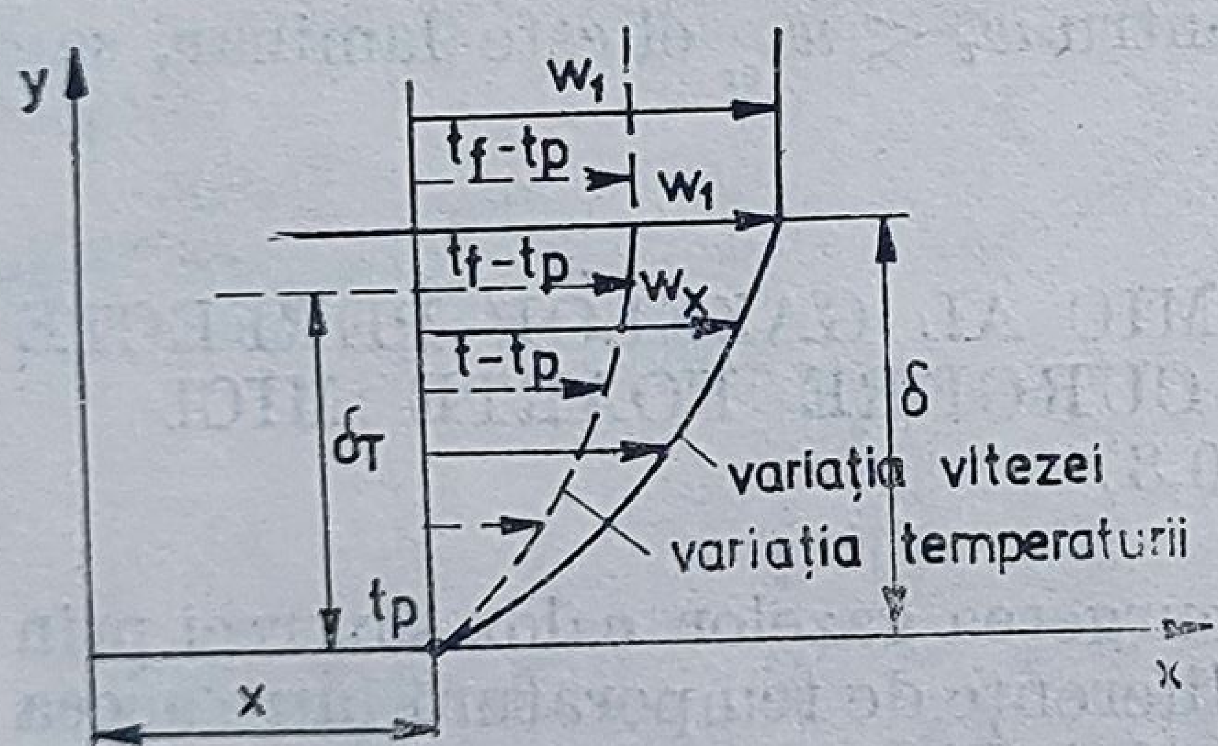


Fig. 4.19. Variația vitezei în stratul limită dinamic și a temperaturii în stratul limită termic.

În figura 4.19 se prezintă fenomenologic curgerea unui gaz cu temperatura t_f pe lîngă un perete a cărui temperatură (de exemplu) este $t_p < t_f$, dar apropiată de t_f. Pentru curgeri cu $M \leqslant 0{,}3$ se consideră că în stratul limită termic regimul de curgere este laminar, iar efectul produs de procesul de frînare a curentului asupra temperaturilor momentane este neglijabil față de cel al schimbului de căldură, dintre gaz și perete.

Ca urmare, diferența de temperatură $t_f - t_p$ în stratul limită termic va exista atunci cînd $t_p < t < t_f$ pentru $0 < y < \delta_T$.

Considerînd un curent de gaz perfect, ecuația conservării energiei în prezența termoconductei și neglijînd lucrul mecanic de frecare este

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right] \tag{4.116}$$

în care $a = \lambda / c_p \rho$ este coeficientul de difuzibilitate termică al gazului.

Admițînd pentru grosimea stratului limită termic laminar δ_T același ordin de mărime ca și pentru δ și admițînd de asemenea că $w_y = w_1 \cdot \frac{\delta}{l}$, se obțin relații analoage cu cele obținute pentru stratul limită dinamic, laminar. Pentru condițiile la limită

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \left(w_1 \frac{t_f}{l} \right) ; \quad w_y \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \left(w_1, \frac{t_f}{l} \right)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \left(\frac{t_f}{l^2} \right) ; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \left(\frac{t_f}{\delta_T^2} \right)$$

Deoarece $\partial^2 t/\partial x^2 \ll \partial^2 t/\partial y^2$ se poate neglija și ca urmare relația devine :

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \tag{4.117}$$

Notînd cu $\theta = t - t_p$ (în care t reprezintă temperatura curentă pe direcția perpendiculară în stratul limită termic laminar, iar t_p— aceea a peretelui) se obține

$$w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{4.118}$$

Pentru condițiile la limită ($y = 0$ și $y = \delta_T$)se obține :

— pentru $y = 0 : w_x = w_y = 0 ; t = t_p ; \theta = 0 ; \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 ;$

— pentru $y = \delta_T : t = t_f ; \theta = t_f - t_f = \theta_m ; \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0.$

Ca urmare, ecuațiile de definiție a stratului limită termic laminar vor fi ecuația energiei, ecuația Navier-Stockes și ecuația de continuitate. Ele sînt suficiente pentru curgerea unui gaz fără gradient de presiune pe direcția y admițînd prin ipoteză că $\delta \partial/\partial y = 0$. Ecuația Navier-Stockes și de continuitate vor fi

$$w_x \frac{\delta w_x}{\delta x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \tag{4.119}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \tag{4.120}$$

Ecuația entalpiei, a conservării masei și termoconducției, ținînd seama de notațiile din fig. 4.20 capătă formele de mai jos. Ele se aplică unui

element de volum $ABCD$ şi de masă m aşezat la distanţa x de la bordul de atac al suprafeţei cu o lăţime egală cu unitatea :

— ecuaţia entalpiei : $H = \int_0^{\delta_T} \rho\, c_p t\, w_x\, \mathrm{d}y$

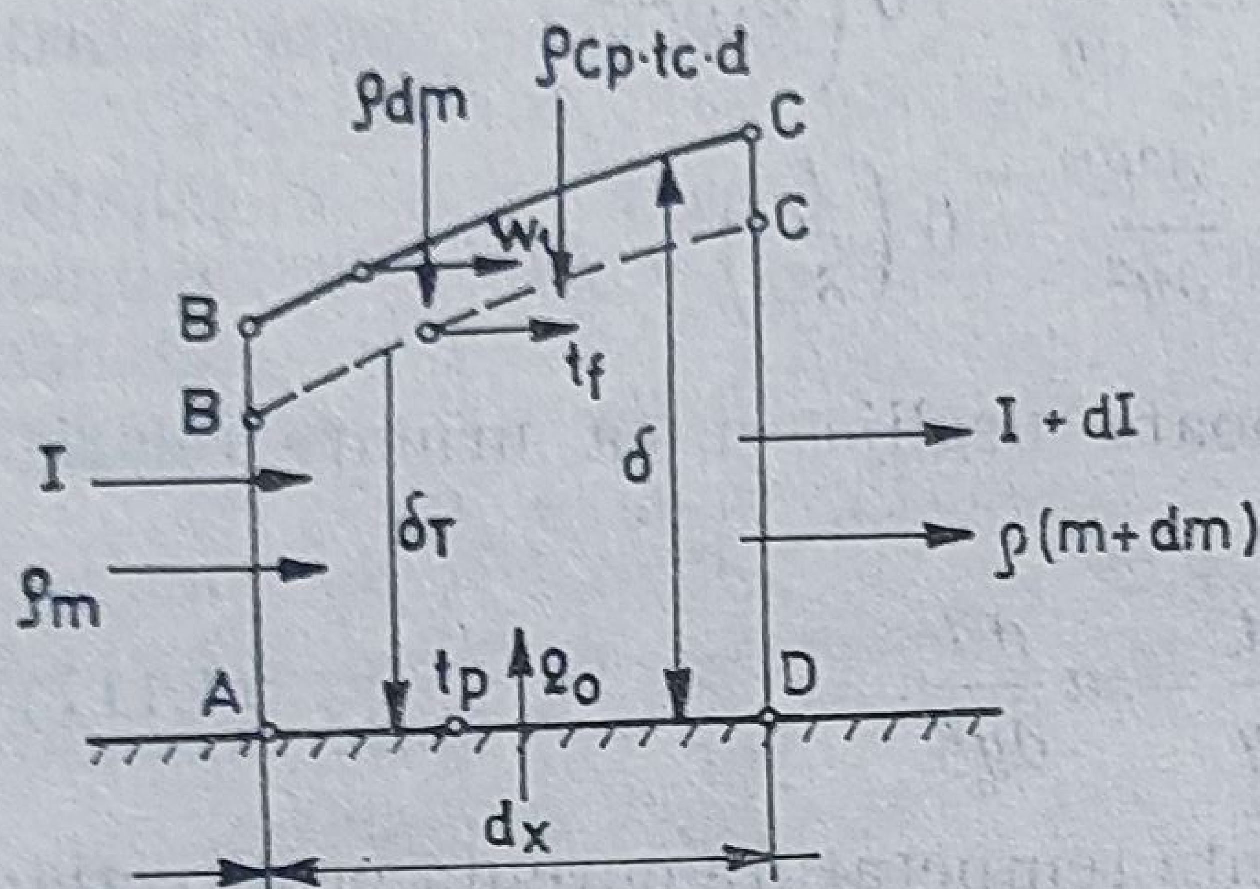


Fig. 4.20. Mărimile caracteristice ale stratului limită termic.

— ecuaţia conservării masei : $\rho\, m = \int_0^{\delta_T} \rho\, w_x\, \mathrm{d}y$

— ecuaţia termoconducţiei : $q_0\, \mathrm{d}x = -\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} \cdot \mathrm{d}x$

Ecuaţia conservării energiei capătă forma :

$$\frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}x - \rho\, c\, t_f \frac{\partial m}{\partial x}\mathrm{d}x = -\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} \mathrm{d}x$$

Ţinînd seama şi de expresiile entalpiei şi conservării masei se obţine :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T} \rho\, c_p t\, w_x\, \mathrm{d}y - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T} \rho c_p t_f w_x\, \mathrm{d}y = -\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T} w_x(t - t_f)\, \mathrm{d}y = a \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (4.121)$$

Ecuaţia poartă denumirea de „ecuaţia integrală a stratului limită termic laminar". Ţinînd seamă că $\theta = t - t_p$, care devine $\theta = 0$ pentru $t = t_p$ şi $\theta = \theta_m = t_f - t_p$ pentru $t = t_f$, pentru condiţiile la limită, ea

capătă formele :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T}\frac{w_x}{w_1}\left(1-\frac{t}{t_f}\right)dy = \frac{a}{w_1 t_f}\frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T}\frac{w_x}{w_1}\left(1-\frac{\theta}{\theta_m}\right)dy = \frac{a}{w_1\theta_m}\frac{\delta\theta}{\delta y}\bigg|_{y=0} \qquad (4.122)$$

Ținînd seama de relațiile din figura 4.21 se introduc prin analogie cu δ^* și δ^{**} ale stratului limită dinamic mărimile : δ^{***} denumit „grosime

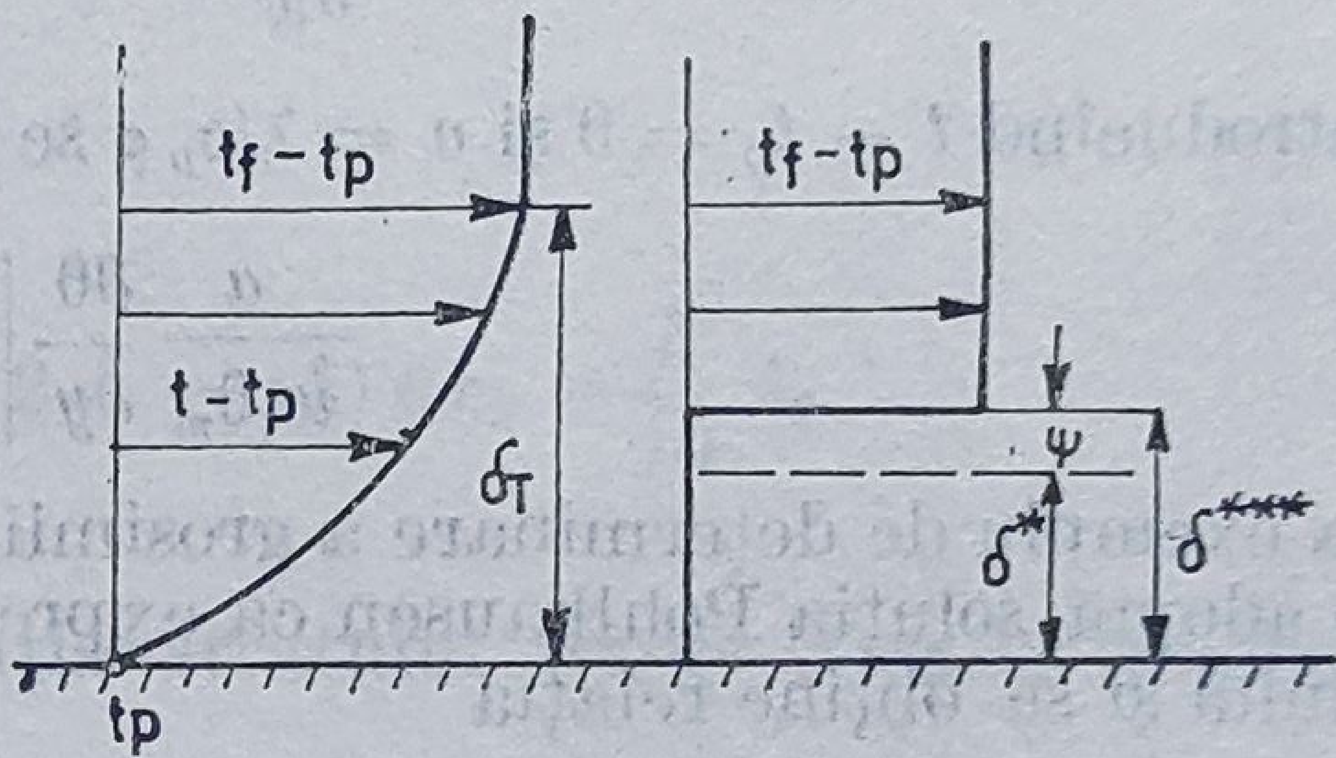


Fig. 4.21. δ^* și δ^{**} în stratul limită termic.

termică" și ψ denumit „deficit de energie" a stratului limită termic, date de expresiile :

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta_T}\left(1-\frac{w_x}{w_1}\frac{t}{t_f}\right)dy$$

Introducînd notația $\psi = \delta^{***} - \delta^*$ se obține :

$$\psi = \delta^{***} - \delta^* = \int_0^{\delta_T}\left(1-\frac{w_x}{w_1}\frac{t}{t_f}\right)dy - \int_0^{\delta_T}\left(1-\frac{w_x}{w_1}\right)dy$$

$$\psi = \int_0^{\delta_T}\frac{w_x}{w_1}\left(1-\frac{t}{t_f}\right)dy,$$

sau, în funcție de θ :

$$\psi = \int_0^{\delta_T}\frac{w_x}{w_1}\left(1-\frac{\theta}{\theta_m}\right)dy \qquad (5.123)$$

Ținînd seama de expresia conservării debitului masic ($\rho\, m$) și a entalpiei H, puse sub formele

$$\rho \dot{m} = \rho w_1(\delta - \delta^*) \tag{4.124}$$

$$H = \rho w_1 c_p t_f(\delta - \delta^{***}) = \rho c_p w_1 t_f(\delta - \delta^* - \psi), \tag{4.125}$$

se obține ecuația stratului limită termic laminar

$$\rho w_1 c_p t_f \frac{\delta}{\partial x}(\delta - \delta^* - \psi)\, \mathrm{d}x - \rho w_1 c_p t_f \frac{\partial}{\partial x}(\delta - \delta^*)\mathrm{d}x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0} \cdot \mathrm{d}x$$

care aranjată convenabil capătă forma:

$$-\rho w_1 c_p t_f \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0} \cdot \mathrm{d}x \tag{4.126}$$

Introducînd $t - t_p = \theta$ și $a = \lambda / c_p\, \rho$ se obține:

$$\frac{a}{w_1 \theta_m} \frac{\partial \theta}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.127}$$

Ca exemplu de determinare a grosimii δ_T a stratului limită termic laminar, se adoptă soluția Pohlhausen ca expresie a variației temperaturii în stratul limită și se obține relația

$$\frac{\theta}{\theta_m} = b_0 + b_1 \frac{y}{\delta_T} + b_2 \frac{y^2}{\delta_T^2} + b_3 \frac{y^3}{\delta_T^3} + b_4 \frac{y^4}{\delta_T^4}$$

Pentru condițiile la limită ale stratului limită termic, anume $y = 0$ și $y = \delta_T$, se obține:

$$\text{Pentru } y = 0 : \theta = 0 ;\ t = t_p ;\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Pentru } y = \delta_T : t = t_f ;\ \theta = t_f - t_p = \theta_m ;\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 ;\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Ca urmare, valoarea coeficienților din ecuația Pohlhausen este

$$b_0 = 0 ; \quad b_1 = -2 ; \quad b_2 = 0 ; \quad b_3 = -2 ; \quad b_4 = 1.$$

Deci soluția Pohlhausen pentru variația temperaturii în stratul limită termic este

$$\frac{\theta}{\theta_m} = 2\frac{y}{\delta_T} - 2\frac{y^3}{\delta_T^3} + \frac{y^4}{\delta_T^4}$$

Ținînd seama de expresia adoptată de soluția Pohlhausen pentru variația vitezei în stratul limită dinamic se obține expresia lui ψ. Rezolvarea funcției ce permite determinarea lui ψ depinde de raportul dintre grosimea δ_L

a stratului limită dinamic laminar şi grosimea δ_T a stratului limită termic laminar. Există bineînţeles trei posibilităţi şi anume : $\delta_L \ll \delta_T$; $\delta_L \approx \delta_T$; $\delta_L \gg \delta_T$. Se prezintă mai jos rezolvarea problemei pentru toate cazurile de mai sus.

(a) Stratul limită termic laminar pentru $\delta_L \ll \delta_T$. Funcţia ψ capătă forma

$$\psi = \int_0^{\delta_T} \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right) dy = \int_0^{\delta_L} \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right) dy + \int_0^{\delta_T} \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right) \cdot dy$$

$$\psi = \int_0^{\delta_T}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right) dy = \delta_T \int_0^{\delta_T}\left[1 - 2\frac{y}{\delta_T} + 2\frac{y^3}{\delta_T^3} - \frac{y^4}{\delta_T^4}\right] d\left(\frac{y}{\delta_T}\right)$$

Notînd cu $\eta_T = y/\delta_T$ se obţine

$$\psi = \delta_T \int_0^1 (1 - 2\,\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4)\, d\eta_T = \frac{3}{10}\,\delta_T$$

Introducînd această relaţie în ecuaţia stratului limită termic laminar obţinută şi anume

$$\frac{a}{w_1 \cdot \theta_m} \left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

şi integrînd între 0 şi δ_T, se obţine

$$\frac{3}{10}\,\frac{\partial \delta_T}{\partial x} = \frac{a}{w_1 \cdot \theta_m}\,\theta_m \frac{2}{\delta_T}$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{y=0} = \theta_m \frac{2}{\delta_T}\,; \qquad \delta_T^2 = \frac{40}{3}\,\frac{a \cdot x}{w_1}$$

Pentru stratul limită dinamic laminar, s-au obţinut valorile

$$\delta_L^2 = 34\,\frac{\nu \cdot x}{w_1}\,; \qquad \delta_L = 5{,}83\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_1}}$$

şi ca urmare :

$$\frac{\delta_L^2}{\delta_T^2} = 3\,\frac{34}{40}\,\frac{a}{\nu} = 2{,}55\ \mathrm{Pr}\,; \qquad \frac{\delta_L}{\delta_T} = 1{,}6\ \mathrm{Pr}^{1/2} \tag{4.128}$$

Deoarece această soluţie a fost obţinută în ipoteza că $\delta_T \gg \delta_L$ înseamnă că ea nu este satisfăcută decît pentru fluide la care criteriul Pr are valori foarte mici, (cifra Pr mică este specifică metalelor topite).

(b) Stratul limită termic laminar pentru $\delta_T \approx \delta_L$.

În ecuația lui ψ se introduc relațiile soluției Pohlhausen și notînd cu $\eta_L = y/\delta_L$ și $\eta_T = y/\delta_T$ se obține relația

$$\psi = \int_0^{\delta_T} \frac{w_x}{w_1}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right) dy = \int_0^{\delta_T} \left(2\frac{y}{\delta_L} - 2\frac{y^3}{\delta_L^3} + \frac{y^4}{\delta_L^4}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - 2\frac{y}{\delta_T} + 2\frac{y^3}{\delta_T^3} - \frac{y^4}{\delta_T^4}\right) dy$$

$$\psi = \delta_T \int_0^{\delta_T} (2\,\eta_L - 2\eta_L^3 + \eta_L^4)(1 - 2\,\eta_T + 2\eta_T^4 + \eta_T^4) d\eta_T = \frac{37}{315}\delta_T.$$

Introducînd expresia lui ψ în ecuația stratului limită termic laminar și integrînd-o se obține

$$\frac{37}{315}\frac{\partial \delta_T}{\partial x} = \frac{2a}{w_1 \delta_T}; \quad \delta_T\, d\delta_T = \frac{2 \cdot 315}{37}\frac{a}{w_1} dx; \quad \delta_T = 5{,}83\sqrt{\frac{ax}{w_1}}$$

$$\text{Ca urmare} \quad \frac{\delta_L}{\delta_T} = \frac{5{,}83\sqrt{\dfrac{\nu \cdot x}{w_1}}}{5{,}83\sqrt{\dfrac{a \cdot x}{w_1}}} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} = \mathrm{Pr}^{1/2} \qquad (4.129)$$

Deci $\delta_L \approx \delta_T$ corespunde fluidelor cu $\mathrm{Pr} \cong 1$, deci gazelor perfecte.

(c) Stratul limită termic laminar pentru $\delta_T \ll \delta_L$

Urmînd aceeași metodă de calcul se obține:

$$\psi = \frac{\partial_T^2}{\partial_L}\int_0^{\delta_T} 2\frac{y}{\delta_T}\left(1 - \frac{y}{\delta_T} + 2\frac{y^3}{\delta_T^3} - \frac{y^4}{\delta_T^4}\right) d\left(\frac{y}{\delta_T}\right)$$

$$\psi = \frac{\delta_T^2}{\delta}\int_0^1 2\eta_T(1 - 2\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4) d\eta_T = \frac{\delta_T^2}{\delta_L}\frac{2}{15}$$

și

$$\frac{\partial \delta_T}{\partial x}\frac{\delta_T}{\delta_L}\frac{2}{15} = \frac{2a}{w_1 \delta_T}; \quad \frac{\delta_T}{\delta_L} = \xi; \quad \frac{2}{15}\xi\frac{\partial \delta_T}{\partial x} = 2\frac{a}{w_1 \delta_T}$$

$$\delta_T\, d\delta_T = 2\frac{15}{2}\frac{a}{\xi w_1} dx$$

$$\delta_T^2 = 30\frac{ax}{\xi w_1} = 30\frac{\delta_L}{\delta_T}\frac{ax}{w_1} + \delta_T^3 = 30\delta_L\frac{ax}{w_1}$$

$$\frac{\delta_L^3}{\delta_T^3} = \frac{34}{30}\frac{\nu}{a} = \frac{34}{30}\,\mathrm{Pr}\,;\quad \frac{\delta_L}{\delta_T} = 1{,}04\ \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \tag{4.130}$$

Deci cazul este aplicabil fluidelor cu Pr mare, adică lichidelor.

În cazul stratului limită dinamic turbulent, în curentul de gaz apar pulsații de viteză. Prin analogie în stratul limită termic turbulent vor apărea pulsații de temperatură. Așa cum pentru viteză există pulsația Δw, pentru temeparatură va exista pulsația Δt.

Pentru a extinde valabilitatea ecuației conservării energiei a stratului limită termic laminar și la stratul turbulent, se înlocuiesc valorile instantanee ale vitezei și temperaturii cu

$$w_x = \overline{w}_x + \Delta w_x\,;\quad w_y = \overline{w}_y + \Delta w_y\,;\quad \ldots,\ t = \overline{t} + \Delta t$$

valorile medii ale abaterilor de viteză și temperatură într-un interval scurt de timp, sînt :

$$\overline{\Delta w_x} = 0\,;\ \overline{\Delta w_y} = 0\,;\ \ldots\ \overline{\Delta t} = 0$$

Atunci ecuația energiei

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} + w_z\frac{\partial t}{\partial z} = a\cdot\nabla^2 t$$

sau

$$\frac{\overline{\partial t}}{\partial \tau} + w_x\frac{\overline{\partial t}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{(\Delta w_x\cdot\Delta t)} + \ldots = a\cdot\nabla^2\overline{t}$$

devine :

$$\frac{\overline{Dt}}{\mathrm{d}\tau} = a\nabla^2 t - \left[\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\Delta w_x\Delta t)} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{(\Delta w_y\Delta t)} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{(\Delta w_z\Delta t)}\right] \tag{4.131}$$

Termenul din paranteză dreaptă este o funcție de pulsațiile de viteză și de temperatură și reprezintă transferul de căldură convectiv.

În cazul curgerii gazului peste o suprafață plană, cu o viteză medie w_x funcție numai de y și un transfer de căldură numai pe direcția y, ecuația capătă formele simplificate

$$\frac{\overline{Dt}}{\mathrm{d}\tau} = a\frac{\overline{\partial^2 t}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{(\Delta w_y\cdot\Delta t)} \tag{4.132}$$

$$\frac{\overline{Dt}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{c_p\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\frac{\overline{\partial t}}{\partial y} - \rho c_p\overline{(\Delta w\Delta t)}\right] \tag{4.133}$$

11 — c. 668

Primul termen din paranteza mare reprezintă transferul de căldură conductiv, iar al doilea cel convectiv datorat difuziei (turbulent) care poate fi exprimat și prin relația

$$\rho c_p(\overline{\Delta w \Delta t}) = q_{\text{turb}} = -\rho c_p l' \sqrt{\overline{\Delta w_y^2}}\, \overline{\frac{\partial t}{\partial y}}$$

în care l' este lungimea de amestec, iar Δw_y^2-valoarea medie pătratică a pulsației de viteză pe direcția y. Deci fluxul termic total va fi

$$q = q_{\text{cond}} + q_{\text{turb}} = -\left[\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho c_p l' \sqrt{\overline{\Delta w_y^2}}\, \overline{\frac{\partial t}{\partial y}}\right] \quad (4.134)$$

Însemnînd cu $a = \lambda / c_p \rho$ și $\nu_{\text{turb}} = l' \sqrt{\overline{\Delta w_y^2}}$ (vîscozitatea cinematică datorată turbulenței) se obține

$$q = -\rho c_p (a + \nu_{\text{turb}}) \overline{\frac{\partial t}{\partial y}}.$$

Deci

$$\frac{\overline{Dt}}{d\tau} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial}{\partial y}\left[-\rho \cdot c_p\, (a + \nu_{\text{turb}}) \overline{\frac{\partial t}{\partial y}}\right]. \quad (4.135)$$

4.19. STRATUL LIMITĂ TERMIC AL GAZELOR PERFECTE PENTRU VITEZE DE CURGERE SUBSONICĂ (cu $M > 0{,}3$) ȘI SUPERSONICĂ

În cazul curgerii unui gaz cu o viteză subsonică dar cu $M > 0{,}3$, va apare în stratul limită, ca urmare a scăderii vitezei concomitent cu schimbul de căldură cu pereții, o creștere a presiunii și temperaturii momentane a lui. Ecuația energiei trebuind să țină seama de schimburile energetice ce au loc în stratul limită termic (în special cele ale termodifuziei) va avea forma

$$\rho c_p \frac{Dt}{d\tau} - \frac{Dp}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t + \mu\, D_{\text{iss}}\, [F\, k\, t(\vec{w})] \quad (4.136)$$

în care:

$$D_{\text{iss}}\, [F \cdot k \cdot t(\vec{w})] = 2\left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2\right] + $$

$$+ \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div}\, \vec{w})^2.$$

Acest termen reprezintă „funcția de disipare a energiei".

Ecuația de mișcare este:

$$\rho \frac{D\vec{w}}{d\tau} = \rho g - \Delta p + \mu \nabla^2 \vec{w} + \frac{1}{3}\mu \text{ grad div } \vec{w} \tag{4.137}$$

Considerînd că între două secțiuni oarecare *1* și *2*, gazul în debit $\dot{m}$ schimbă cu peretele un flux Q, entalpiile frînate h_0 în *1* și *2* vor fi

$$h_{01} - h_{02} = \frac{Q}{\dot{m}} = \left(h_1 + \frac{w_1^2}{2}\right) - \left(h_2 + \frac{w_2^2}{2}\right)$$

În cazul curgerii unui debit mare de gaz, cu o viteză mare peste o suprafață de lungime mică în direcția de curgere, (de exemplu paletă de turbină, ajutaj, difuzor, etc.) se poate considera din punct de vedere termic că procesul de curgere are loc adiabat (avînd în vedere valoarea $Q/\dot{m}$ care tinde către zero pentru $\dot{m}$ mare).

Entalpia frînată și temperatura frînată au formele cunoscute

$$h_0 = h + \frac{w^2}{2}; \quad T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{w^2}{2c_p T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

După cum se vede, pentru o curgere adiabată temperatura momentană a gazului în stratul limită depinde de viteza de curgere w. Pentru exemplificare se consideră curgerea unui gaz peste o suprafață solidă, avînd la intrarea peste suprafață o temperatură momentană $T = 288$ K și o viteză medie de curgere w corespunzătoare criteriului Mach cuprins între 0,1 și 20. În stratul limită, la $y = 0$ (la perete) viteza scade la $w = 0$. Ca urmare gazul la perete va avea temperatura frînată:

$$T_p = T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right).$$

Valorile temperaturii frînate a gazului la perete, pentru $k = 1{,}4$ și $T = 288$ K, în funcție de criteriul Mach al curgerii sînt prezentate în tabelul 4.5.

După cum se vede din tabelul 4.5 pentru o viteză pentru care $0 < M < 0{,}3$ temperatura frînată a gazului la perete este cu maxim 5 grade mai ridicată decît temperatura momentană medie din zona liberă; deci frînarea se poate neglija.

Din cele expuse pînă acum se constată o diferență fundamentală între noțiunea de strat limită termic în cazul curgerii gazelor cu $M < 0{,}3$, față de noțiunea de strat limită termic pentru $M > 0{,}3$.

Această diferență are la bază ipoteza fundamentală a apariției stratului limită termic și anume:

— în cazul curgerilor cu $M < 0{,}3$ stratul limită termic apare ca urmare a diferenței dintre temperatura medie momentană a gazului în

Tabelul 4.5

Temperatura T_0 a gazului la perete pentru k = 1,4 şi T = 288 K şi o viteză de curgere w

Temperatura gazului în zona liberă T [K]	$k = \frac{c_p}{c_v}$	Viteza medie de curgere $M = \frac{w}{a}$	Viteza de curgere la perete w_p [m/s]	Temperatura gazului la perete T_0 [K]	Creşterea de temperatură în stratul limită ΔT
288	1,4	0,1	0	288,57	0,57
288	1,4	0,2	0	290,30	2,30
288	1,4	0,3	0	293,20	5,20
288	1,4	0,5	0	302,4	20,4
288	1,4	0,75	0	320,25	32,25
288	1,4	1	0	345,6	57,6
288	1,4	2	0	518,4	230,4
288	1,4	3	0	806,4	518,4
288	1,4	4	0	1209,6	921,6
288	1,4	5	0	1728	1440
288	1,4	6	0	2361,6	2073,6
288	1,4	7	0	3110,4	2822,4
288	1,4	10	0	6048	5760
288	1,4	15	0	13248	12960
288	1,4	20	0	23328	23040

zona liberă şi temperatura peretelui. După cum se vede din tabelul 4.5 temperatura momentană a gazului diferă foarte puţin de temperatura frînată a lui la perete pentru curgeri cu M < 1. Deci stratul limită termic există numai atunci cînd $T_p \neq T$. Dacă $T_p = T$ curgerea prezintă un strat limită dinamic, dar cel termic este inexistent. S-a notat cu T temperatura momentană a gazului în zona liberă şi cu T_0 temperatura frînată a lui, deci la contactul cu peretele unde $w = 0$.

— în cazul curgerilor cu M > 1 diferenţa dintre temperatura momentană a gazului în zona liberă şi temperatura frînată la perete este mare. Deci stratul limită termic există chiar dacă $T_p = T_0$.

Problema se ilustrează printr-un exemplu, făcînd apel la datele din tabelul 4.5. Se consideră temperatura momentană a gazului în curgere $T = 288$ K. Se cere determinarea temperaturii peretelui T_p, pentru $M_1 = 0{,}2$ şi $M_2 = 4$.

Se constată, cu ajutorul datelor din tabel, că
— pentru $M_1 = 0{,}2$, $T_p = 290{,}3$ K
— pentru $M_2 = 4$ $T_p = 1209{,}6$ K

Deci diferenţa dintre temperatura peretelui T_p şi temperatura momentană a gazului defineşte gradientul de temperatură în stratul limită termic numai în cazul curgerilor cu M > 0,3.

Pe de altă parte, din datele cuprinse în tabelul 4.5 se constată că în cazul curgerii supersonice temperatura gazului în stratul limită capătă valori atît de mari încît poate duce la topirea sau schimbarea structurii materialului peretelui peste care curge. Această situaţie pune în evidenţă aşa-numitul „zid al temperaturii" unui gaz în curgere, care este temperatura de înmuiere sau de topire a materialului respectiv. Considerînd ca

zid al temperaturii valoarea maximă admisă a unui material oarecare din motive de rezistență, notată cu T_{zid}, se poate determina viteza maximă de curgere admisă pentru un gaz a cărui temperatură momentană medie este notată cu T, cu relația

$$w_{zid} = \sqrt{kRT}\sqrt{\frac{2(T_{zid} - T)}{T(k-1)}} \tag{4.135}$$

sau

$$M_{zid} = \sqrt{\frac{2(T_{zid} - T)}{T(k-1)}} \tag{4.136}$$

Ca exemplu, pentru un gaz perfect ($k = 1,4$) și o temperatură momentană medie de curgere $T = 288$ K, se prezintă în figura 4.22 zidul temperaturii de topire M_{zid} la o serie de metale.

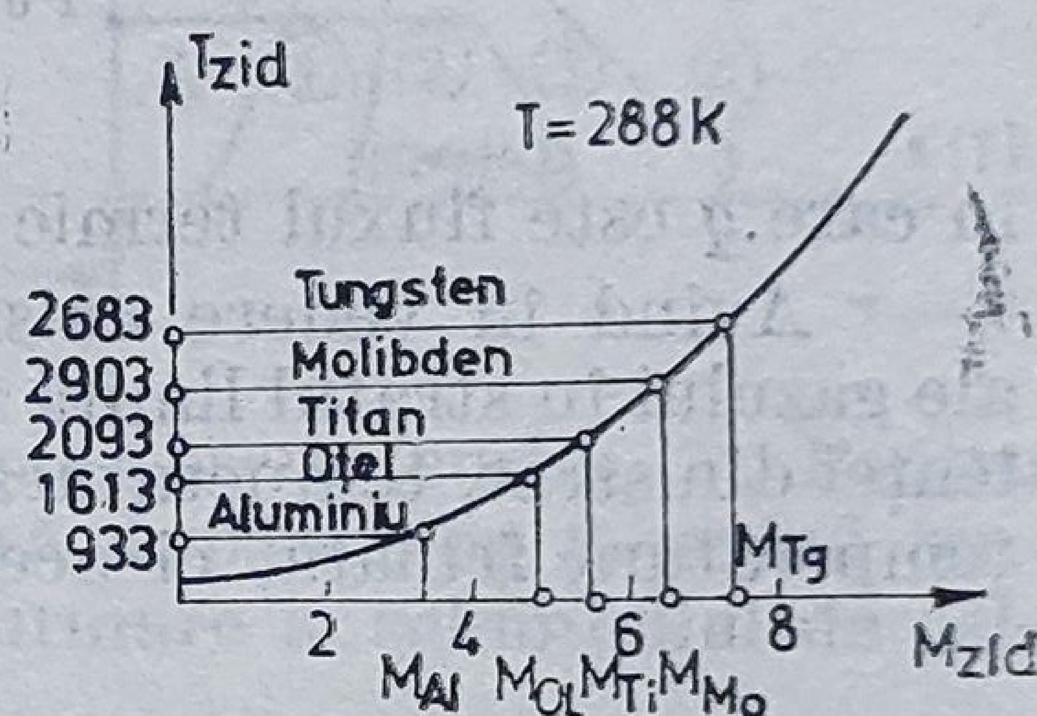


Fig. 4.22. Zidul temperaturii în funcție de criteriul Mach al curgerii.

Pe de altă parte, proprietățile termofizice ale gazului, ca urmare a creșterii temperaturii la valori ridicate, se modifică, putînd apărea diferite fenomene specifice temperaturilor înalte, de exemplu ionizarea gazului, disociații moleculare etc.

Ca urmare, în gazodinamică datorită fenomenelor ce apar în stratul limită, curgerile se împart în următoarele categorii :

(1) Curgeri lente cu $M < 0,3$ pentru care fenomenele de frînare din stratul limită dinamic sînt neglijabile pentru stratul limită termic ;

(2) Curgeri cu $0,3 < M < 0,9$, denumite și curgeri subsonice, cu viteză ridicată, caracteristice celor ce au loc în turbomașini și unde fenomenul de frînare prezintă o importanță limitată ;

(3) Curgeri cu $0,9 < M < 1,2$, denumite și *curgeri transonice* la care este posibilă apariția undei de șoc slabe, deci în care au loc salturi de compresiune, de densitate, temperatură etc. moderate și unde fenomenul de frînare prezintă oarecare importanță ;

(4) Curgeri cu $1,2 < M < 5$, denumite și *curgeri supersonice*, în care fenomenul de frînare prezintă o importanță deosebită din punct de vedere al stratului limită termic. Pentru aceste cazuri trebuie avută în vedere valoarea zidului de temperatură a materialului canalului, deoarece frînarea curentului în stratul limită poate duce la apariția proceselor de

vaporizare, sublimare, topire etc. a materialului din care sînt confecționați pereții canalului prin care are loc curgerea.

(5) Curgeri cu M > 5, denumite și *curgeri hipersonice*, în care frînarea în stratul limită poate duce la ionizarea gazului ce curge, deci la trecerea lui în stare de plasmă.

Valoarea presiunii gazului în stratul limită dinamic se determină cu relația cunoscută a presiunii frînate :

$$p_0 = p + \frac{\rho \cdot w^2}{2}$$

În cazul cînd în stratul limită termic are loc și un schimb de căldură între perete și gaz, deci în prezența unui flux termic, presiunea frînată este dată de relația

$$p_0 = p + \rho \frac{w^2}{2} \pm \rho \cdot q$$

în care q este fluxul termic schimbat de gaz cu pereții canalului.

Avînd în vedere existența termoconducției între liniile de curent ale gazului în stratul limită termic, precum și fluxul termic datorat turbulenței din strat, temperatura gazului la perete, notată cu T_r, nu este chiar temperatura frînată, ci aceea dată de relația

$$T_r = T + r\frac{w^2}{2c_p} = T\left(1 + r\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)$$

în care $T_r < T_0$, ea fiind temperatura gazului la perete unde se presupune că $w = 0$, iar r „coeficientul de recuperare" sau „coeficientul parietal al vitezei" dat de relația

$$r = \frac{T_r - T}{T_0 - T} = \frac{T_r - T}{\dfrac{w^2}{2c_p}} \qquad (4.137)$$

Coeficientul r poate fi exprimat și în funcție de cifra M a curgerii cu relația

$$T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right); \quad T_0 - T = T\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2$$

$$r = \frac{T_r - T}{T\dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}^2} \qquad (4.138)$$

Diferența dintre temperatura frînată T_0 pe care ar trebui să o aibă gazul la perete pentru o frînare totală și T_r pe care el o are se datorește raportului dintre difuzibilitatea moleculară a cantității de mișcare (μ/ρ) și coeficientul de difuzibilitate termică $(a = \lambda/\rho c_p)$, deci depinde de criteriul Prandtl al gazului dat de o relație de forma $r = \sqrt{\mathrm{Pr}}$.
După cum se vede coeficientul parietal al vitezei este independent de cifra M și criteriul Re al curgerii.

În figura 4.23 se prezintă curbele de variație a temperaturii gazului T în stratul limită termic pentru diferite valori M. Pentru curgeri cu $\mathrm{M} < 0{,}3$, variația temperaturii gazului în stratul limită termic are loc

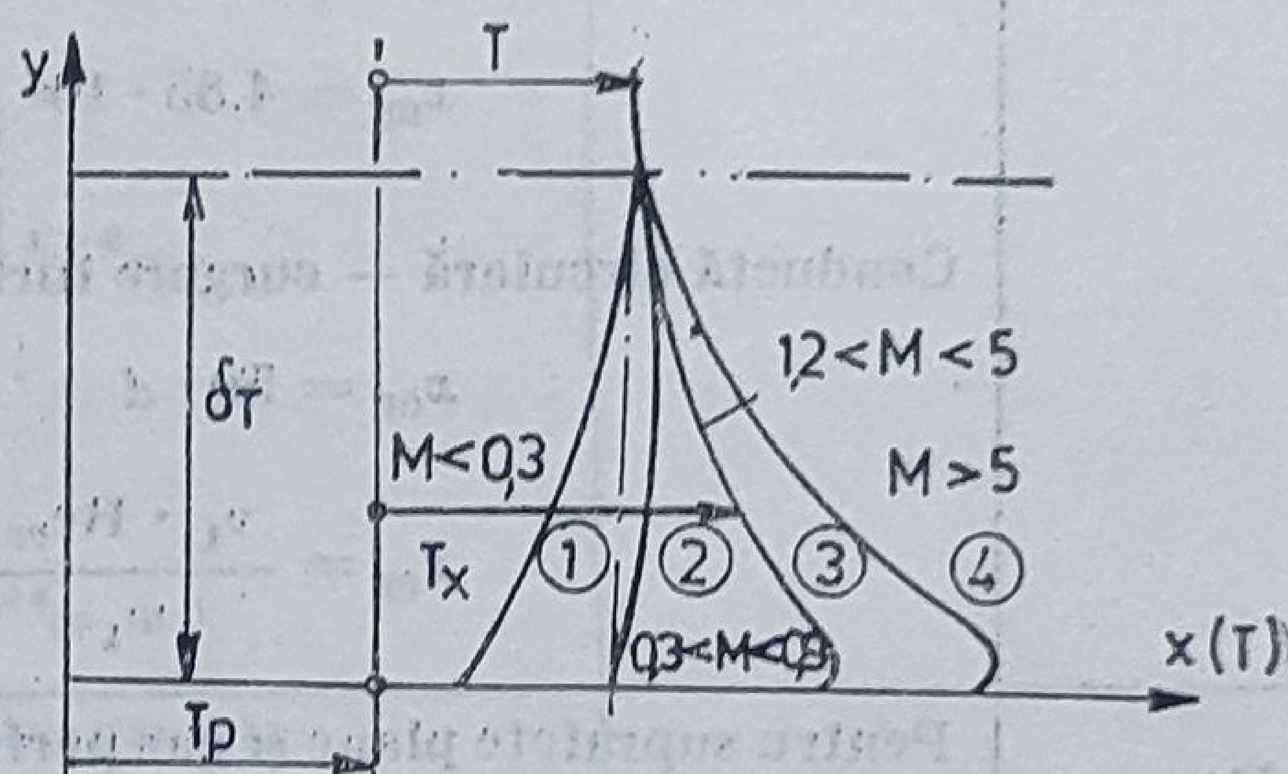


Fig. 4.23. Variația temperaturii în stratul limită termic.

numai ca urmare a schimbului de căldură gaz-perete (curba *1*). Pentru curgeri cu $0{,}3 < \mathrm{M} < 0{,}9$ temperatura variază după curba *2*, avînd tendința să crească, dar la un moment dat, ca urmare a schimbului de căldură cu peretele, începe să scadă.

Pentru $1{,}2 < \mathrm{M} < 5$, temperatura gazului crește pînă la valoarea frînată T_0 așa cum se vede din curba *3*, dar în vecinătatea peretelui ea scade pînă la valoarea T_r ca urmare a schimbului de căldură cu peretele. Curba *4* prezintă variația temperaturii în stratul limită pentru $\mathrm{M} > 5$. Deci curba de variație a temperaturii în stratul limită termic pentru curgeri transonice, supersonice și hipersonice nu mai poate fi reprezentată printr-o ecuație monotonă, deoarece apar puncte de discontinuitate ca urmare a tendințelor antagoniste datorate frînării și schimbului de căldură cu peretele (sau cumulative dacă $T_p > T$).

În cazul mediilor bifazice cu viteză transonică sau supersonică, stratul limită termic și relațiile de calcul devin identice cu cele ale gazului perfect, deoarece creșterea temperaturii este resimțită numai de faza gazoasă și, ca urmare a încălzirii ei, faza lichidă se vaporizează. Diferența dintre stratul limită termic al mediului bifazic și cel al gazului perfect, constă numai în ceea ce privește schimbul de căldură prin termoconducție, deci se reflectă numai în valoarea coeficientului r, a cărei valoare este mai mică la mediul bifazic decît la cel monofazic. Dacă pentru gazul perfect r variază între valorile 0,65 și 0,95, pentru cel bifazic, determinat numai pe cale experimentală, este cuprins între 0,30 și 0,45.

Tabelul 4.6.

Mărimile caracteristice ale stratului limită dinamic și termic

Mărimea	Valoarea	Obs.
x_{cr}	Suprafață plană — curgere laminară — : $$x_{cr} = 5 \cdot 10^5 \frac{\nu_1}{w_1}$$ Suprafață plană — curgere turbulentă — : $$x_{cr} = 4{,}85 \cdot 10^5 \frac{\nu_1}{w_1}$$ Conductă circulară — curgere turbulentă — : $$x_{cr} = 50 \cdot d$$ $$x_{cr} = \frac{\nu_1 \cdot Re_{cr}}{w_1}$$	x_{cr} = lungimea de stabilizare; w_1 = viteza medie în zona liberă a curgerii
Re_{cr}	Pentru suprafețe plane și gaz perfect : $$Re_{cr_L} = \frac{w_1 \cdot x}{\nu_1} \approx 3 \cdot 10^5$$ Pentru conducte circulare și gaz perfect : $$Re_{cr_L} = \frac{w_m \cdot d}{\nu_1} \approx 2400$$	Valoarea la care are loc trecerea de la regimul de curgere laminar la cel turbulent.
	Curgerea forțată a unui gaz perfect peste o suprafață plană orizontală : $$Re_{cr_t} = 5 \cdot 10^5$$ Curgerea forțată a unui gaz perfect printr-o conductă cu diametrul mic $$Re_{cr_L} < 2000$$	Re_{cr_t} valoarea la care are loc trecerea de la regimul tranzitoriu la cel turbulent.
	Curgerea liberă (sub acțiunea forțelor gravitaționale) a unui gaz perfect : $$\lvert Gr \cdot Pr \rvert_{cr} = 10^4 \ldots 10^7$$ $$\lvert Gr \cdot Pr \rvert_{cr} = 10^7 \ldots 10^9$$	Trecerea la regim tranzitoriu. Trecerea la regim turbulent.
	Curgere forțată sau liberă a mediilor bifazice : $Re < 30 \ldots 50$	Regim laminar
	$30 \ldots 50 < Re < 160 \ldots 400$	Regim tranzitoriu
	$Re > 160 \ldots 400$	Regim turbulent

Mărimea	Valoarea	Obs.
δ	Curgere laminară forțată peste o suprafață plană : $$\delta = 5{,}83\,\frac{x}{Re^{1/2}}\Bigg|_{x>x_{cr}}$$ Curgere turbulentă forțată peste o suprafață plană : — substratul laminar $$\delta_{lam} = \frac{37{,}2\cdot x}{Re^{0{,}912}}\Bigg|_{x>x_{cr}}$$ — substratul limită turbulent : $$\delta_{turb} = \frac{0{,}37\cdot x}{Re^{0{,}2}}\Bigg|_{x>x_{cr}}$$ Curgere liberă (sub acțiunea forțelor gravitaționale) : grosimea substatului laminar $$\delta_{lam} = 4{,}23\sqrt[4]{\frac{\mu\cdot\lambda\cdot x}{c_p\cdot\beta\cdot\rho^2\cdot g\cdot\Delta t}}$$ Grosimea substratului de lichid în regim laminar la stratul limită al mediilor bifazice $$\delta_l = \left(\frac{\nu_l\cdot\dot{V}_l}{g}\right)^{1/3}$$ Curgere forțată în lungul unei plăci plane verticale ; $$\delta^* = 1{,}73\sqrt{\frac{w_x}{w_1}}\ \text{(substrat laminar)}$$ $$\delta^{**} = 0{,}664\sqrt{\frac{w_x}{w_1}}\ \text{(substratul turbulent)}$$ Curgere laminară în lungul unei plăci orizontale $$\delta_l = \frac{4{,}64\cdot x}{Re^{1/2}}$$	δ — grosimea stratului limită dinamic $\Delta t = t_f - t_p$ $\dot{V}_l$ = debitul de lichid pe unitatea de suprafața în $m^3/h\cdot m^2$

Mărimea	Valoare	Obs.
w_x	Curgere laminară a gazului perfect în conducte circulare: $$w_x = w_{max}\left[1-\left(\frac{R_x}{R}\right)^2\right]$$ — viteza medie de curgere: $$w_m = \frac{1}{\pi \cdot R^2}\int_0^R w_{max}\left[1-\left(\frac{R_x}{R}\right)^2\right] 2\cdot\pi\cdot R_x\cdot dR_x$$ $$w_m \approx \frac{1}{2} w_{max}$$ Curgere laminară prin canale cu dimensiunile $h\times 2\cdot h$: $$w_x = w_{max}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)$$ — viteza medie de curgere: $$w_m = \frac{1}{2\cdot h}\int_{-h}^{+h} w_{max}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right) dy$$ $$w_m \approx \frac{2}{3} w_{max}$$ Curgere laminară peste o placă plană orizontală: $$w_x = w_1\left[1{,}5\frac{y}{\delta} - 0{,}5\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$$ Curgere turbulentă forțată prin conducte circulare: — viteza în substratul laminar: $$\frac{w_x}{w_1} = \frac{y\left(\frac{\tau_f}{\nu}\right)^{1/2}}{\nu}$$ — viteza în substratul tranzitoriu: $$w_x = w_1\left[5\cdot \ln\frac{y\left(\frac{\tau_f}{\nu}\right)^{1/2}}{\nu} - 3{,}05\right]\cdot$$	w_x = viteza de curgere la: $-R < R_x < R$ $w_x\big\|_{R_x=0} = w_{max}$

Tabelul 4.6 (continuare)

Mărimea	Valoarea	Obs.
	— viteza în substratul turbulent: $$w_x = w_1 \left[5{,}5 + 2{,}5 \cdot \ln \frac{y\left(\frac{\tau_f}{\nu}\right)^{1/2}}{\nu}\right]$$ Curgere turbulentă forțată peste o placă plană rugoasă: $$w_x = w_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$ Curgere turbulentă prin conducta circulară cu diametru mic, la care: $$\delta = R;\ w_1 = w_{max}$$ $$\frac{w_x}{w_{max}} = \left(1 - \frac{R_x}{R}\right)^{1/7}$$ — viteza medie: $$w_m = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \int_0^R w_{max} \left(1 - \frac{R_x}{R}\right)^{1/7} 2\pi \cdot R_x \cdot dR_x$$ $$w_m \approx \frac{49}{60} w_{max} = 0{,}17 \cdot w_{max}.$$ Curgere turbulentă prin canal rectangular cu laturile $h \times 2h$: $$\frac{w_x}{w_{max}} = \left(\frac{y}{h}\right)^{1/7}$$	
	— viteza medie: $$w_m = \frac{1}{2 \cdot h} \int_{-h}^{+h} w_x \cdot dy$$ $$w_m = \frac{1}{2} w_{max} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{y}{h}\right) d\left(\frac{y}{h}\right)$$ $$w_m \approx \frac{7}{8} w_{max}$$	

Mărimea	Valoarea	Obs.
δ_T	Stratul limită termic laminar la curgerea forțată pentru o suprafață plană : $$\delta_T = \frac{4{,}64 \cdot x}{\sqrt{Re_x}\sqrt[3]{Pr}}$$ $$\delta_T = \delta \sqrt[3]{Pr}$$ Variația temperaturii în stratul limită termic laminar la curgerea forțată peste o suprafață plană : $$\frac{\theta}{\theta_0} = 1{,}5\frac{y}{\delta_T} - 0{,}5\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3$$	δ_T — grosimea stratului limită termic $\theta = t_1 - t_p$ $\theta_0 = t - t_p$ t — temperatura în stratul limită termic ; t_1—temperatura fluidului
	Variația temperaturii în stratul limită termic la curgerea forțată printr-o conductă : $$\frac{T}{T_0} = 1 - M^2_{max}\left(\frac{w_x}{w_1}\right)^2$$ Temperatura gazului la perete, pentru curgerea supersonică : $$\frac{T_r}{T_1}\left(1 + r\frac{k-1}{2}M_x^2\right)$$ Coeficientul parietal la perete, r la curgerea supersonică $$r = \frac{T_r - T}{T\frac{k-1}{2}M^2}$$	$M_x = \frac{w_x}{a}$

4.20. VALORILE CARACTERISTICE ALE STRATULUI LIMITĂ DINAMIC ȘI TERMIC

În calculul teoretic al stratului limită dinamic și termic s-a presupus că variația vitezei și temperaturii în stratul respectiv este dată de o ecuație monotonă, cu limitele $w_x = w_1$ la $y = \delta$ și $w_x = 0$ la $y = 0$, iar pentru viteze de curgere cu $M < 0{,}3$ temperatura T_x variază după o lege analoagă, cu limitele $T_x = T_f$ la $y = \delta_T$ și $T_x = T_p$ la $y = 0$ (T_f = temperatura medie a fluidului ; T_p = temperatura peretelui).

În termogazodinamică, curgerea gazului fiind însoțită atît de schimburi enegetice între el și pereții canalului sub formă de căldură, cît și de transformări termodinamice ce conduc la o variație a temperaturii T_f în lungul peretelui $[T_f = f(x)]$; deci legea de variație a temperaturii și vitezei în stratul limită nu mai este monotonă, ci este o funcție complexă specifică fiecărui caz în parte.

Ca urmare, rezolvarea problemei principale a stratului limită dinamic și termic, anume determinarea funcțiilor $w_x = f(y)$ și $T_x = f(y)$ și a grosimii δ și δ_T, se poate face cel mai ușor pe cale experimentală.

În tabelul 4.6 sînt prezentate mărimile caracteristice ale stratului limită dinamic și termic, pentru o serie de cazuri tehnice.

Valorile trecute în tabelul 4.6 sînt numai orientative, ele avînd caracterul unei cifre de control cu care să se compare ordinul de mărime al valorii obținute analitic sau experimental pentru un caz similar. Pentru calcule estimative, ele pot fi și utilizate însă și ca atare.

5. CURGEREA GAZELOR PRIN AJUTAJE ȘI DIFUZOARE GEOMETRICE

5.1. AJUTAJ GEOMETRIC AXIAL PENTRU GAZUL PERFECT

Transformarea energiei potențiale a unui gaz, în energie cinetică, se face cu ajutorul unui canal cu secțiune variabilă, denumit *ajutaj*. În el are loc o destindere adiabată a gazului de la entalpia h_1 la entalpia h_2. Lucrul mecanic produs prin destindere este consumat pentru mărirea energiei cinetice a gazului în curgere.

Variația energiei cinetice a gazului la trecerea prin ajutaj este dată de expresiile

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = h_1 - h_2 \tag{5.1}$$

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) - \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) \tag{5.2}$$

Cu indicele ,,1'' se notează mărimile medii ale parametrilor gazului la intrarea în ajutaj și cu ,,2'' cele la ieșire. În ajutaj, considerînd lucrul mecanic de frecare nul (proces adiabat-reversibil), sînt satisfăcute relațiile

$$h_{01} = h_{02}\,;\ \ w_2 > w_1\,;\ \ h_2 < h_1\,;\ \ p_2 < p_1\,;\ \ u_2 < u_1 \tag{5.3}$$

În procesul de destinderea adiabat-reversibil a unui gaz $h_1 - h_2 = -\int_1^2 v \cdot \mathrm{d}p$ și ca urmare relația (5.1) poate fi exprimată sub forma

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = h_1 - h_2 = \int_1^2 - v \cdot \mathrm{d}p|_{\mathrm{d}q=0} =$$

$$= \sqrt{2\,\frac{k}{k-1}\,\frac{p_1}{\rho_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}\ \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.4}$$

Deci, într-un ajutaj geometric procesul de accelerare (creștere a

energiei cinetice) a curentului de gaz are loc pe seama lucrului mecanic produs prin destinderea lui de la entalpia momentană h_1 la h_2.

Ținînd seama de relațiile pentru calculul parametrilor unui curent de gaz, valorile medii momentane ale lor într-o secțiune oarecare x, pe direcția de curgere, sînt date de relațiile (5.5):

$$T_x = \frac{T_{01}}{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2} \ [\mathrm{K}]; \ p_x = \frac{p_{01}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_x^2\right)^{\frac{k-1}{k}}} \ [\mathrm{N/m^2}] \tag{5.5}$$

$$\rho_x = \frac{\rho_{01}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_x^2\right)^{\frac{1}{k-1}}} \ [\mathrm{kg/m^3}]; \quad v_x = v_{01} \left[1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_x^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \ [\mathrm{m^3/kg}]$$

În aceste expresii cu T_x, p_x, ρ_x etc s-a notat mărimea momentană a parametrului respectiv în secțiunea x, iar cu T_{01}, p_{01}, ρ_{01} etc mărimea frînată în secțiunea de intrare a ajutajului; M_x este valoarea criteriului Mach în secțiunea x.

Deoarece curgerea gazului prin ajutajul geometric are loc în regim permanent stabilizat ea respectă ecuația continuității și anume $\dot{m} = \rho_x \cdot w_x A_x = \mathrm{const.}$, în care $\dot{m}$ este debitul masic în kg/s, A_x — secțiunea canalului în m² și w_x — viteza medie de curgere în m/s, în secțiunea x. Respectarea ecuației de continuitate înseamnă că secțiunea canalului trebuie să urmeze o lege de variație care să satisfacă relația (5.6, a):

$$\dot{m} = A_x \frac{w_x}{v_x} = \frac{A_x}{v_x} \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad [\mathrm{kg/s}] \tag{5.6, a}$$

în care pentru un proces adiabat-izentrop

$$v_x = v_1 \left(\frac{p_1}{p_x}\right)^{\frac{1}{k}} \ [\mathrm{m^3/kg}]; \quad \rho_x = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \ [\mathrm{kg/m^3}]$$

$$\dot{m} = A_x \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 \rho_1 \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}} \quad [\mathrm{kg/s}] \tag{5.6, b}$$

Debitul de gaz $\dot{m}$ ce poate trece prin secțiunea A_x este maxim ($\dot{m}_{max}$) pentru o destindere de la p_1 la $p_{cr} = p_1(2/k+1)^{k/k-1}$; pentru o destindere de la p_1 la $p_2 < p_{cr}$, debitul rămîne constant și egal cu $\dot{m}_{max}$, dat de expresia

$$\dot{m}_{max} = A_{min} \sqrt{k p_1 \rho_1 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

în care A_{min} este secțiunea sonoră a ajutajului (unde viteza este egală cu viteza sunetului).

Secțiunile de intrare *1* și de ieșire *2* ale ajutajului supersonic se obțin cu relațiile de continuitate:

$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 w_1} \ [\mathrm{m}^2]; \tag{5.7}$$

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 w_2} \ [\mathrm{m}^2] \tag{5.8}$$

5.2. AJUTAJ GEOMETRIC AXIAL, SUPERSONIC, PENTRU GAZUL PERFECT

Din relațiile (5.7) și (5.8) se constată că secțiunea A_2 de ieșire a ajutajului poate fi mai mică, egală sau mai mare decît cea de intrare A_1 în funcție de raportul p_2/p_1. Pentru determinarea variației secțiunii ajutajului geometric, se pleacă de la condiția gazodinamică de bază pe care trebuie să o îndeplinească și anume ca ecuația de continuitate să fie satisfăcută în orice secțiune a lui, notată cu A. Notînd cu p și w presiunea momentană și viteza curentă se obține din ecuația continuității :

$$\rho w A = \mathrm{Const.} \tag{5.9}$$

Prin derivare se obține

$$A w \mathrm{d}\rho + A\rho \cdot \mathrm{d}w + \rho w \cdot \mathrm{d}A = 0$$

Prin împărțire cu $\rho w A$ se obține :

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = -\frac{\mathrm{d}w}{w} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{5.10}$$

Deoarece procesul este o destindere adiabat-izentropă, ținînd seama de relația (5.4) se obține :

$$\int -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{w^2}{2}\bigg|_{w_1=0} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = w\mathrm{d}w$$

$$\frac{p}{\rho^k} = \mathrm{const.} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{1}{kp}\mathrm{d}p$$

Prin înlocuire, relația (5.10) capătă forma

$$\left(\frac{w^2}{a^2} - 1\right)\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}A}{A}; \quad (\mathrm{M}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}A}{A} \tag{5.11}$$

Din expresia (5.11), care exprină variația secțiunii ajutajului $\mathrm{d}A/A$ în direcția de curgere, în funcție de criteriul Mach în secțiunea respectivă,

se constată că dw/w este întotdeauna pozitiv, deoarece viteza crește și ca urmare pentru accelerarea unui curent ce curge cu o viteză ce corespunde criteriului Mach :

$$M < 1;\ \text{curgerea subsonică};\ \frac{dA}{A} < 0,\ \text{secțiune convergentă};$$

$$M = 1;\ \text{curgere sonică};\ \frac{dA}{A} = 0;\ \text{secțiune constantă};$$

$$M > 1;\ \text{curgere supersonică};\ \frac{dA}{A} > 0;\ \text{secțiune divergentă}.$$

Ca urmare pentru obținerea unei curgeri supersonice, ajutajul trebuie să aibă mai întîi o secțiune convergentă, pînă cînd M devine egal cu 1, deci pînă cînd viteza $w = a$ și apoi una divergentă pentru ca w să devină $> a$. Secțiunea unui ajutaj supersonic este prezentată în figura 5.1. În secțiunea minimă a acestuia, viteza va fi egală cu viteza sunetului și ca urmare toți parametrii gazului vor avea valorile critice date de relațiile cunoscute (5.12) :

$$\left.\begin{aligned} T_{cr} &= \frac{T_{01}}{\frac{k-1}{2}} = \frac{2}{k+1} T_0; \quad p_{cr} = p_{01}\left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k}{k-1}} \\ v_{cr} &= v_{01}\left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}}; \quad \rho_{cr} = \frac{\rho_{01}}{\left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}}} \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Secțiunea critică nu va fi o conductă cu secțiune constantă, ci o secțiune plană, avînd în vedere că pentru atingerea regimului supersonic $dA/A = 0$. Astfel pentru ca viteza de curgere a unui gaz perfect să treacă de la $M = 0{,}9$ la $M = 1$, secțiunea se va micșora cu 1%, iar pentru ca să treacă de la $M = 0{,}95$ la $M = 1$, se va micșora cu 0,25%. Ca urmare este practic imposibil de menținut regimul sonic de curgere pe o conductă cu secțiune constantă.

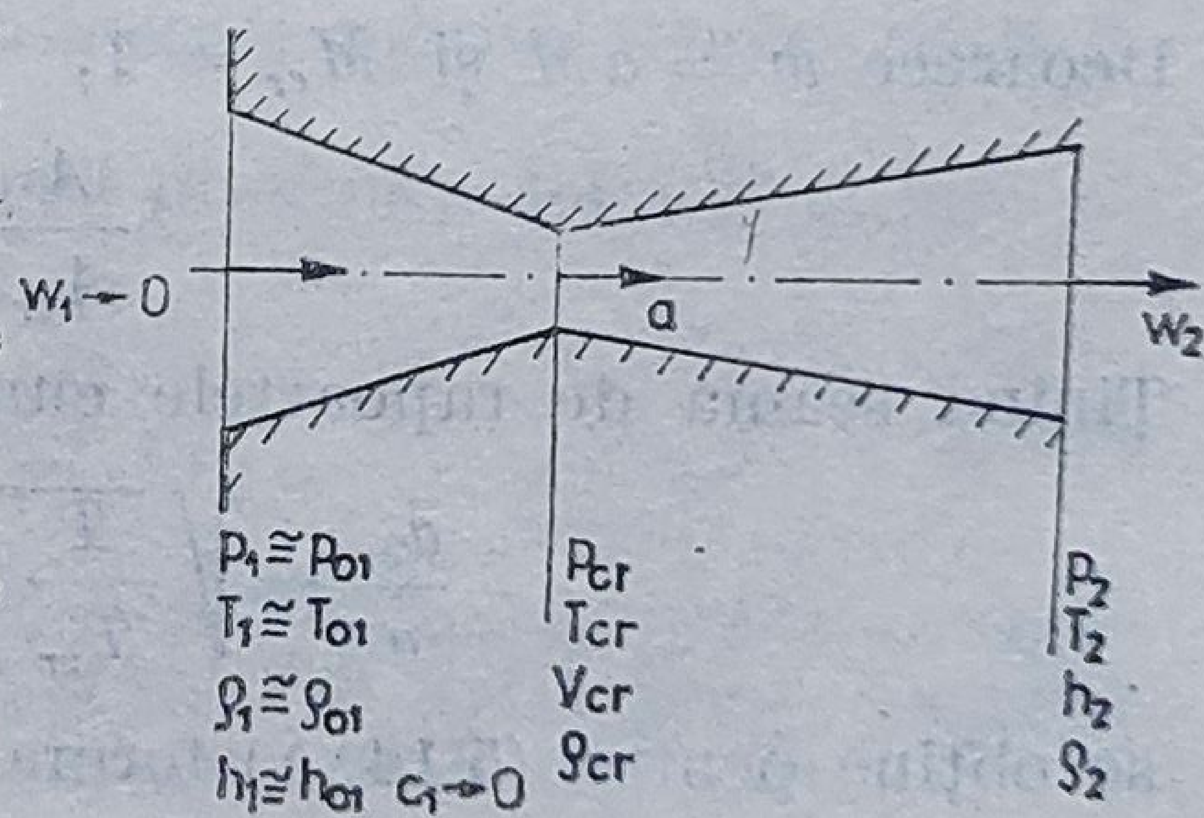


Fig. 5.1. Ajutaj supersonic.

Exprimarea ecuației de variație a secțiunii ajutajului geometric se face apelînd la ecuația de continuitate scrisă în funcție de volumul specific al gazului într-o secțiune oarecare. Astfel, pentru o secțiune A, în care viteza este w și volumul specific v, se obține

$$\text{const} = \dot{m} = A\frac{w}{v};\quad A = \text{const}.\frac{v}{w}$$

sau :

$$\frac{dA}{A} = \text{const.} \frac{\frac{dv}{v}}{\frac{dw}{w}} \tag{5.13}$$

Deci variaţia secţiunii va depinde de raportul între variaţia volumului specific şi variaţia vitezei. Din ecuaţia (5.5) şi figura 5.2 se vede că cele două curbe de variaţie a vitezei şi volumului specific, în funcţie de raportul de presiuni p/p_1, au concavităţi inverse. Deci pentru $p/p_1 > p_{cr}/p_1$ (adică pentru $w < a_{cr}$) gradientul vitezei este mai mare decît al volumului specific şi ca urmare secţiunea este convergentă ($dA/A < 0$). Pentru $w > a_{cr}$, gradientul volumului specific este mai mare decît al vitezei şi, ca urmare, trebuie ca $dA/A > 0$ (secţiune divergentă).

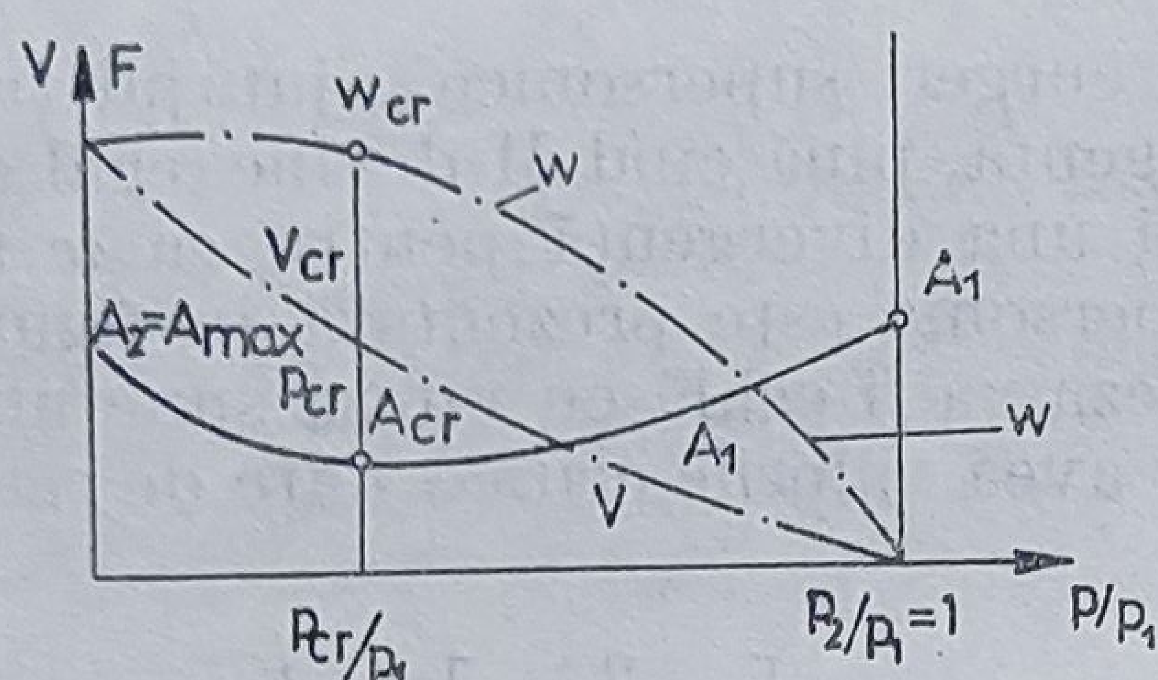


Fig. 5.2. Variaţia vitezei de curgere şi a volumului specific într-u ajutaj supersonic.

Valoarea critică a mărimilor termofizice ale gazului de stare iniţială 1 este dată în relaţia (5.12), iar viteza critică a lui este $a_{cr} = \sqrt{kRT_{cr}} = \sqrt{kp_{cr}v_{cr}}$. Secţiunea curentă a ajutajului A, în funcţie de secţiunea critică A_{cr} unde gazul are viteza $w = a$ sub forma adimensională A/A_{cr}, se poate obţine pornind de la ecuaţia continuităţii (5.14, a) :

$$\rho w A = \rho_{cr} w_{cr} A_{cr} ; \quad \frac{A}{A_{cr}} = \frac{\rho_{cr} w_{cr}}{\rho w} \tag{5.14}$$

Deoarece $w = aM$ şi $M_{cr} = 1$,

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{\rho_{cr} \cdot a_{cr}}{\rho \cdot aM} \tag{5.14, a}$$

Ţinînd seama de rapoartele cunoscute

$$\frac{a_{cr}}{a} = \sqrt{\frac{T}{T_{cr}}} \quad \text{şi} \quad \frac{\rho_{cr}}{\rho} = \left[\frac{T}{T_{cr}}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

se obţine pentru (5.14, a) forma (5.14, b)

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{1}{M} \left[\frac{T_{cr}}{T}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{5.14, b}$$

Făcînd apel la (5.5) raportul T_{cr}/T se poate exprima în funcţie de M :

$$\frac{T_{cr}}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \tag{5.15}$$

Ca urmare (5.14, a) devine :

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k+1)}}} \tag{5.16}$$

Deci secţiunea adimensională A/A_{cr} este o funcţie de cifra M a curgerii. Pentru un gaz perfect cu $k = 1{,}4$ şi $k = 1{,}3$, se obţin :

$$\left.\frac{A}{A_{cr}}\right|_{k=1,4} = \frac{(1 + 0{,}2\,M^2)^3}{1{,}2^3 M} \tag{5.17}$$

$$\left.\frac{A}{A_{cr}}\right|_{k=1,3} = \frac{(1 + 0{,}15 \cdot M^2)^{2.16}}{1{,}15^{2.16} \cdot M} \tag{5.18}$$

În figura 5.3 se reprezintă variaţia secţiunii adimensionale A/A_{cr} dată de (5.16). Se observă că fiecăreia dintre valorile raportului A/A_{cr} îi corespund două valori ale criteriului Mach, una pentru curgerea subsonică şi cealaltă pentru curgerea supersonică. O valoare unitară se obţine numai la rădăcina dublă a ecuaţiei (5.16) ce corespunde valorii M = 1.

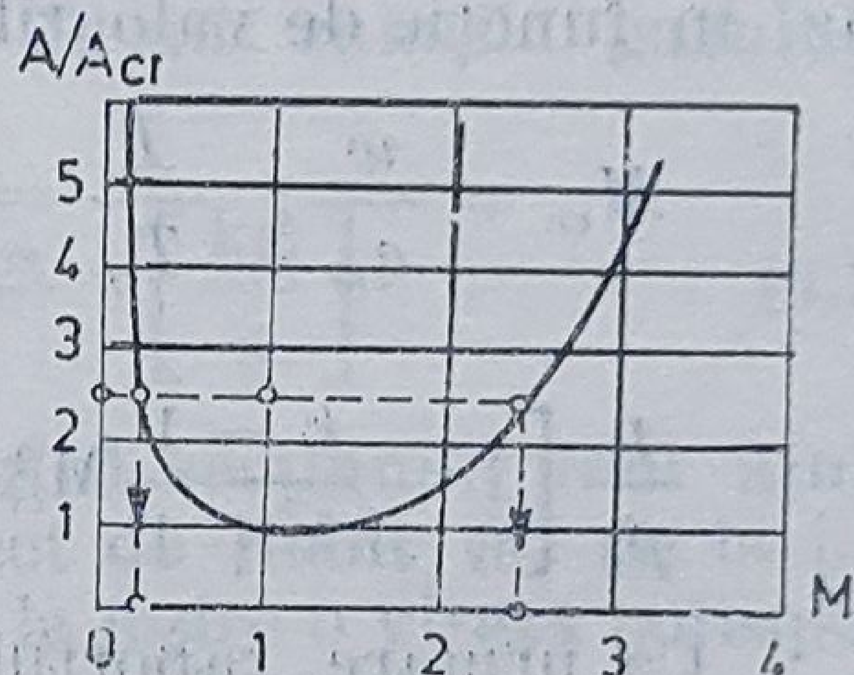


Fig. 5.3. Variaţia secţiunii adimensionale A/A_{cr} într-un ajutaj supersonic.

Valoarea presiunii şi densităţii medii a gazului în secţiunea perpendiculară pe axa ajutajului sînt exprimate în funcţie de valorile respective ale lui la intrarea în ajutaj, considerate mărimi frînate, dacă w_1 se consideră că are valoarea zero.

Dacă w_1 are o valoare finită, atunci presiunea iniţială devine p_{01} (frînată) şi este dată de relaţia (5.19)

$$p_{01} = p_1 + \frac{\rho_1 w_1^2}{2}, \tag{5.19}$$

Între presiunea şi temperatura gazului la intrarea în ajutaj, notate (pentru simplificarea notaţiilor) cu p_0 şi T_0 şi valorile p şi T într-o secţiune oarecare, pentru o destindere adiabat-izentropă, există legătura

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T_0}{T} \tag{5.20}$$

Viteza w_2 la ieşire rămîne constantă, numai dacă şi presiunea şi temperatura gazului în secţiunile de intrare şi ieşire rămîn constante.

În cazul cînd presiunea sau temperatura iniţială sau finală cresc sau scad, nu prea mult, în secţiunea finală a ajutajului viteza w_2 va fi diferită de aceea calculată.

Pentru exemplificare se consideră un ajutaj cu secţiunile A_1 şi A_2 calculat pentru presiunea şi temperatura la intrare p_0 şi T_0, iar presiunea la ieşire $p_2 = p_{amb}$, căreia îi corespunde temperatura T_2. Dacă presiunea la intrare devine $p_0 + \Delta p_0$, iar temperatura rămîne T_0, ajutajul va destinde adiabat gazul numai pînă la o presiune $p_2 + \Delta p_2 > p_{amb}$.

Destinderea de la $p_2 + \Delta p_2$ la presiunea p_{amb} va avea loc într-un ajutaj fictiv, reprezentat pe figura 5.4 prin linie punctată (v. pag. 183).

Dacă presiunea iniţială scade faţă de valoarea calculată, atunci în secţiunea de ieşire a ajutajului se va obţine o presiune $p_2 < p_{amb}$.

În concluzie, pentru o construcţie existentă, presiunea la ieşirea din ajutajul supersonic nu este dictată de presiunea spaţiului în care iese jetul de gaz, ci numai de presiunea iniţială p_0.

În cazul ajutajelor supersonice, variaţia temperaturii, presiunii şi densităţii medii a gazului în secţiune se poate exprima şi în funcţie de criteriul Mach critic.

Relaţiile dintre mărimile termofizice momentane (p, T, ρ) ale unui gaz, în funcţie de valoarile frînate iniţiale (p_0, T_0, ρ_0) şi de M_{cr} sînt :

$$\left.\begin{aligned} M_{cr} = \frac{w}{a_{cr}}; \quad \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \\ \frac{p}{p_0}\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cs}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

Ca urmare, raportul constructiv adimensional A/A_{cr}, în funcţie de M_{cr} este dat de relaţiile (5.22)

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{\rho_{cr} a_{cr}}{\rho w}; \quad \frac{\rho_{cr}}{\rho} = \left[\frac{T_{cr}}{T}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{A}{A_{cr}} = \frac{1}{M_{cr}}\left[\frac{\frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{5.22}$$

Debitul masic de gaz ce poate trece prin ajutaj este cel ce trece prin orice secţiune (regimul fiind permanent), deci şi cel ce trece prin secţiunea critică. Ca urmare,

$$m = \rho_{cr} \cdot a_{cr} \cdot A_{cr} [\mathrm{m/s}] \tag{5.23}$$

Deoarece între mărimile critice şi cele frînate (iniţiale) există legătura

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_0}{T_{cr}} = \frac{k+1}{2}; \quad \frac{\rho_0}{\rho_{cr}} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \\ \frac{p_0}{p_{cr}} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{a_0}{a_{cr}} = \left[\frac{T_0}{T_{cr}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

Pentru un gaz perfect cu $k = 1{,}4$ se obține :

$$T_{cr} = 0{,}83\ T_0; \qquad \rho_{cr} = 0{,}63\ \rho_0; \qquad p_{cr} = 0{,}529\ p_0;$$

$$a_{cr} = 0{,}909 \cdot a_0 \tag{5.25}$$

Ca urmare relația (5.23) exprimată în funcție de mărimile frînate (sau cele inițiale în cazul cînd $w_1 \to 0$) capătă forma (5.26) sau (5.27) dacă se ține seama că $a_0 = \sqrt{kRT_0} = \sqrt{k\,p_0/\rho_0}$:

$$\dot{m} = \rho_0 a_0 A_{cr} \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right] \tag{5.26}$$

$$\dot{m} = \frac{p_0 \cdot A_{cr}}{\sqrt{T_0}} \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \cdot \left[\frac{k}{R}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]. \tag{5.27}$$

Particularizată pentru un aer (gaz perfect) cu $k = 1{,}4$, relația (5.27) capătă forma simplă (5.28), în care p_0 și T_0 sînt valorile gazului în secțiunea inițială :

$$\dot{m} = 0{,}391 \frac{p_0 A_{cr}}{\sqrt{T_0}} \approx 0{,}4 \frac{p_0 \cdot A_{cr}}{\sqrt{T_0}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]. \tag{5.28}$$

Cu ajutorul relațiilor (5.22) și (5.28) se determină secțiunile unui ajutaj supersonic ce trebuie să destindă un gaz perfect de debit $\dot{m}$, de la presiunea p_0 și temperatura T_0 pentru a se obține la ieșire o viteză corespunzătoare unui M_{cr} ales.

5.3. AJUTAJ GEOMETRIC AXIAL SUBSONIC, PENTRU GAZUL PERFECT

În cazul cînd viteza de curgere la ieșirea din ajutaj trebuie să fie subsonică, sau maximum sonică, ($M \leqslant 1$), este necesar un ajutaj geometric cu secțiune numai convergentă. Deci secțiunea lui va corespunde numai primei părți dintr-un ajutaj supersonic și anume aceleia ce destinde gazul pînă la o presiune sau temperatură mai mare sau cel mult egală cu valoarea critică a mărimilor frînate inițiale p_0, respectiv T_0.

Pentru o presiune și temperatură inițială dată p_0 și T_0 și la ieșire p_2 și T_2, criteriul M_{cr_2} la ieșire, pentru o destindere adiabat-izentropă, va fi dat de relația (5.29) :

$$M_{cr_2} = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right] \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \tag{5.29}$$

Viteza de ieșire a gazului din ajutaj va fi $w_2 = M_{cr_2} \cdot a_{cr}$, iar a_{cr} va fi

$$a_{cr} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{k+1}\, R \cdot T_0} \quad [\text{m/s}] \tag{5.30}$$

Debitul masic de gaz perfect ce trece printr-o secțiune oarecare A sau secțiunea A_2 (de ieșire) a unui ajutaj necesar pentru ca viteza să fie w_2 va fi dat de ecuația continuității :

$$\dot{m} = \rho_2 w_2 A_2 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]. \tag{5.31}$$

Deoarece există relațiile între ρ_2 și a_{cr} și valorile inițiale ρ_0 și a_0 :

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \mathrm{M}_{cr_2}^2\right]^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{a_{cr}}{a_0} = \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

relația (5.31) devine (5.32)

$$\dot{m} = \rho_0 \cdot a_0 \cdot A_2 \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \mathrm{M}_{cr_2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot M_{cr_2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]. \tag{5.32}$$

Înlocuind pe M_{cr_2} în funcție de parametrii inițiali și finali ai gazului dat de relația (5.33), se obține relația (5.34) care permite determinarea debitului $\dot{m}$ pentru o secțiune A_2 sau invers :

$$\mathrm{M}_{cr_2} = \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \left[\frac{k+1}{k-1}\right] [\text{m/s}] \tag{5.33}$$

$$\dot{m} = \frac{p_0 \cdot A_2}{\sqrt{T_0}} \mathrm{M}_{cr_2} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \mathrm{M}_{cr_2}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left[\frac{2\,k}{(k+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right] \tag{5.34}$$

Pentru un gaz perfect cu $k = 1{,}4$ (5.34) capătă forma (5.35) :

$$\dot{m} = 0{,}625 \frac{p_0 A_2}{\sqrt{T_0}} \mathrm{M}_{cr_2} (1 - 0{,}167 \cdot \mathrm{M}_{cr_2}^2)^{2,5} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]. \tag{5.35}$$

5.4. AJUTAJ GEOMETRIC SUPERSONIC CURB, PENTRU GAZUL PERFECT

Un ajutaj axial presupune axialitatea secțiunii inițiale și a celei finale, așa cum se vede în figura 5.4. Prin ajutaj curb (sau convex) se înțelege acela la care axa secțiunilor inițială și finală nu corespund.

În cazul cînd pereții ajutajului au aceeași direcție cu aceea de curgere a gazului, iar gazul în mișcare umple complet și liber întreaga secțiune a canalului (respectă în orice secțiune ecuația de continuitate), pentru un gaz perfect și un proces reversibil forțele de frecare vîscoasă sau mecanică sînt nule și, ca urmare, peretele nu are nici o influență asupra curgerii, el reprezentînd granița virtuală a curentului de gaz.

Dacă într-un punct oarecare A al peretelui, presupus paralel cu vectorul vitezei medii de curgere supersonică, aşa cum se vede în figura 5.5,

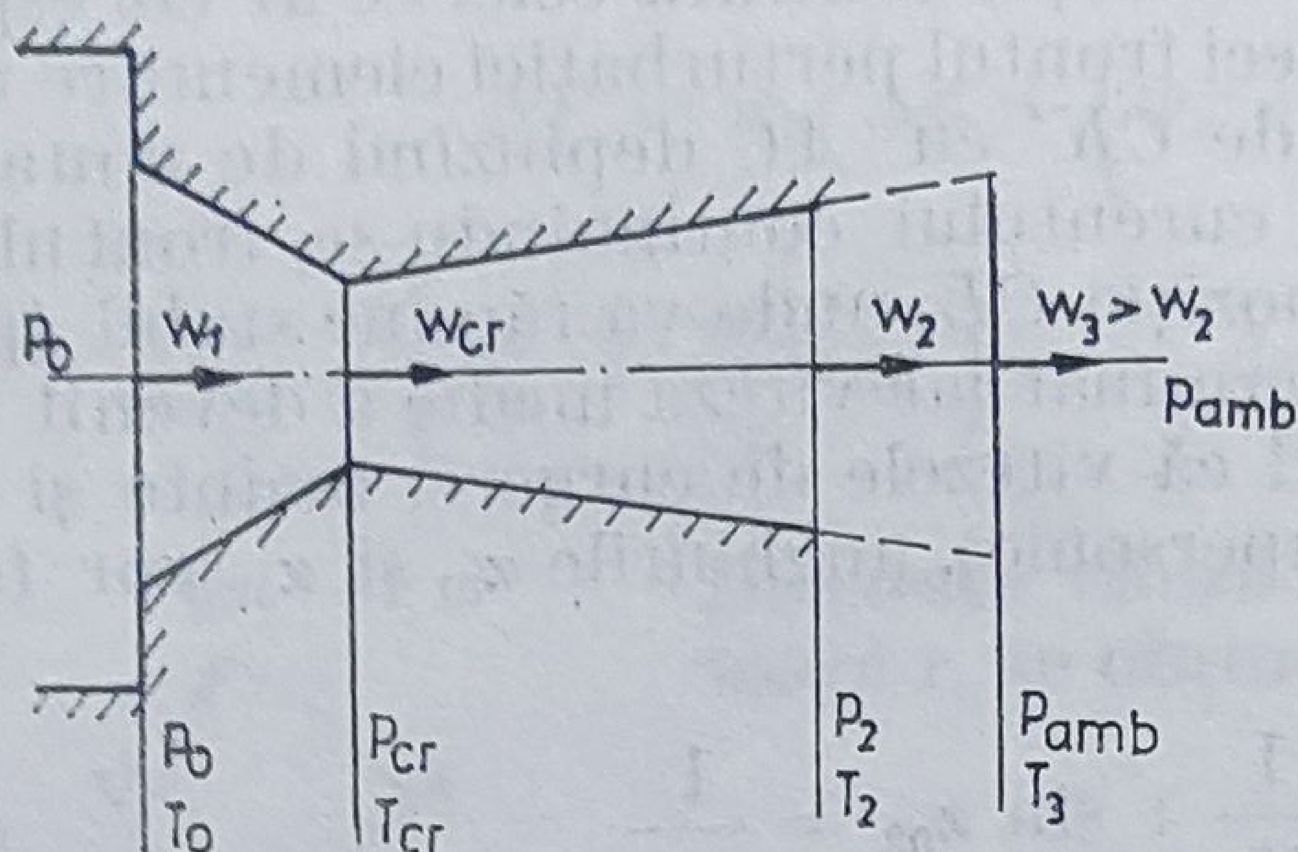


Fig. 5.5 . Sursă de perturbaţie sla bă, într-un curent de g az supersonic.

Fig. 5.4. Ajutaj supersonic axial.

există o sursă de perturbaţie slabă, apare în curentul supersonic o undă de şoc, care va face cu peretele unghiul α_0 a cărei valoare este dată de relaţia

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M}$$

în care α_0 este unghiul de propagare a perturbaţiilor slabe. Secţiunea ajutajului supersonic, trecînd de la una convergentă la una divergentă, peretele va face în secţiunea critică un unghi mai mare de 180° (vezi figura 5.4).

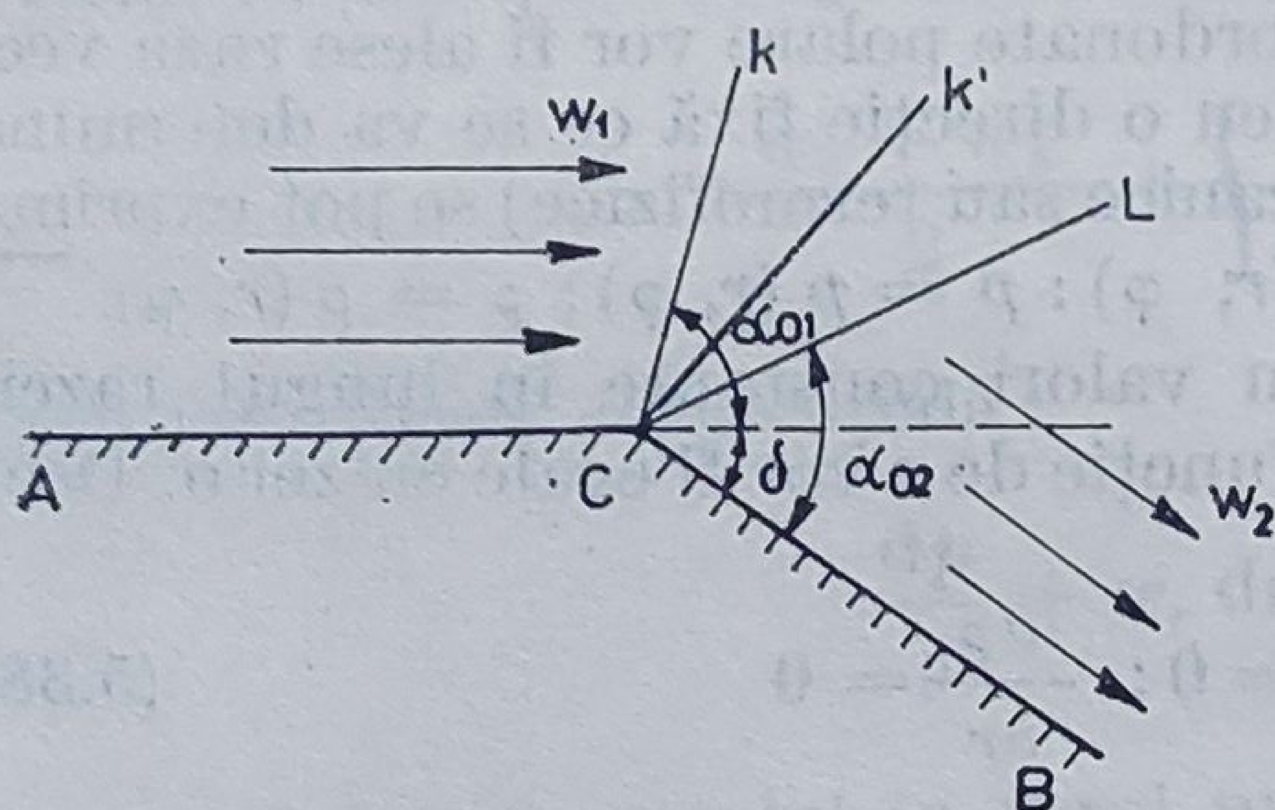


Fig. 5.6. Peretele ajutajului supersonic, la trecerea de la secţiunea convergentă la aceea divergentă.

În figura 5.6 se reprezintă peretele ajutajului înainte şi după secţiunea critică. Cele două direcţii ale peretelui fac între ele unghiul δ. În jurul unghiului făcut de cele două suprafeţe AC şi CB, gazul se destinde şi deci viteza lui creşte. Punctul C prezintă pentru gazul în curgere cu viteză $w_1 = a$ o sursă de perturbaţie slabă, dînd naştere unei unde de şoc al cărui front CK se roteşte devenind CL pentru viteza $w_2 > a$.

Ca urmare a sursei de perturbaţie, materializată prin muchia C, în curentul de viteză w_1 frontul perturbaţiei este CK, iar în curentul de viteză w_2 este CL. Deci perturbaţia apare în CK şi se termină în CL, între CK şi CL avînd loc schimbarea de direcţie a curgerii. În zona dintre cele două fronturi de perturbaţie KCL, va avea loc saltul de presiune, de viteză, densitate etc. Împărţind saltul total de presiune într-o serie infinită mică de salturi elementare, se acceptă că primul salt mic de presiune şi viteză are loc chiar în CK. Deoarece gazul se destinde în continuare, va apărea în continuare un salt de scădere a presiunii şi de creştere a vitezei.

Conform teoriei undei de şoc, componenta tangenţială a vitezei rămîne constantă şi creşte numai valoarea componentei normale. Ca urmare curentul este deviat în direcţia contrară celei ce ar corespunde unui salt de creştere a presiunii. Deci frontul perturbaţiei elementare următoare devine CK', unghiul făcut de CK' cu AC depinzînd de noua cifră Mach a curentului. Accelerarea curentului continuîndu-se, frontul CK' se va roti în continuare ocupînd poziţia CL, unde va rămîne stabil (presupunînd că rotirea curentului s-a terminat iar viteza medie a devenit paralelă cu direcţia CB). Presupunînd că vitezele de curgere, înainte şi după rotire, sînt w_1 şi $w_2 > w_1$ (ajutaj supersonic), unghiurile α_{01} şi α_{02} vor fi date de relaţiie

$$\sin \alpha_{01} = \frac{1}{M_1} \; ; \; \sin \alpha_{02} = \frac{1}{M_2} \tag{5.37}$$

Rotirea curentului de gaz supersonic în jurul unghiului deschis este deci însoţită de unde şoc, născut de perturbaţii slabe, a căror sursă este vîrful unghiului. Ele se propagă în curent după linii de Mach constant (caracteristica Mach) ce se întîlnesc în vîrful unghiului.

Viteza, presiunea şi densitatea rămîn constante în lungul fronturilor undelor de şoc ce pornesc din vîrful unghiului δ.

În coordonate polare axele vor fi raza şi cercurile concentrice cu centrul în punctul C.

Într-un plan oarecare, drept coordonate polare vor fi alese raza vectoare r şi unghiul φ făcut de aceasta cu o direcţie fixă ce se va determina prin calcul. Deci toate mărimile (mecanice sau termofizice) se pot exprima în funcţie de r şi φ şi anume : $w = w(r, \varphi) : p = p(r, \varphi)$; $\rho = \rho(r, \varphi)$.

Deoarece parametrii gazului au valori constante în lungul razei, derivatele parţiale ale lui w, p şi ρ, în funcţie de r vor fi egale cu zero. Deci

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \; ; \; \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \; ; \; \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \tag{5.38}$$

Notînd cu w_r şi w_u componentele vitezei w după direcţia razei vectoare şi perpendicular pe ea, valoarea ei va fi

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_u^2} \tag{5.39}$$

şi de asemenea : $$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \; ; \; \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

Componenta normală a vitezei pe caracteristica Mach este egală cu viteza sunetului şi deci $w_u = a$.

Mişcarea gazului în jurul unghiului deschis, este deci o mişcare rotaţională (un vîrtej) şi ţinînd seama că pe orice contur închis ea este nulă,

expresia variației circulației Γ (a circulației în vîrtej) pe conturul $MRNK$ din figura 5.7 este nulă și dată în (5.40)

$$\Delta\Gamma = w_u r\,\Delta\varphi + \left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\Delta\varphi\right)\Delta r -$$

$$-\left(w_u + \frac{\partial w_u}{\partial r}\Delta r\right)(r + \mathrm{d}r)\,\Delta\varphi - w_r \cdot \Delta r = 0 \tag{5.40}$$

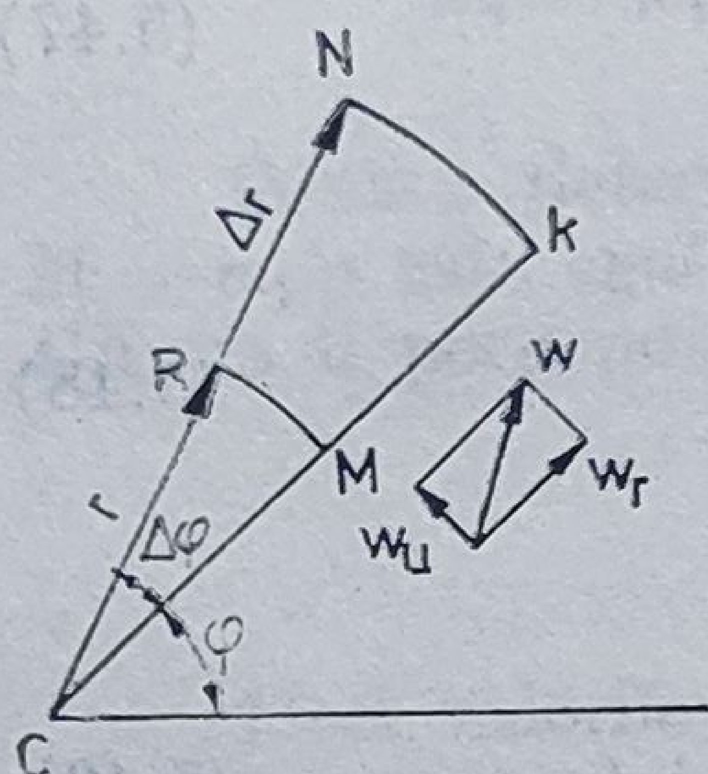


Fig. 5.7. Mișcarea gazului cu viteză supersonică în jurul unui unghi deschis.

Deoarece viteza este constantă în lungul razei vectoare r, se obține :

$$\frac{\partial w_r}{\partial\varphi} - w_u = 0 \tag{5.41}$$

Relația (5.41) exprimă fizic absența vîrtejului într-un curent supersonic ce se rotește în jurul unui unghi deschis. Ecuațiile ce descriu fenomenul sînt atunci ecuația conservării energiei și ecuația transformării termodinamice suferită de gaz.

Ecuația entalpiei (conservării energiei). În absența frecării și schimburilor energetice cu exteriorul, ecuația entalpiei este

$$\frac{w_r^2 + w_u^2}{2} + \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{w_{max}^2}{2} = \text{const.} \tag{5.42}$$

sau sub formă diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + w_r\,\mathrm{d}w_r + w_u\,\mathrm{d}w_u = 0 \tag{5.43}$$

Curgerea gazului în jurul unghiului C este o destindere adiabată-izentropă, deci ecuația procesului termodinamic este

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} = P \tag{5.44}$$

Deci procesul este caracterizat în totalitate prin : ecuația vîrtejului (5.41); condiția de viteza $w = a$; ecuația entalpiei (5.42) sau (5.43); ecuația adiabatei (5.44).

Deoarece toate mărimile termofizice ale curentului au valori constante în lungul razei r, rezultă că ele nu depind decît de unghiul φ; ca urmare, se pot înlocui diferențialele parțiale în raport cu φ cu diferențiala totală. Pentru calculul analitic al procesului, trebuie obținute ecuațiile diferențiale ale lui w_u și w_r în funcție de o singură variabilă.

Relația (5.44) diferențiată devine (5.45) care înlocuită în (5.42) și integrată devine (5 47)

$$dp = P k \rho^{k-1} d\rho \tag{5.45}$$

$$P \cdot k \int \rho^{k-1} \cdot d\rho + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \frac{w_{max}^2}{2} \tag{5.46}$$

$$\frac{P k}{k-1} \rho^{k-1} + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \frac{w_{max}^2}{2} \tag{5.47}$$

Pe de altă parte

$$a^2 = \frac{k p}{\rho} = P k \rho^{k-1} = w_u^2 \tag{5.48}$$

și ca urmare (5.47) devine (5.49) sau (5.50);

$$\frac{w_u^2}{k-1} + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \frac{w_{max}^2}{2} \tag{5.49}$$

$$w_u^2 + \frac{k-1}{k+1} w_r^2 = \frac{k-1}{k+1} w_{max}^2 \quad [m/s] \tag{5.50}$$

Ținînd seama de (5.41), relația (5.50) devine (5.51)

$$\left(\frac{dw_r}{d\varphi}\right)^2 + \frac{k-1}{k+1} w_r^2 = \frac{k-1}{k+1} w_{max}^2 \tag{5.51}$$

Separînd variabilele se obține

$$\frac{dw_r}{d\varphi} = \frac{k-1}{k+1} (w_{max}^2 - w_r^2) \tag{5.52}$$

$$d\varphi = \frac{dw_r}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{w_{max}^2 - w_r^2}} \tag{5.53}$$

$$d\varphi = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \frac{d\left(\frac{w_r}{w_{max}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{w_r}{w_{max}}\right)^2}} \tag{5.54}$$

Prin integrare (5.54) devine

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arcsin \frac{w_r}{w_{max}} = \varphi + C_1 \tag{5.55}$$

Din care se obține w_r :

$$w_r = w_{\max} \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\varphi + C)\right] \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.56}$$

Ca urmare, se obține w_u :

$$w_u = w_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\varphi + C_1)\right] \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.57}$$

Pentru determinarea constantei de integrare C_1, se consideră că $M = w_1/a$ este egal cu unitatea (fig. 5.6) pentru care frontul undei de șoc CK va fi perpendicular pe peretele AC, deoarece

$$\sin \alpha_{01} = \frac{1}{M_1} = 1$$

Deci valorile lui φ vor fi calculate începînd de la perpendiculara pe direcția curentului de gaz, înainte de frontul primei unde de șoc. Pentru $\varphi = 0$, se obține

$$w_r = O \text{ și } w_u = w$$

Ca urmare (5.56) devine

$$w_{\max} \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(O + C_1)\right] = 0 \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.58}$$

Din care se obține $C_1 = 0$.
Cunoscînd valoarea constantei C_1, se obțin expresiile componentelor w_r și w_u:

$$w_r = w_{\max} \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right] \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.59}$$

$$w_n = w_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right] \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.60}$$

Deoarece
$$w_{\max} = a_{cr}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \ [\mathrm{m/s}]$$

expresiile (5.59) și (5.60) capătă formele (5.61) și (5.62) în funcție de a_{cr} :

$$w_r = a_{cr}\,\frac{k+1}{k-1}\,\sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right] \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.61}$$

$$w_u = a_{cr} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right] \ [\mathrm{m/s}] \tag{5.62}$$

Pentru $\varphi = 0$ se obține $w_r = 0$ și $w_u = w = a_{cr}$. Viteza totală este

$$w^2 = w_r^2 + w_u^2$$

$$w^2 = a_{cr}^2 \left[\frac{k+1}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varphi \right) + \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varphi \right) \right]$$

$$w^2 + a_{cr}^2 \left[1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varphi \right) \right) \qquad (5.63)$$

iar :

$$M_{cr}^2 = \frac{w^2}{a_{cr}^2} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varphi \right] \qquad (5.64)$$

Cunoscînd M_{cr} se pot obține valorile presiunii, densității și temperaturii momentane a gazului într-o secțiune oarecare, în funcție de mărimile frînate inițial, p_0, T_0, ρ_0, M cu relațiile (5.65)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p}{p_0} = \left[1 - \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} M_{cr}^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \right]^{\frac{1}{k-1}} \\ &\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 ; \quad M = \sqrt{\frac{\frac{2}{k+1} M_{cr}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (5.65)$$

Presiunea, temperatura și densitatea momentană devin egale cu zero atunci cînd valoarea criteriului M_{cr} devine maximă și este dată de relația

$$M_{cr_{max}}^2 = \frac{k+1}{k-1}$$

Această valoare maximă a lui M_{cr} se obține atunci cînd are loc o rotire maximă a curentului de gaz, deci atunci cînd valoarea unghiului φ devine φ_{max}. Expresia lui φ_{max} se obține din (5.64) și este dată de relația (5.66) în care s-a înlocuit M_{cr} cu $M_{cr_{max}}$:

$$\frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varphi_{max} \right]$$

$$(5.66)$$

$$\varphi_{max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

Dacă viteza inițială a curentului de gaz $w_1 > a_{cr}$, calculul se începe nu de la $\varphi = 0$ (perpendiculara pe AC) ci de la un unghi φ_1 dat de relația (5.67):

$$M_{cr_1}^2 = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi_1 \right] \tag{5.67}$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{k-1}{2} (M_{cr_1}^2 - 1)}$$

Deci pentru $M_{cr} > 1$, unghiul φ_0 va fi dat de relația

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \alpha_{01}, \tag{5.68}$$

în care φ_1 este dat de relația (5.67) ținînd seama de notațiile din figura 5.8, iar α_{01} de relația:

$$\alpha_{01} = \text{arc sin} \frac{1}{M_1} \tag{5.69}$$

Pentru descrierea exactă a fenomenului de rotire a curentului în jurul unui unghi deschis este necesară cunoașterea traiectoriei unei linii de curent. Se prezintă în figura 5.9 traiectoria unei linii de curent ce se

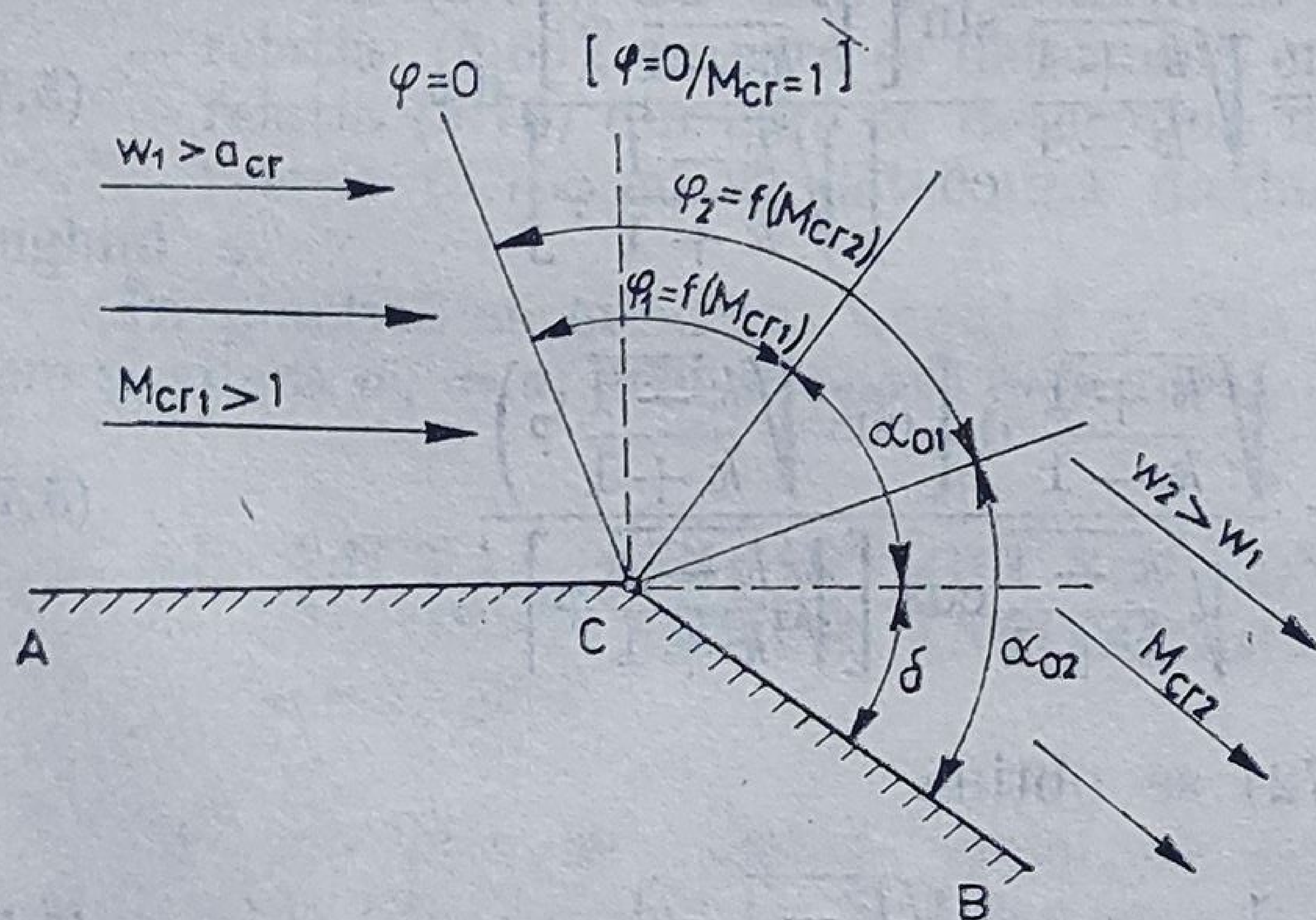


Fig. 5.8. Deviația curentului supersonic în jurul unui unghi deschis.

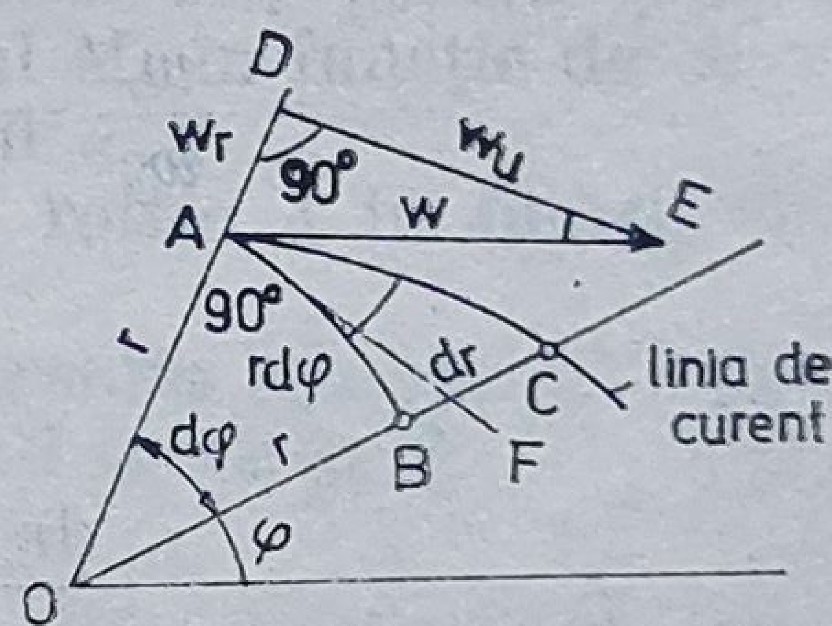


Fig. 5.9. Rotirea unei linii de curent supersonic în jurul unui unghi deschis.

rotește în jurul punctului O, mărimile caracteristice fiind exprimate în coordonate polare. Direcția tangentei într-un punct oarecare la o linie de curent, coincide cu direcția vectorului vitezei în acel punct. Se iau două raze vectoare foarte apropiate, ce formează între ele unghiul $d\varphi$ și se duce în punctul A linia de curent $A-C$, vectorul vitezei $w = AE$ precum și arcul de cerc AB cu raza r. Din triunghiul dreptunghic curbiliniu infinit mic ABC se obține

$$\frac{BC}{AB} = \frac{dr}{r\, d\varphi}$$

Unghiul dintre curbele AB şi AC este egal cu unghiul dintre tangentele AF şi AE, deci

$$\operatorname{tg}\ (\sphericalangle EAF) = \frac{dr}{r\,d\varphi}$$

Vectorul vitezei w se descompune după direcţiile r şi u în w_r şi w_u. Din triunghiul ADE se obţine

$$\operatorname{tg}\ (\sphericalangle \mathrm{ADE}) = \frac{w_r}{w_u}$$

Se observă că prin construcţie $\sphericalangle EAF = \sphericalangle ADE$

Ca urmare
$$\frac{dr}{r \cdot d\varphi} = \frac{w_r}{w_u} \tag{5.70}$$

Relaţia (5.70) reprezintă ecuaţia diferenţială — sub forma generalizată — a liniei de curent, în coordonate polare. Din relaţiile (5.61) şi (5.62) se obţin relaţiile

$$\frac{w_r}{w_u} = \frac{dr}{r} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\, \frac{\sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right]}{\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right]}\, d\varphi \tag{5.71}$$

$$\frac{dr}{r} = - \frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\, d\left[\cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right]} \tag{5.72}$$

Prin integrarea relaţiei (5.72) se obţine

$$\ln r = -\frac{k+1}{k-1}\ \ln\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right] + \ln r_0 \tag{5.73}$$

Prin delogaritmare ea devine

$$r = r_0\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)\right]^{-\frac{k+1}{k-1}} \tag{5.74}$$

în care r_0 este lungimea razei vectoare a liniei de curent pentru $\varphi = 0$. Relaţia (5.74) pune în evidenţă faptul că liniile de curent sînt curbe şi concentrice cu centrul în O. În figura 5.10 se prezintă cazul unei curgeri sonice (cu $M_{cr_1} = 1$). Pentru exemplificarea metodei expuse mai sus se caută determinarea unghiului δ dintre tangenta la linia de curent amonte,

cu tangenta la linia de curent aval, care în realitate este unghiul de rotire. Cu w s-a notat vectorul vitezei liniei de curent în punctul B, iar cu α-unghiul de propagare a unei perturbații slabe. Din figura 5.10 se obține $\sphericalangle ABD = \delta$; $\sphericalangle ABC = \alpha_0$.

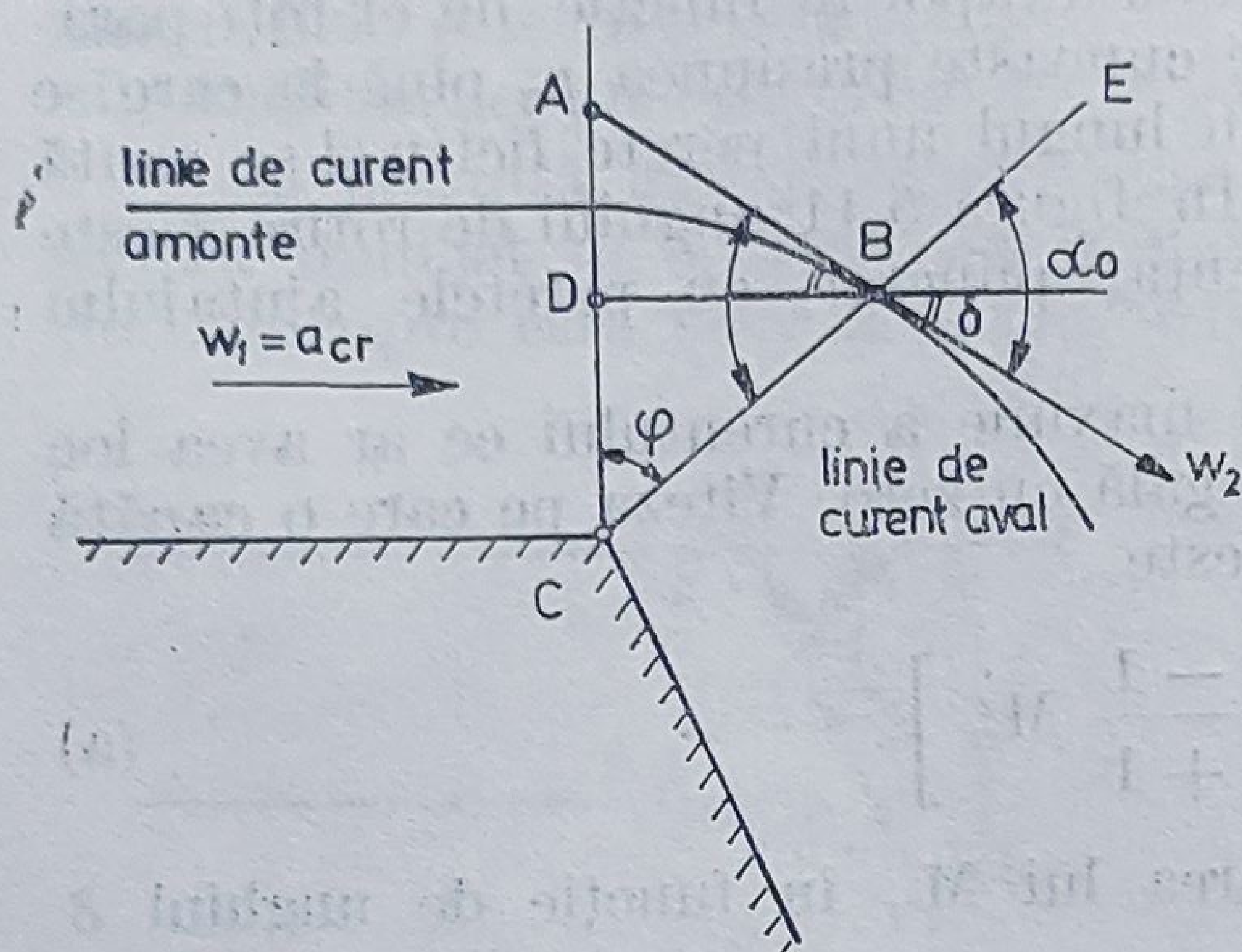


Fig. 5.10. Traseul liniilor de curent la curgerea supersonică.

Din triunghiurile ABC și ABD se obține

$$\sphericalangle A = \pi - \varphi - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \delta$$

deci:
$$\delta = \alpha_0 + \varphi - \frac{\pi}{2} \qquad (5.75)$$

Dar se știe din (5.69) că

$$\alpha_0 = \text{arc} \sin \frac{1}{M} \qquad (5.76)$$

Pentru determinarea unghiului de rotire δ a curentului de gaz corespunzător valorii date a unghiului φ făcut de perpendicularele pe perete în punctul C se face apel la următoarele relații:

— relația (5.64), cu care se determină criteriul M_{cr} pentru φ dat;
— relația (5.65), cu care se determină criteriul M_2 în funcție de M_{cr};
— relația (5.76) din care se determină unghiul α_0;
— relația (5.75) cu se determină unghiul de rotire δ în funcție de unghiul φ.

În practică se cunoaște unghiul φ (din construcția ajutajului), precum și viteza $w_1 = a$, deci se poate determina unghiul de rotire δ.

5.5. AJUTAJ GEOMETRIC SUBSONIC SAU SUPERSONIC CU DESTINDERE INCOMPLETĂ PENTRU GAZUL PERFECT

Se consideră un ajutaj sonic ce destinde un gaz perfect pînă la o presiune mai ridicată decît aceea ce exista în spațiul în care el debușează. În figura 5.11 se prezintă situația unui ajutaj în care gazul la ieșire are viteza $w_1 = a_{cr}$ și presiunea p_1, iar spațiul în care el iese are o presiune $p_2 < p_1$. Ca urmare, punctul C al peretelui ajutajului (muchia peretelui) devine o sursă de perturbație slabă și, cum spațiul la ieșire este deschis, se poate considera că procesul are loc ca cel descris în paragraful 5.3, și anume gazul se va destinde liber în mediul ambiant de la presiunea p_1

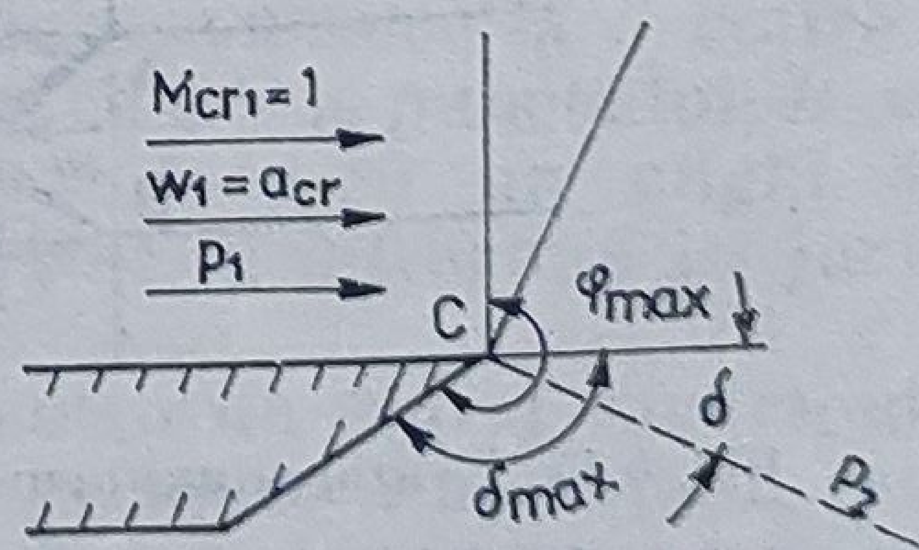


Fig. 5.11. Rotirea curentului de gaz la ieșirea dintr-un ajutaj sonic.

pînă la presiunea p_2, mărindu-şi viteza corespunzător diferenţei p_1-p_2. Deosebirea faţă de cazul prezentat în paragraful 5.3 constă numai în faptul că în acel caz se cunoştea unghiul de rotire a curentului δ, egal cu cel făcut de pereţii ajutajului şi se determinau apoi în funcţie de el toţi parametrii gazului, iar în cazul de faţă se cunoaşte presiunea p_2 pînă la care se destinde gazul (de la presiunea p_1) în lungul unui perete fictiv şi se caută să se determine unghiul de rotire δ. În figura 5.11 unghiul de rotire δ este cel făcut de peretele fictiv, reprezentat punctat, cu peretele ajutajului geometric.

Unghiul δ_{max} corespunde rotirii maxime a curentului ce ar avea loc în cazul cînd presiunea p_2 ar deveni egală cu zero. Viteza pe care o capătă gazul prin destindere de la p_1 la p_2 este

$$\frac{p_2}{p_0}=\left[1-\frac{k-1}{k+1}\,M_{cr}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{a}$$

Expresia (5.64) exprimă valoarea lui M_{cr} în funcţie de unghiul δ şi are forma (b)

$$M_{cr}^2=1+\frac{2}{k-1}\sin^2\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\delta\right]. \tag{b}$$

Introducînd expresia (b) a lui M_{cr} în (a), şi cunoscînd valorile p_1, p_2 şi k se determină unghiul δ.

În turbinele cu gaze, presiunea ce domneşte în spaţiul în care ies gazele nu este întotdeauna egală cu aceea ce domneşte în secţiunea de ieşire a lui. Considerînd că presiunea în spaţiul liber este mai mică decît aceea din secţiunea de ieşire a ajutajului, gazul se va destinde liber şi accelerarea lui va avea loc pînă cînd presiunile se vor egaliza. În acest caz, notînd viteza de ieşire a gazului din ajutaj cu w_1 şi considerînd secţiunea lui ca fiind plană, aşa cum se prezintă în figura 5.12, situaţia este identică cu a unei curgeri supersonice peste o suprafaţă ce ar face un unghi deschis. Ca urmare gazul se va roti liber (evaza) cu un unghi δ, dat de relaţia cunoscută:

$$\delta=\arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right)$$

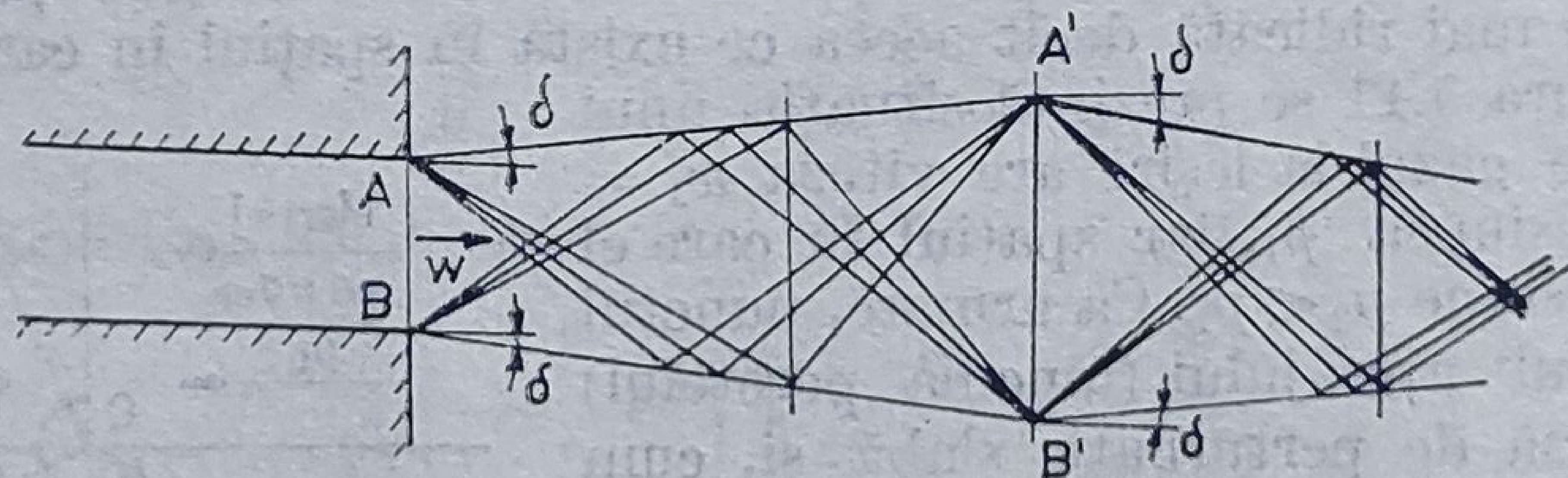


Fig. 5.12. Evazarea unui curent de gaz la destinderea liberă în mediul ambiant.

în care M_1 este criteriul Mach al curgerii gazului prin secţiunea de ieşire (reală) a ajutajului. Deci apare o evazare liberă a gazului în mediul ambiant, unghiul de evazare fiind 2δ. Ca urmare, în muchiile A şi B ale ajutajului

prezentat în figura 5.12, presiunea scade brusc și din aceste puncte pornesc „liniile caracteristice Mach", care se intersectează după un timp în punctele A' și B' ce devin noi centre de perturbație, dar de presiune mai scăzută. Va apărea deci un nou unghi de rotire δ de data aceasta însă negativ. Fenomenul fizic este însă foarte complex și nu poate fi prins corect în expresiile analitice, el putînd fi studiat numai pe cale experimentală.

Se prezintă mai jos rezultatele cercetărilor experimentale efectuate asupra unui jet de gaz destins parțial într-un ajutaj supersonic a cărui secțiune de ieșire este însă înclinată față de axa sa (figura 5.13).

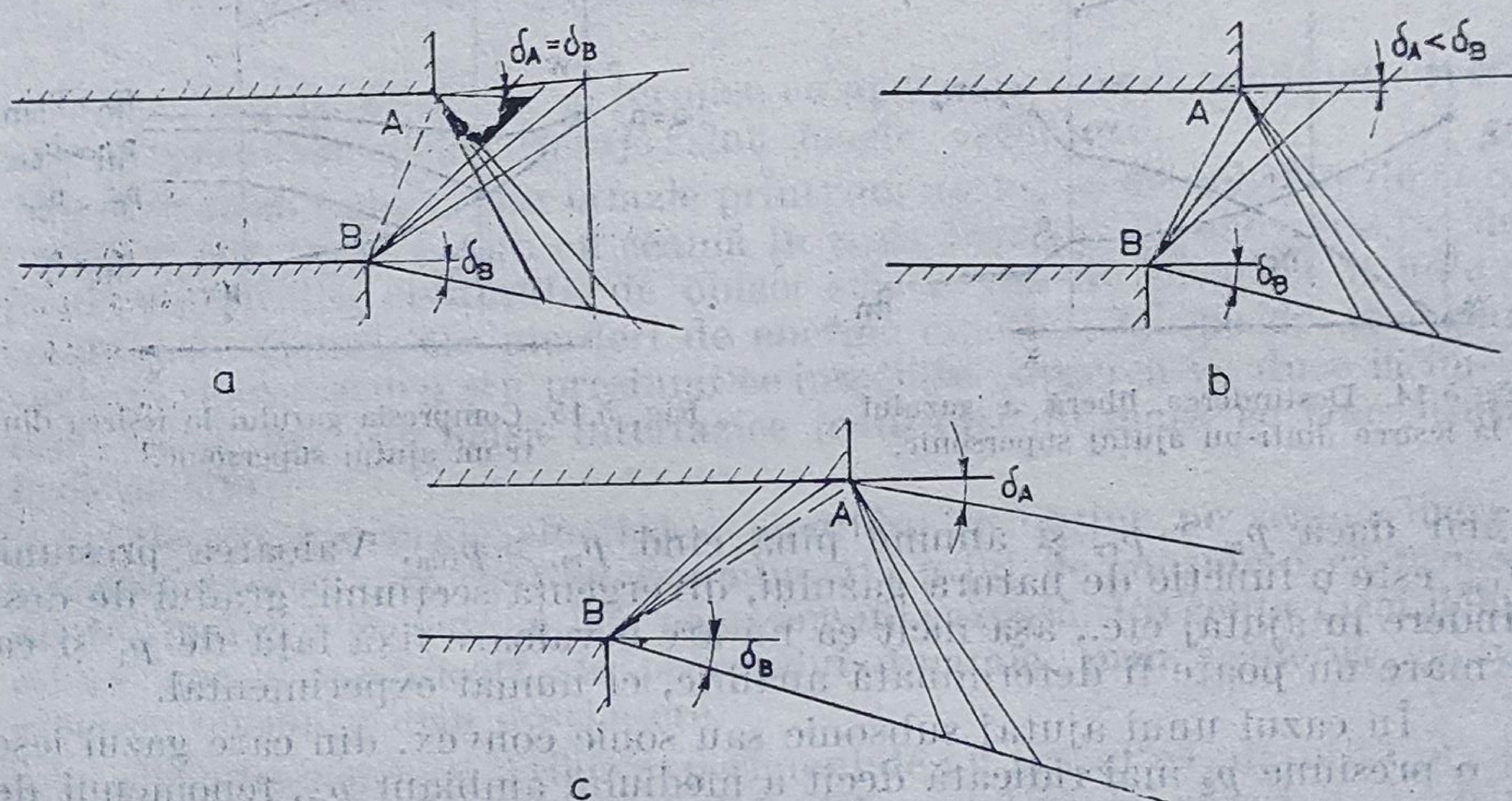


Fig. 5.13. Destinderea liberă a gazului la un ajutaj supersonic cu secțiunea de ieșire oblică.
a — fără rotire; *b* — cu rotire în sens pozitiv; *c* — cu rotire în sens negativ;

În cazul cînd secțiunea de ieșire a ajutajului este oblică față de axa sa (ajutaj convex), situația se prezintă diferit față de situația de mai sus, în funcție de poziția punctului A față de liniile caracteristice Mach ce pornesc din punctul B. În cazul cînd nici o linie caracteristică Mach ce pleacă din B nu întîlnește peretele A (figura 5.13 *a*) atunci unghiurile de rotire δ_A și δ_B sînt egale, deci nu va avea loc o rotire a secțiunii fictive formate la ieșire. Dacă prima linie caracteristică Mach întîlnește peretele A, atunci unghiul $\delta_A < \delta_B$ (v. figura 5.13 *b*), ceea ce va duce la o rotire a jetului. Dacă chiar și ultima linie caracteristică Mach a punctului B va întîlni peretele opus (fig. 5.13 *c*) atunci rotirea se face cu un unghi δ_A negativ, deci jetul liber format la ieșire se va roti în întregime în jurul punctului B.

Ceea ce rămîne însă în general valabil pentru un ajutaj supersonic este că dacă presiunea p_m exterioară secțiunii de ieșire a ajutajului este mai mică decît p_2 ce domnește în secțiunea de ieșire, destinderea are loc liber în exterior, ceea ce are ca urmare creșterea vitezei medii de curgere. Această situație este prezentată schematic în figura 5.14.

În cazul cînd presiunea p_m este mai mare decît p_2 pentru care a fost calculat ajutajul (figura 5.15), destinderea are loc în ajutajul supersonic pînă la o presiune mai mică decît p_m, creşterea ei pînă la p_m avînd loc în secţiunea divergentă a lui. Destinderea are loc pînă la presiunea critică

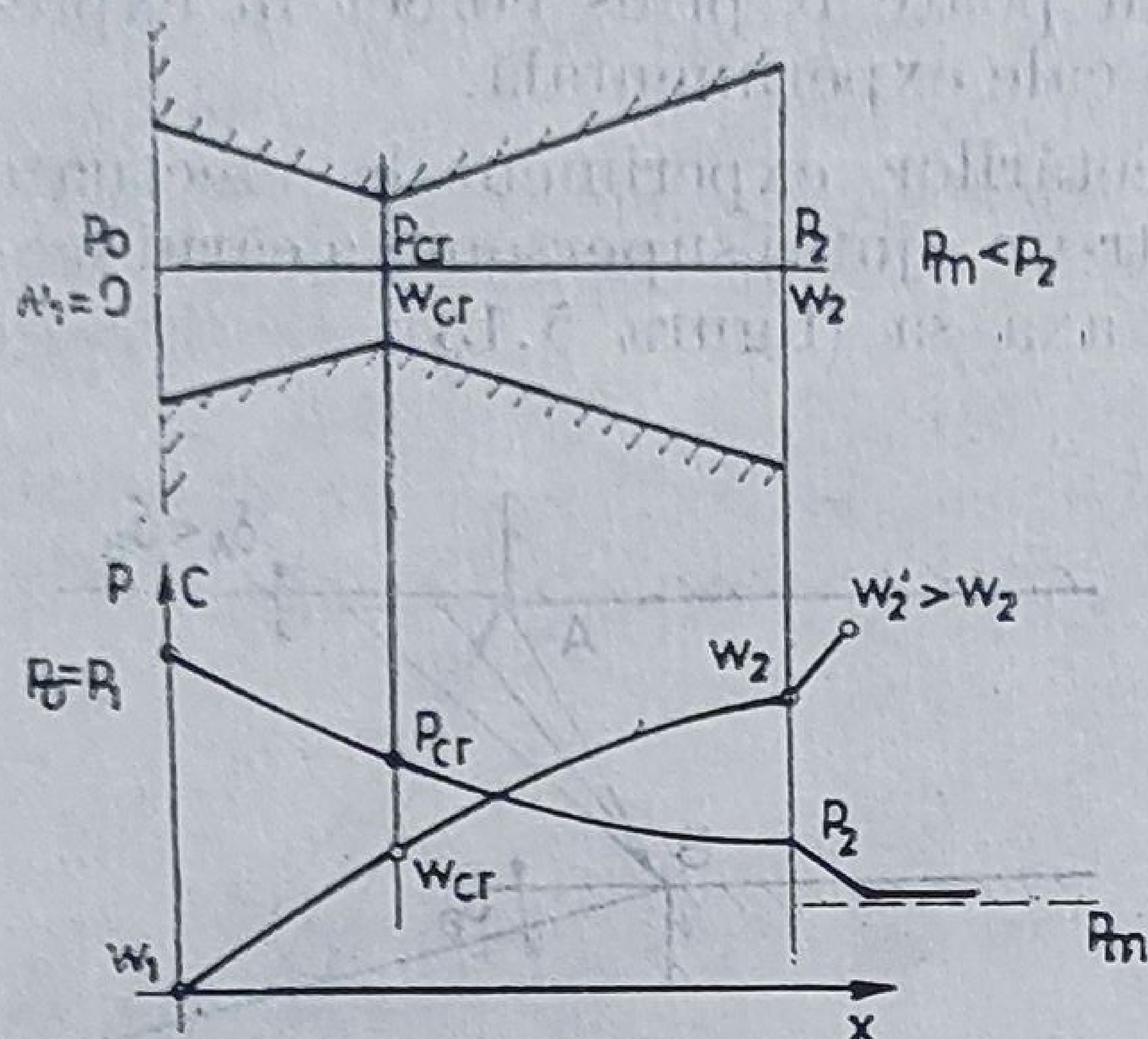


Fig 5.14. Destinderea liberă a gazului la ieşirea dintr-un ajutaj supersonic.

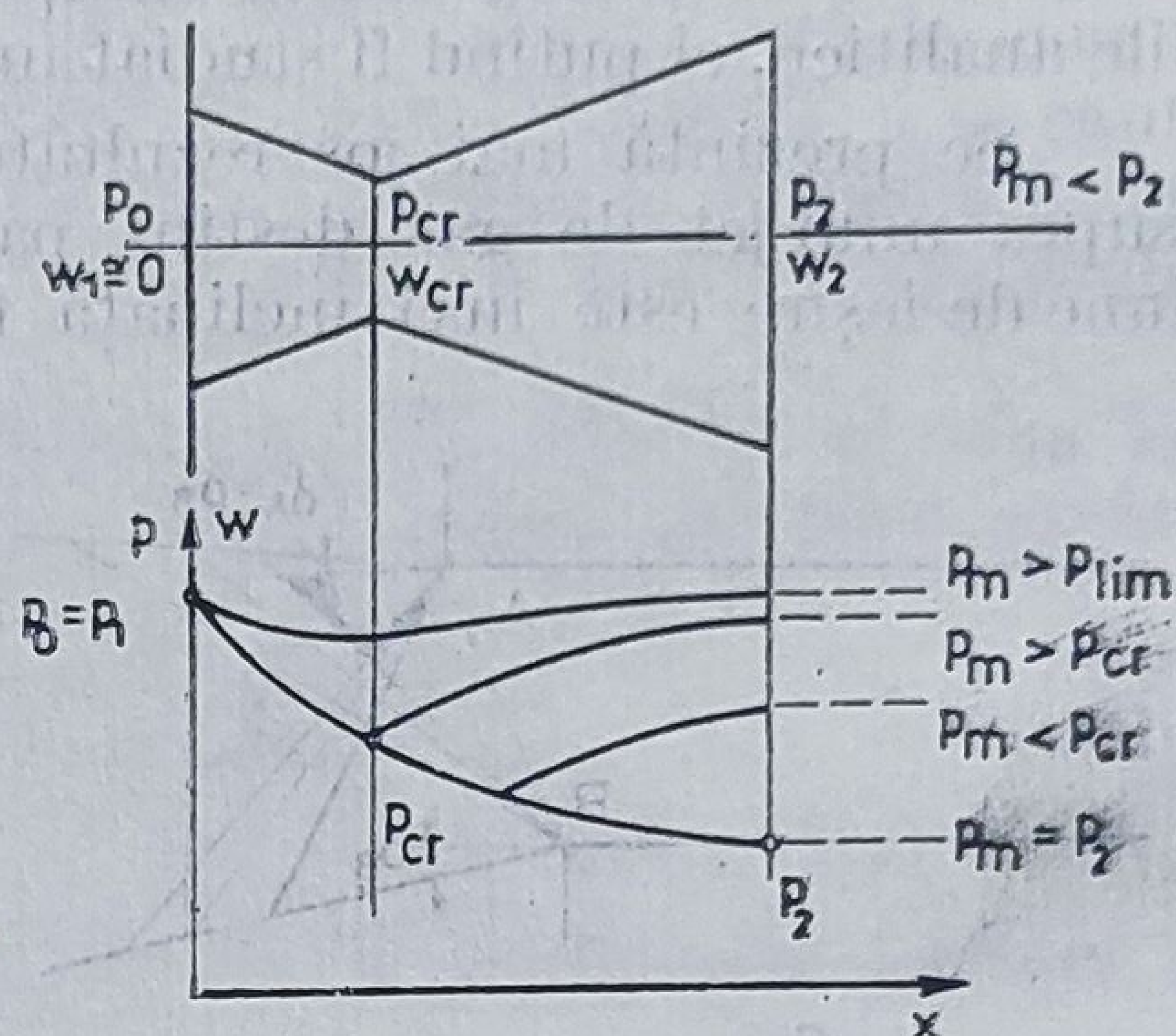


Fig. 5.15. Compresia gazului la ieşirea dintr-un ajutaj supersonic.

chiar dacă $p_m > p_{cr}$ şi anume pînă cînd $p_m > p_{\lim}$. Valoarea presiunii $p_{\lim}$ este o funcţie de natura gazului, divergenţa secţiunii, gradul de destindere în ajutaj etc., aşa încît ea nu are o valoare fixă faţă de p_1 şi ca urmare nu poate fi determinată analitic, ci numai experimental.

În cazul unui ajutaj subsonic sau sonic convex, din care gazul iese la o presiune p_2 mai ridicată decît a mediului ambiant p_m, fenomenul de destindere liberă şi deci de mărire a vitezei w_2 se petrece de asemenea liber după secţiunea de ieşire, la fel ca în cazul ajutajului supersonic. Situaţia este prezentată în figura 5.16.

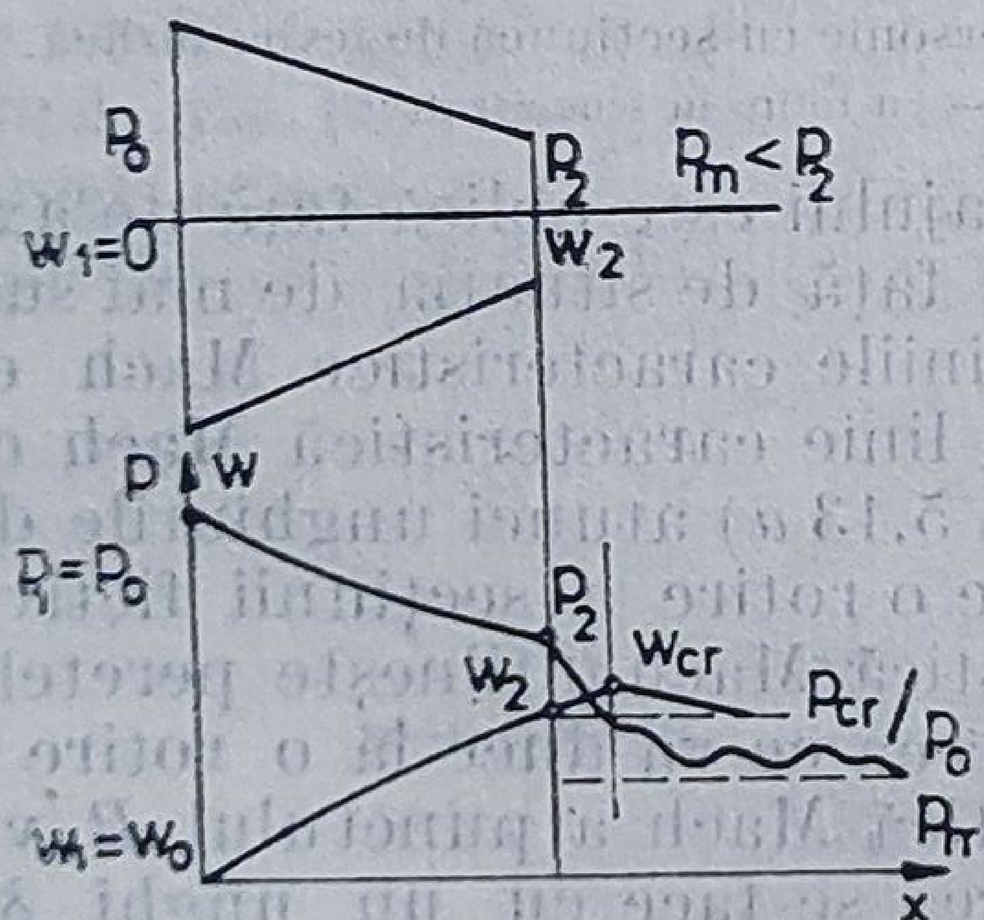


Fig. 516. Destinderea liberă a gazului la ieşirea dintr-un ajutaj subsonic.

Destinderea liberă suplimentară va fi însă însoţită de mărirea vitezei de curgere a gazului numai pînă cînd presiunea va avea o valoare egală cu a presiunii critice corespunzătoarea presiunii p_0 ce domneşte în secţiunea de intrare. Dacă

$$p_m < p_{cr}|_{p_0},$$

atunci fenomenul de destindere liberă, însoţită de creşterea vitezei de curgere a gazului, are loc pînă la valoarea $p_m = p_{cr}$, după care destinderea în continuare are loc pulsatoriu, fără ca să mai apară şi o mărire a vitezei de curgere peste valoarea sonică.

În cazul cînd $p_2 < p_m$, creșterea presiunii are loc în interiorul ajutajului. Viteza de curgere a gazului la ieșirea din ajutaj este aceea corespunzătoare unei destinderi de la presiunea p_0 la p_m. După secțiunea unde se obține viteza w_2 corespunzătoare căderii de presiune $\Delta p = p_0 - p_m$, curgerea prin ajutaj are loc potențial, putîndu-i-se aplica ecuația de continuitate și a lui Bernoulli.

5.6. AJUTAJ GEOMETRIC SUBSONIC PENTRU MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Problemele dinamice și termice ce apar la curgerea mediilor bifazice monocomponente prin ajutaje sînt foarte complexe.

Curgerea unui mediu bifazic printr-un ajutaj se deosebește de curgerea unui gaz perfect, mai cu seamă în zona transonică, deoarece pe de o parte umiditatea conținută de obicei sub formă de picături lichide va conduce la importante pierderi de energie cinetică, iar pe de altă parte variația temperaturii și a presiunii ce însoțește curgerea va duce la importante schimburi de masă interfazice (cantități de masă ce trec dintr-o fază în alta).

Deoarece energie cinetică a mediului se obține pe seama lucrului mecanic produs prin destinderea adiabată a lui, se consideră că procesul de destindere îl execută numai componenta gazoasă. Prezența fazei lichide aduce numai modificări ale procesului dinamic, prin scăderea energiei cinetice obținute prin destindere.

Rezultatele cercetărilor experimentale au arătat că, datorită prezenței substratului lichid din stratul limită ce aderă la pereți, vor apărea deosebiri în ceea ce privește dimensiunea secțiunii minime calculate și construită și cea reală prin care curge faza gazoasă a mediului bifazic în realitate.

Considerînd ca mediu compresibil numai faza de vapori și acceptînd ipoteza că ea ascultă de legile unui gaz perfect, se poate exprima debitul masic de vapori ce trece prin orice secțiune a ajutajului cu următoarea relație determinată experimental :

$$\bar{\dot{m}}_T = \frac{\dot{m}_T}{A} = \sqrt{k\left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{k-1}} \cdot q}\sqrt{\frac{p_0}{v_0}} = B_T\sqrt{\frac{p_0}{v_0}}\left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}\right] \quad (5.77)$$

în care :

$\dot{m}_T$ reprezintă debitul masic de vapori, în kg/s ;

$\bar{\dot{m}}_T$ — masa specifică de vapori, în kg/s · m^2 ;

A — secțiunea ajutajului, în m^2 ;

p_0, v_0 — presiunea frînată și volumul specific corespunzător presiunii p_0 și temperaturii frînate T_0, în N/m^2 și m^3/kg

q — mărimea adimensională a vitezei masice dată de relațiile (5.78) :

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{\rho \cdot w}{\rho_{cr} \cdot w_{cr}} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot M_{cr}\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \\ M_{cr} &= \frac{w}{a_{cr}}; \qquad B_m = q\sqrt{k\left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{k-1}}} \end{aligned}\right\} \quad (5.78)$$

B_T se denumește „coeficient teoretic de curgere".

Deoarece procesul real de curgere prin ajutaj nu este izentrop, datorită prezenței fazei lichide, debitul masic total este

$$\overline{m} = B\sqrt{\frac{p_0}{v_0}}, \quad (5.79)$$

care diferă de debitul $\overline{m}_T(\overline{m} < \overline{m}_T)$. Valoarea „coeficientul real de curgere" B este :

$$\mu^* = \frac{B}{B_T} \quad (5.80)$$

Cu μ^* s-a notat raportul dintre coeficientul real și cel teoretic de curgere, care poartă denumirea de „coeficient de debit". El ține seama de îngustarea secțiunii reale de curgere ca urmare a existenței substratului lichid din stratul limită. Ca urmare, coeficientul real de curgere B sau coeficientul de debit μ^* depind de factorii de care depinde la rîndul său grosimea stratului limită și a fost prezentat la paragraful respectiv al stratului limită. Deci se poate scrie :

$$B = f_1(\mathrm{Re}, \mathrm{M}, k, \overline{\mathrm{grad}\ p}) \quad (5.81)$$

$$\mu^* = f_2(\mathrm{Re}, \mathrm{M}, \overline{\mathrm{grad}\ p}) \quad (5.82)$$

în care Re este criteriul Reynolds pentru secțiunea de ieșire a ajutajului ; M — criteriul Mach pentru aceeași secțiune ; $\overline{\mathrm{grad}\ p}$ = gradientul presiunii adimensionale p_m/p_0 ; p_m — presiunea în spațiul în care iese gazul din ajutaj ; p_0 = presiunea frînată inițială.

Curgerea mediului bifazic saturat (compus din vapori și picături de lichid) printr-un ajutaj subsonic prezintă următoarele particularități observate experimental :

— În secțiunea critică, vaporii saturați se găsesc totuși în stare de ușoară supraîncălzire ;

— Starea amestecului bifazic într-o secțiune oarecare nu se poate exprima în funcție numai de starea inițială și de un exponent adiabat k constant, ca în cazul gazelor perfecte, deoarece k are valori variabile în timpul destinderii.

— Vitezele de curgere a celor două faze nu au valori egale în toate secțiunile ajutajului, iar accelerarea picăturilor de lichid are loc prin con-

sum de energie cinetică a fazei gazoase. Pe de altă parte, creșterea vitezei în lungul axei ajutajului nu mai urmează o lege fixă, ca de exemplu aceea a unei funcții de cădere de presiune, deoarece picăturile de lichid reprezintă o frînă în procesul de accelerare a curgerii.

— Repartizarea picăturilor de lichid în amestecul bifazic se modifică în timpul curgerii prin ajutaj, datorită cantității de lichid ce se formează din faza de vapori ca urmare a scăderii presiunii, iar pe de altă parte ca urmare a atragerii din masa de vapori a unui număr de picături spre substratul lichid din stratul limită (vezi stratul limită a unui mediu bifazic).

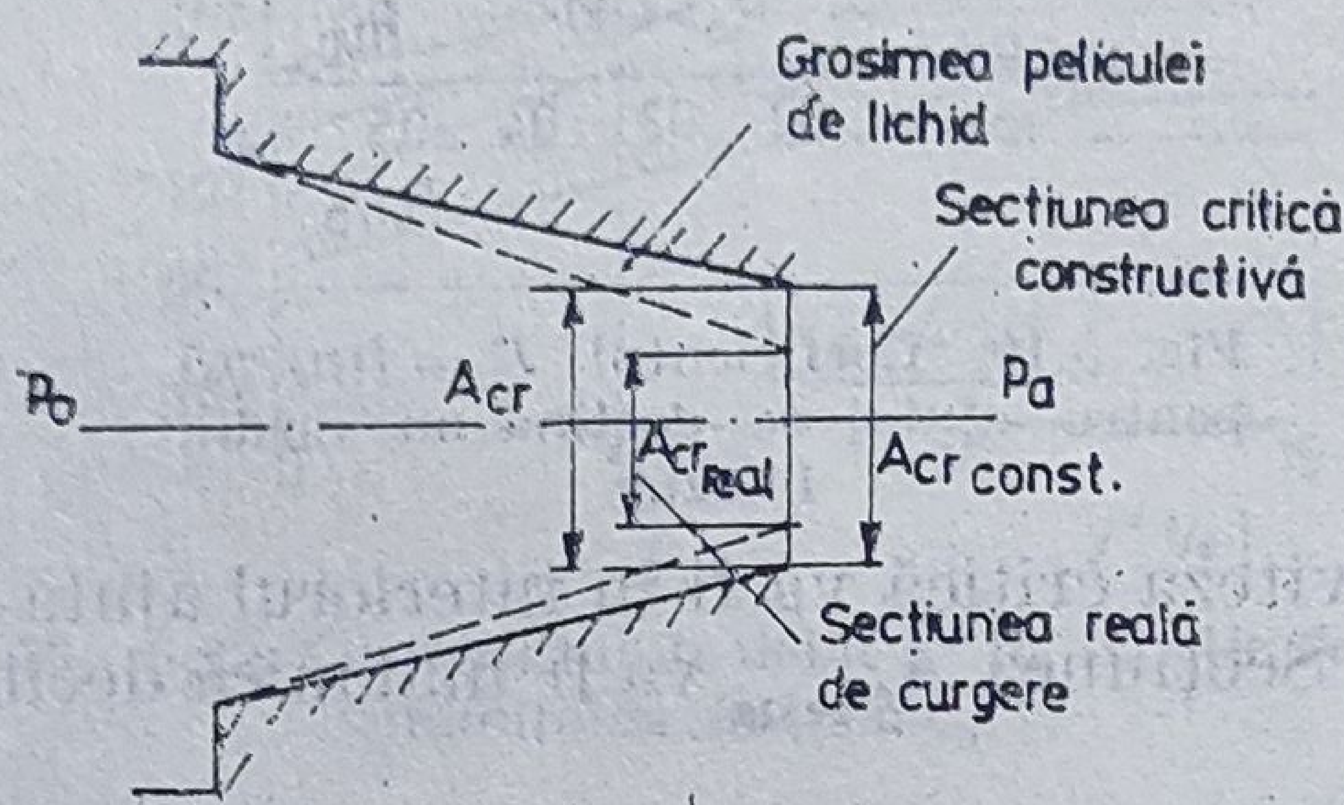


Fig. 5.17. Secțiunile reale ale unui ajutaj subsonic ce destinde un amestec bifazic.

— Calculul exact al coeficientului teoretic de curgere B_T nu poate fi făcut cu relația (5.78), chiar dacă s-ar admite constanța exponentului adiabat k, deoarece în timpul curgerii amestecul bifazic se găsește la o stare din interiorul curbelor limită, deci o stare metastabilă, iar relația (5.78) este determinată pentru o stare de echilibru stabil.

În figura 5.17 se prezintă schematic secțiunea reală de curgere oferită de un ajutaj sonic unui mediu bifazic. După cum se vede, secțiunea de curgere reală $A_{cr\,real}$ este mai mică decît aceea constructivă a ajutajului, $A_{cr\,const.}$ ca urmare a peliculei de lichid ce se formează la perete în stratul limită. În consecință coeficientul real de curgere B va depinde de un număr de factori mai mare decît cel prezentat în relația (5.81) și anume:

$$B = f_3(\mathrm{Re}, \mathrm{M}, k, \overline{\mathrm{grad}\ p}, y_0, \Delta T, \nu^*, A_{cr_{real}}) \qquad (5.83)$$

Ca urmare a îngustării secțiunii reale de curgere a ajutajului datorită peliculei de lichid din stratul limită, coeficientul B va depinde și el de aceiași factori de care depinde la rîndul său grosimea acestei pelicule și anume: umiditatea inițială a amestecului bifazic $y_0 = 1 - x_0$, în care x_0 este participația gravimetrică a vaporilor în amestec (kg.vap/kg); gradul de subrăcire a vaporilor ce apare în secțiunea de ieșire, ca urmare a destinderii, însemnată cu ΔT; coeficientul de viteză $\nu^* = w_{lic}/w_{vap}$ în secțiunea critică; $A_{cr_{real}}$ = secțiunea critică reală la ieșire.

Ca urmare determinarea coeficientului B nu se poate face decît experimental. În figura 5.18 se prezintă reultatele experimentale obținute pentru determinarea coeficientului B în funcție de criteriul Reynolds, în secțiunea de ieșire a ajutajului, pentru vaporii de apă și de căderea de presiune p_a/p_0 (p_a = presiunea pînă la care se destinde aburul umed în ajutaj).

În figura 5.19 se prezintă variaţia coeficientului de debit B în funcţie de p_a/p_0 pentru regimuri de curgere cu Re $> 4 \cdot 10^5$ în secţiunea de ieşire (pentru vapori de apă).

Ca urmare a îngustării secţiunii reale de curgere oferite de pereţii ajutajului, datorită existenţei peliculei de lichid aderentă la pereţi,

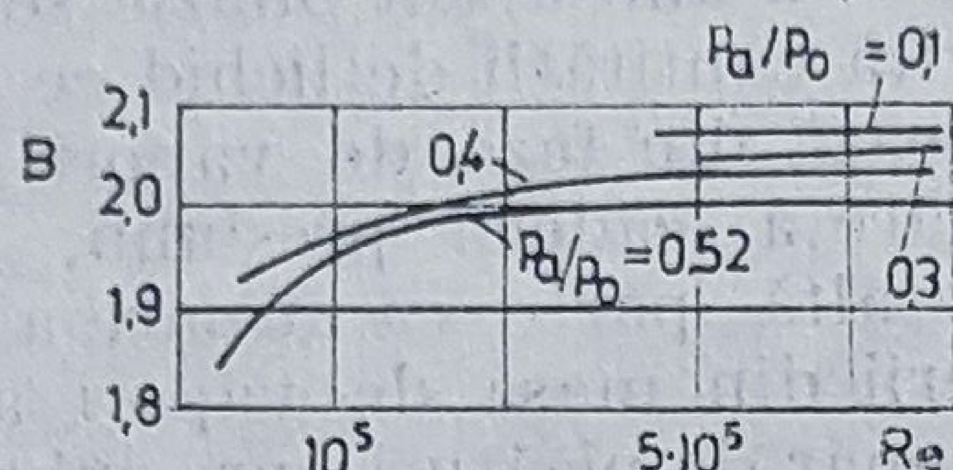


Fig. 5.18. Coeficientul $B = f(\text{Re})$ pentru ajutaje ce destind un mediu bifazic.

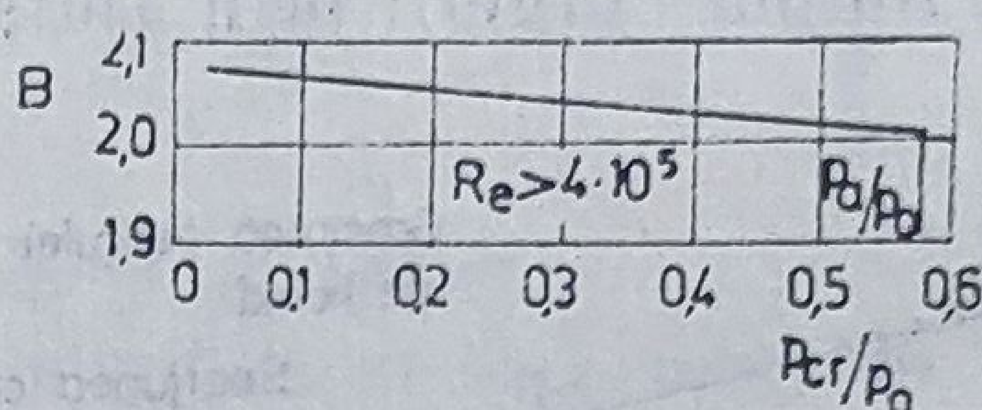


Fig. 5.19. Coeficientul $B = f(p_a/p_0)$ pentru ajutaj ce destind un mediu bifazic.

secţiunea în care se realizează efectiv viteza critică va fi în interiorul ajutajului, aşa cum se vede din figura 5.17. Secţiunea $A_{cr_{reală}}$ va fi mai mică decît deştiunea de ieşire $A_{cr_{const.}}$.

Grosimea peliculei de lichid de la perete în cazul unei destinderi $p_a/p_0 = 0,1$ determinată experimental pentru apă este de 0,32 mm. În figura 5.20 se prezintă rezultatele experimentale obţinute pentru determinarea coeficientului B în funcţie de: căderea de presiune p_a/p_0; Re (în secţiunea de ieşire); umiditatea iniţială $y_0 = 1 - x_0$ a vaporilor de apă. În figura 5.21 se prezintă, comparativ, coeficientul B pentru abur

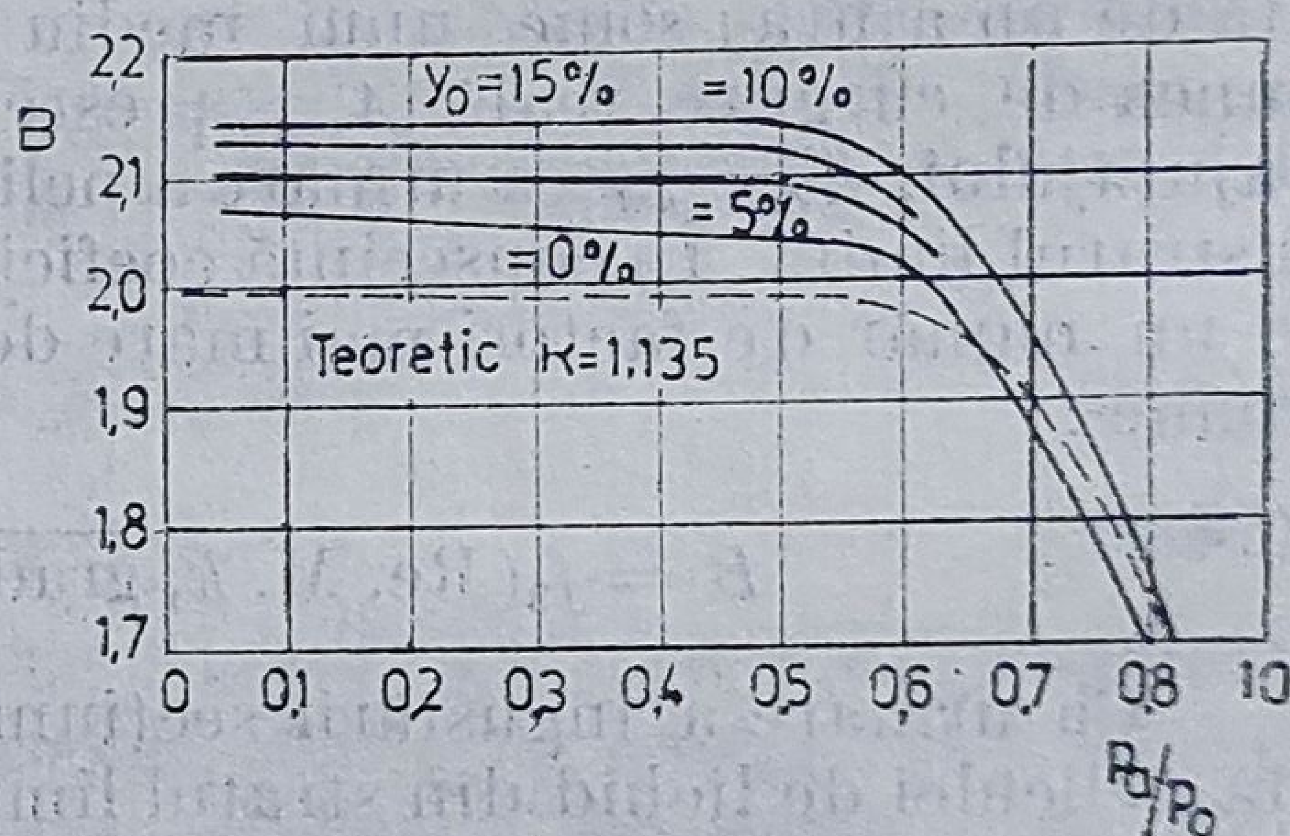


Fig. 5.21. Coeficientul $B = f(p_a/p_0)$ pentru abur saturat uscat ($k = 1{,}135$) şi abur umed cu umiditatea iniţială y_0.

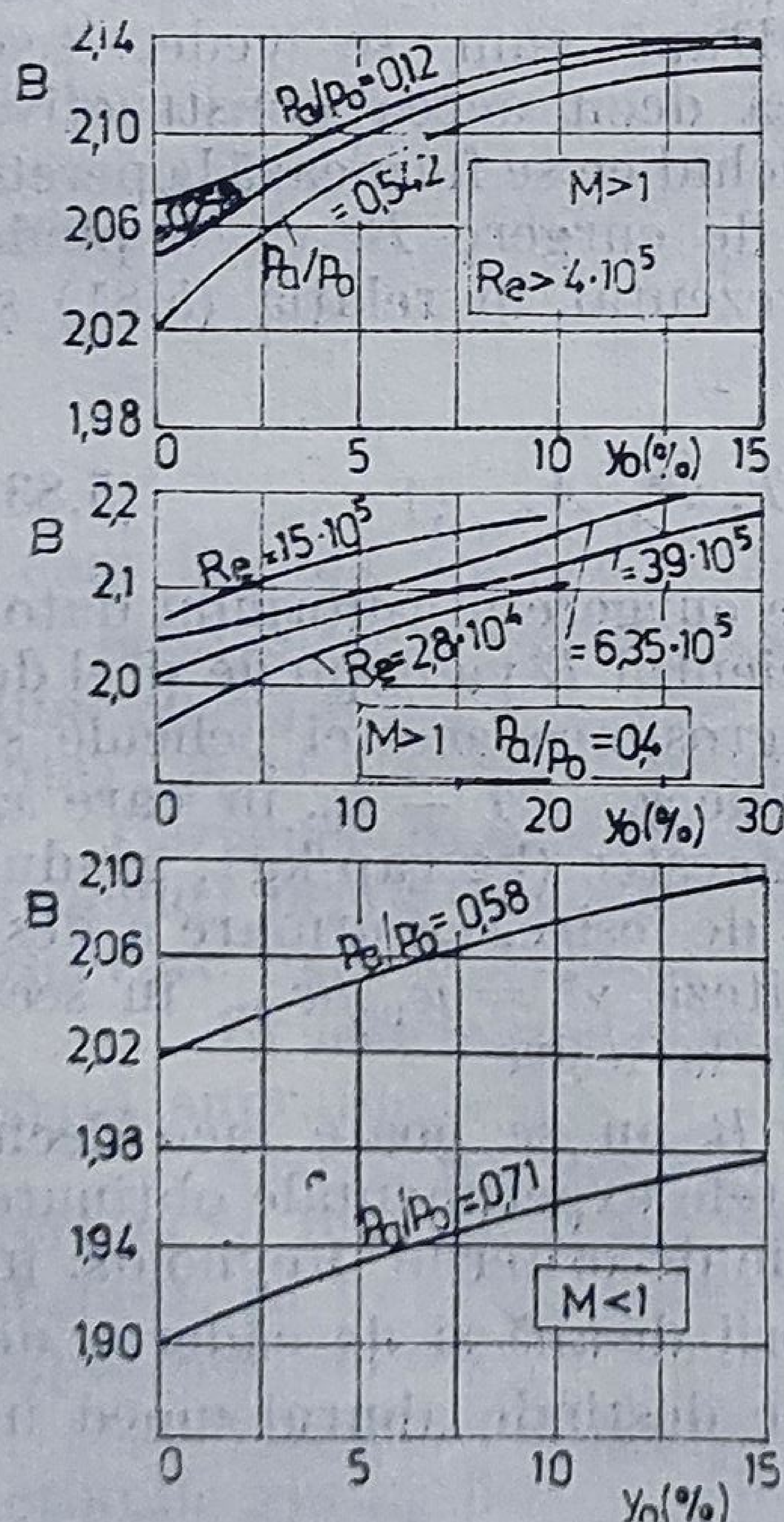


Fig. 5.20. Coeficientul $B = f(p_a/p_0, \text{Re}, y)$ pentru ajutaje ce destind un mediu bifazic.

saturat uscat, cu un exponent adiabat $k = 1{,}135$ și umiditate $y_0 = 0$, și pentru abur umed în funcție de umiditatea inițială y_0. Se constată că pentru umidități $y_0 < 6\%$, rezultatele experimentale coincid aproape exact cu cele teoretice, ceea ce înseamnă că la umidități inițiale mici, nu se formează peliculă de lichid. De asemenea se constată că la curgeri subsonice, chiar pentru umidități $y_0 > 6\%$, pelicula de lichid nu influențează substanțial secțiunea de curgere oferită constructiv.

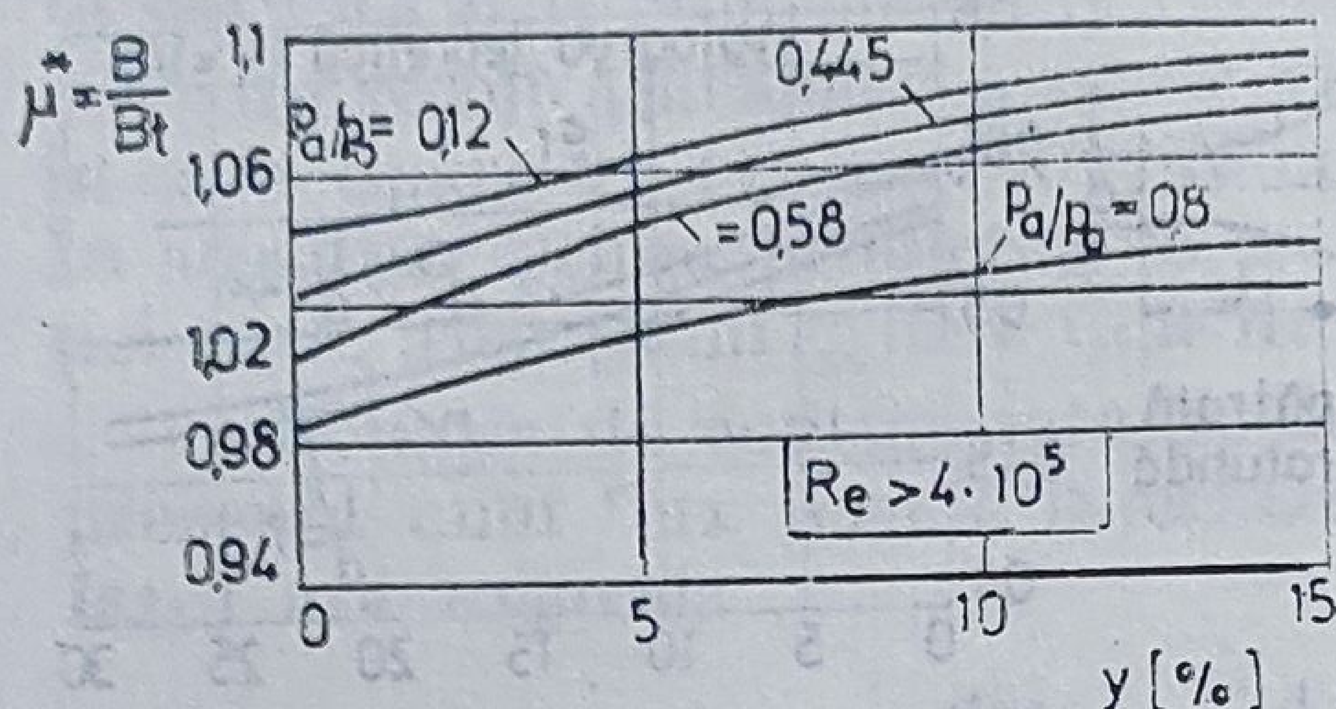


Fig. 5.22. Coeficientul de debit μ^* în funcție de umiditatea inițială y_0.

Pentru determinarea coeficientului B_T se poate folosi expresia

$$B_T = \frac{1}{v_{bf}} \sqrt{\Delta h} \qquad (5.84)$$

în care v_{bf} este volumul specific al mediului vifazic la ieșirea din porțiunea convergentă iar Δh — căderea de entalpie în ajutaj, exprimată în kJ/kg.

Pentru vaporii de apă supraîncălziți faza de vapori se comportă ca un gaz perfect cu $k = 1{,}3$ și ca urmare se calculează cu relațiile acestuia.

Pentru o temperatură a vaporilor la intrarea în ajutaj t_0 mai ridicată decît cea de saturație $t_s (\Delta t_0 = t_0 - t_s = 5 \div 10°)$ valoarea coeficientului de debit μ^* în funcție de umiditatea inițială y_0 se obține din figura 5.22.

Calculul vitezei de ieșire w_2 a mediului bifazic dintr-un ajutaj sonic se face cu aceeași formulă ca în cazul gazului perfect și anume:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{v_0} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \qquad (5.85)$$

Volumul specific al aburului în secțiunea critică (secțiunea de ieșire) este dat de relația (5.86) obținută experimental și care ține seama de prezența fazei lichide:

$$v_2 = (1 - y_0) v_0'' \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}} \quad [\text{m}^3/\text{kg}] \qquad (5.86)$$

în care y_0 este umiditatea mediului bifazic la intrare, iar v_0'' — volumul specific al vaporilor saturați la intrarea în ajutaj. Ceea ce s-a constatat experimental la curgerea mediului bifazic printr-un ajutaj sonic este dependența valorii raportului critic de presiuni, de umiditate. În figura 5.23 se prezintă valoarea $\varepsilon_{cr} = p_{cr}/p_0$ în funcție de umiditate și de mărimile constructive ale unui ajutaj convergent, determinată experimental. Conform datelor din figura 5.23, se constată scăderea raportului ε_{cr} față de valoarea teoretică odată cu creșterea umidității. Totodată s-a constatat și influența lungimii ajutajului asupra procesului de trecere a fazei de vapori

în faza lichidă. În cazul ajutajelor scurte, datorită fenomenului de întîrziere a condensării, nu apare o creștere a umidității în lungul lui. În ajutajele lungi există posibilitatea condensării unei părți din vapori.

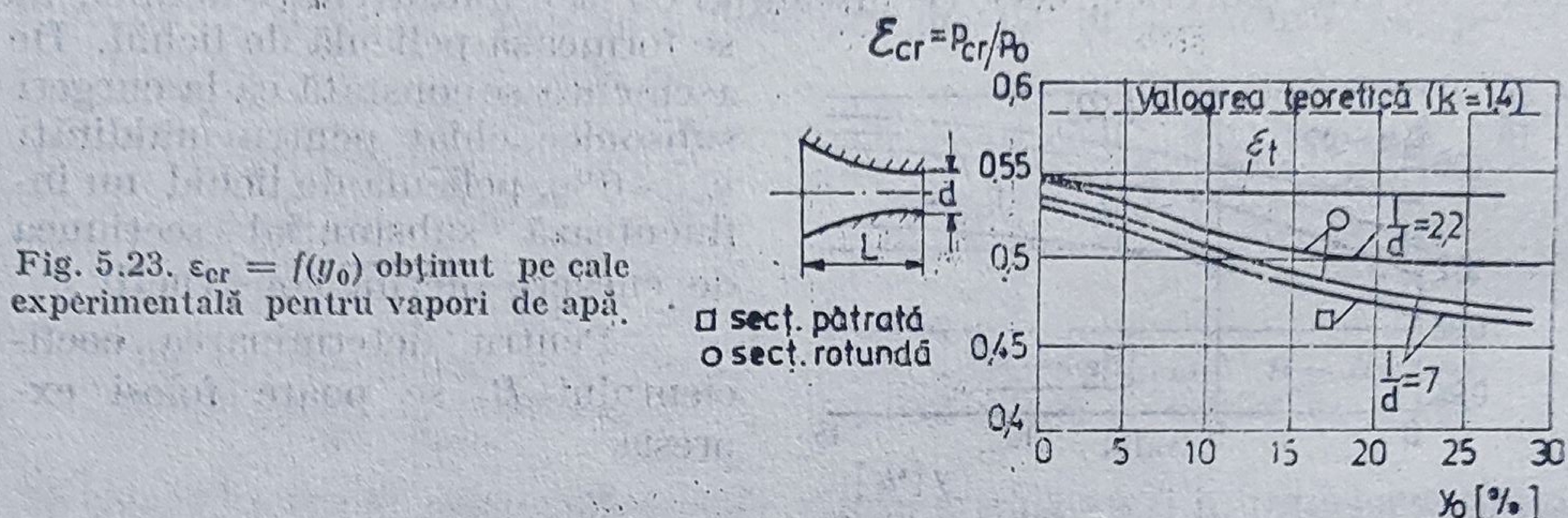


Fig. 5.23. $\varepsilon_{cr} = f(y_0)$ obținut pe cale experimentală pentru vapori de apă.

Debitul maxim de fluid bifazic $\dot{m}$ ce trece printr-un ajutaj sonic se poate calcula cu relația experimentală

$$\dot{m} = \mu_{cr}^* A_{cr} B_{T\,cr} \sqrt{\frac{p_0}{v_0}} \ [\mathrm{kg/s}] \tag{5.87}$$

în care :

$$B_{T_{cr}} = \sqrt{k\left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{k-1}}}$$

A_{cr} = secțiunea sonoră a ajutajului în m²;

μ_{cr}^* = coeficientul de debit la valoarea critică a presiunilor ε_{cr} în funcție de umiditate, obținut din figura 5.22.

5.7. AJUTAJ GEOMETRIC SUPERSONIC PENTRU MEDIUL BIFAZIC MONOCOMPONENT.

Calculul unui ajutaj supersonic pentru un mediu bifazic monocomponent se face după aceeași schemă ca cel pentru un gaz perfect și anume :

— determinarea secțiunii minime (critice) pentru debitul nominal de fluid ;

— determinarea elementelor constructive ale părții convergente ;

— determinarea elementelor constructive ale părții divergente.

În cazul ajutajelor ce trebuie să realizeze la ieșire o viteză corespunzătoare unei cifre Mach moderate și anume $1 \leq M \leq 1{,}15$ secțiunea critică (sonoră) se determină cu relația (5.88), obținută din (5.87),

$$A_{cr} = \frac{\dot{m}}{\mu_{cr}^* B_{T_{cr}} \sqrt{\frac{p_0}{v_0}}} \tag{5.88}$$

iar secțiunea de ieșire (maximă) se stabilește cu ecuația de continuitate

$$A = \frac{\dot{m}\, v_2}{w_2}, \tag{5.89}$$

în care w_2 și v_2 sînt viteza și volumul specific în secțiunea de ieșire.

În cazul ajutajelor a căror viteză de ieșire este mare (supersonică) în care apare un proces activ de condensare, calculul este mai complicat. În acest caz prima problemă ce trebuie rezolvată este determinarea poziției reale a secțiunii critice față de poziția constructivă (fig. 5.17).

Ecuația de continuitate aplicată unui debit numai de vapori $\dot{m}_v$ în prezența unui flux termic interfazic specific q_T (schimbat între cele două faze) are expresia

$$\frac{d\overline{m}_v}{\overline{m}_v} - \frac{dA}{A} + \frac{dq_T}{c_{p_v} \cdot T} = 0 \tag{5.89}$$

în care:

$$dq_T = [r - (c_l - c_{v_v})T]dx = -(1-x)\frac{d\overline{m}_v}{\overline{m}_v}[r - (c_l - c_{v_v})T] \tag{5.90}$$

în care: $\overline{m}_v$ este masa de vapori din amestecul bifazic; c_l, c_{v_v} — căldura specifică la volum constant a fazei lichide și a fazei de vapori; r — căldura latentă de vaporizare; x — titlul vaporilor.

Relația (5.89), ținînd seama de (5.90), capătă forma

$$\frac{dA}{A} = \frac{d\overline{m}_v}{\overline{m}_v} + \frac{dq_T}{c_{p_v} \cdot T} = \frac{d\overline{m}_v}{\overline{m}_v}[1 - (1-x)f(t)] \tag{5.91}$$

în care

$$f(T) = \frac{r}{c_{p_v} \cdot T} - \frac{c_l - c_{v_v}}{c_{p_v}} \tag{5.92}$$

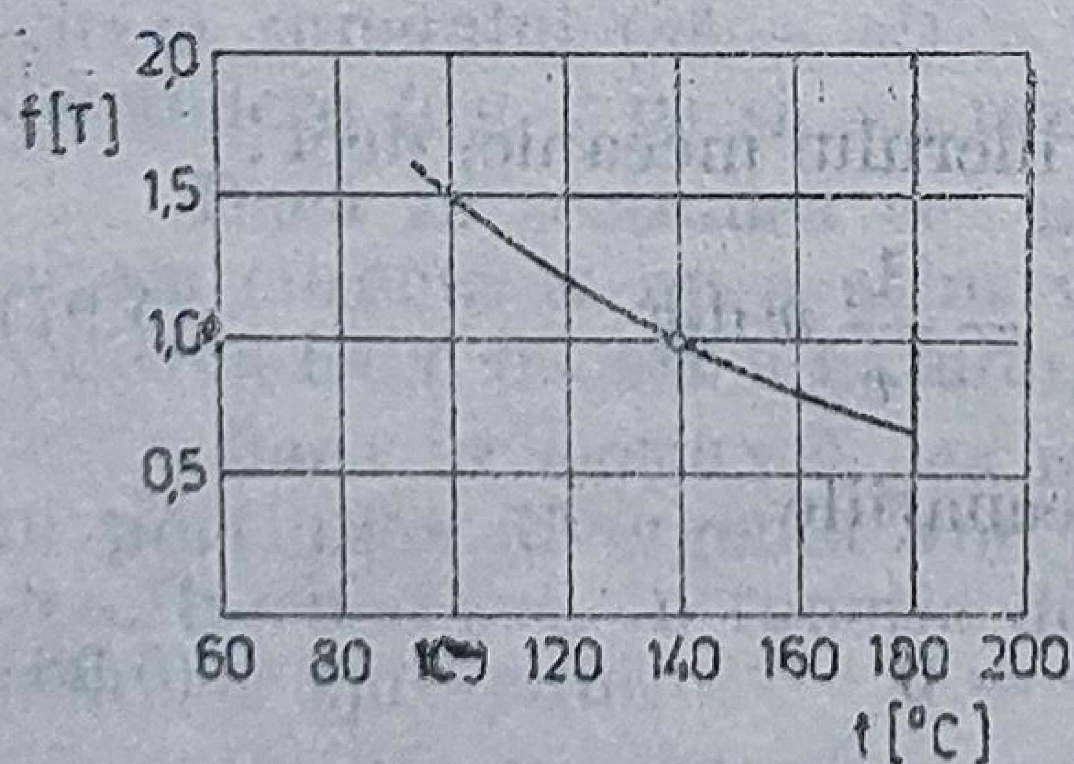


Fig. 5.24. Funcția $F(T)$ pentru vapori de apă depinzînd de temperatura inițială t_0.

Pentru vaporii de apă, funcția $f(T)$ este reprezentată în figura 5.24. Funcția $f(T)$ capătă diferite valori în funcție de temperatura vaporilor la intrarea în ajutaj, ceea ce face ca secțiunea critică efectivă să fie în realitate fie în interiorul părții convergente, fie în interiorul celei divergente. Din figura 5.24 se vede că pentru vaporii de apă numai pentru temperatura de 140° secțiunea critică constructivă coincide cu aceea la care efectiv se realizează viteza critică.

Din cauza unghiului deschis ce îl face peretele secțiunii convergente cu cel al secțiunii divergente va apărea un salt de presiune însoțit de unul de condensare.

5.8. AJUTAJE GEOMETRICE PREA LUNGI SAU PREA SCURTE PENTRU CONDIȚIILE REALE DE FUNCȚIONARE (PENTRU GAZE PERFECTE)

Curgerea în regim permanent a unui gaz perfect printr-un canal de o secțiune oarecare, deci și printr-un ajutaj, respectă în orice secțiune a acestuia ecuația de continuitate și anume:

$$\dot{m} = \frac{A \cdot w}{v} = \frac{A_1 \cdot w_1}{v_1} = \text{const.} \tag{5.93}$$

în care A, w și v sînt secțiunea, viteza și volumul specific în secțiunea respectivă; A_1, w_1 și v_1 aceleași mărimi în secțiunea inițială; $\dot{m}$ — debitul de gaz (în kg/s) ce curge în regim permanent prin canal.

În cazul cînd în timpul curgerii are loc și o transformare termodinamică, de exemplu o destindere adiabat-izentropă, viteza de curgere și volumul specific într-o secțiune oarecare unde presiunea are valoarea p sînt date de relațiile cunoscute (5.94) și (5.95):

$$w = \sqrt{w_1 + 2p_1v_1 \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]} \ \text{[m/s]} \tag{5.94}$$

$$p = p_1\left[1 - \frac{k-1}{k}\,\frac{w^2 - w_1^2}{2\,p_1 w_1}\right]^{\frac{k}{k-1}} \ [\text{N/m}^2] \tag{5.95}$$

Din expresia adiabatei $pv^k = \text{const.}$ se obține

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{k}\,\frac{v}{p}. \tag{5.96}$$

Variația energiei cinetice se obține pe seama lucrului mecanic, deci:

$$\mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}\right) = -v\mathrm{d}p\,; \quad \mathrm{d}p = -\frac{1}{v}\,w\,\mathrm{d}w \tag{5.97}$$

Logaritmînd și diferențiind (5.93), se obțin ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} - \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}w}{w} = 0 \tag{5.98}$$

$$\frac{1}{A}\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{w}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} - \frac{1}{v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = 0 \tag{5.99}$$

Introducînd pe (5.96) în relația (5.99) și ținînd seama ca $a = \sqrt{kpv}$ expresia devine

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{v}{w^2} - \frac{1}{k \cdot p}\right) dp = \frac{vkp - w^2}{kpw^2} dp = \frac{a^2 - w^2}{kpw^2} dp \quad (5.100)$$

Ca urmare, în cazul curgerii cu destindere adiabat-izentropă a unui gaz perfect printr-un canal cu secțiune variabilă, variația presiunii în funcție de variația secțiunii canalului este

$$dp = \frac{dA}{A} \frac{kpw^2}{a^2 - w^2} \quad (5.101)$$

Se consideră, ca exemplu, un ajutaj convergent-divergent pentru care în partea convergentă $dA/A < 0$, iar în partea divergentă $dA/A > 0$.

Din relația (5.101) se constată că în cazul cînd viteza de intrare a gazului în ajutaj ar fi mai mare decît viteza sunetului ($w_1 > a$), în porțiunea convergentă a ajutajului presiunea va crește ($dp > 0$) și viteza va scădea. Dacă și în secțiunea minimă a ajutajului, viteza de curgere ar fi tot mai mare decît viteza sunetului, în partea divergentă ce urmează, presiunea va începe să scadă, deoarece $dA/A > 0$ și deci $(a^2 - w_1^2) < 0$, iar viteza va începe să scadă. Dacă în secțiunea minimă viteza w, ar fi egală cu viteza sunetului, deci presiunea a devenit egală cu p_{cr}, în partea divergentă a ajutajului pot avea loc două situații, amîndouă stabile și anume:

— viteza de curgere începe să crească $(a^2 - w^2) < 0$. Deci curentul de gaz se accelerează, avînd drept consecință o scădere a presiunii (o destindere) dacă presiunea în secțiunea de ieșire a ajutajului $p_2 < p_{cr}$;

— viteza de curgere începe să scadă $(a^2 - w^2) > 0$, deci curentul de gaz se frînează, avînd drept consecință o creștere a presiunii (o compresie) dacă presiunea în secțiunea de ieșire a ajutajului $p_2 > p_{cr}$;

Se constată că parametrul ce va hotărî apariția unuia sau celuilalt caz este presiunea p_2 ce domnește în secțiunea de ieșire a ajutajului.

În cazul cînd viteza gazului la intrarea în ajutaj este mai mică decît viteza sunetului $(a^2 - w_1^2) > 0$, în porțiunea convergentă va avea loc o destindere ($dp < 0$) și, ca urmare, viteza de curgere w va crește.

Dacă în secțiunea cea mai îngustă a ajutajului (astfel construită) viteza curentă w nu a atins valoarea sunetului, în porțiunea divergentă va avea loc o frînare a gazului, deci viteza sa scade iar presiunea va crește.

Dacă în secțiunea cea mai îngustă a lui s-a atins viteza sunetului, în porțiunea divergentă vor putea apărea oricare din cele două situații descrise mai sus, în funcție de presiunea p_2 ce domnește în secțiunea de ieșire a ajutajului.

Ca urmare, viteza sunetului se poate realiza în secțiunea minimă, cu condiția ca în această secțiune să existe valoarea critică a presiunii inițiale. Dacă în această secțiune presiunea este mai ridicată, nu se poate realiza viteza sunetului în nici o altă secțiune din porțiunea divergentă.

Ajutajul calculat pentru destinderea de la p_0 la p_2 (presiunea mediului exterior $p_m = p_2$), care realizează în secțiunea de ieșire viteza pentru care a fost calculat (deci la care regimul de variație axială a presiunii este corect) se numește „ajutaj de lungime exactă" (fig. 5.25).

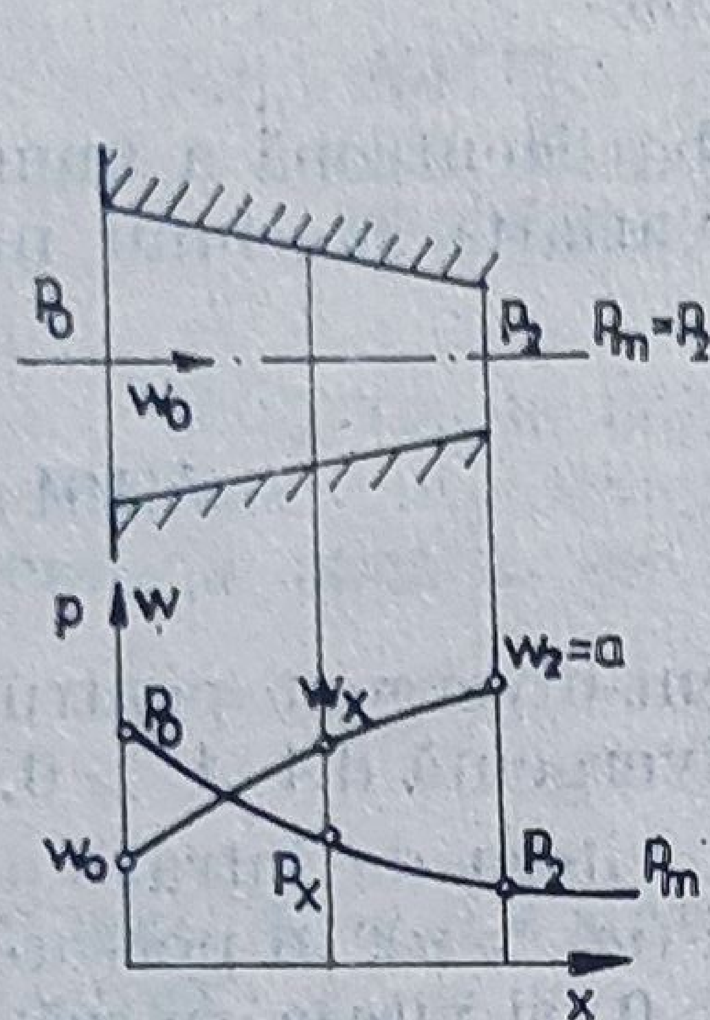
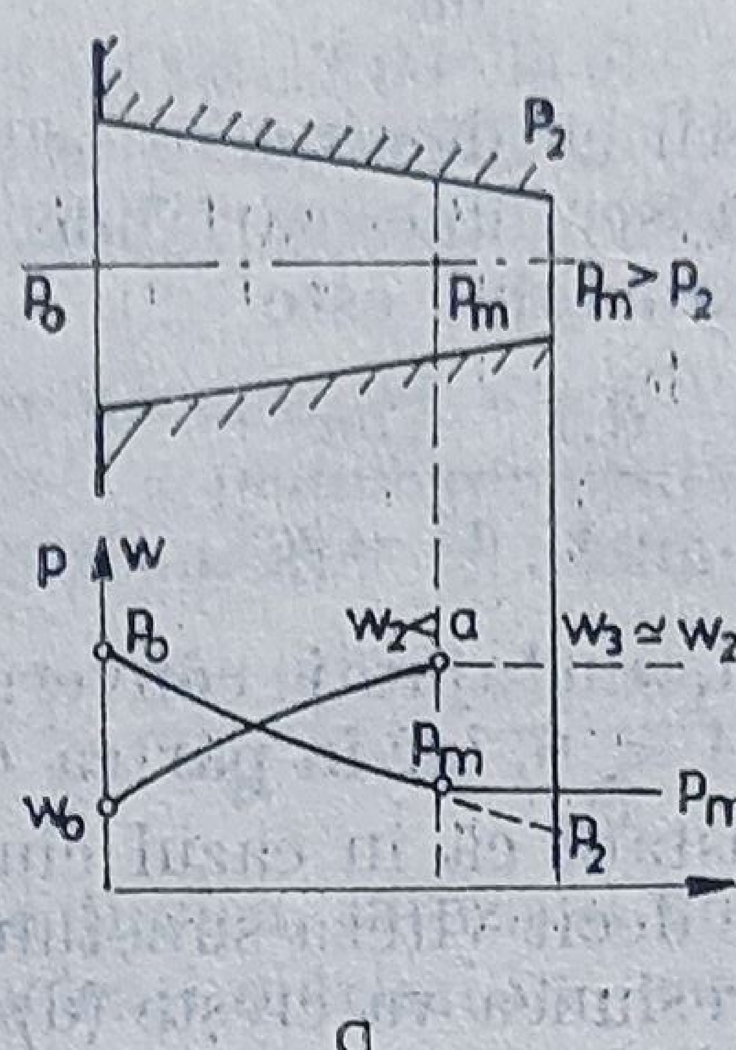


Fig. 5.25. „Ajutaj de lungime exactă" subsonic.



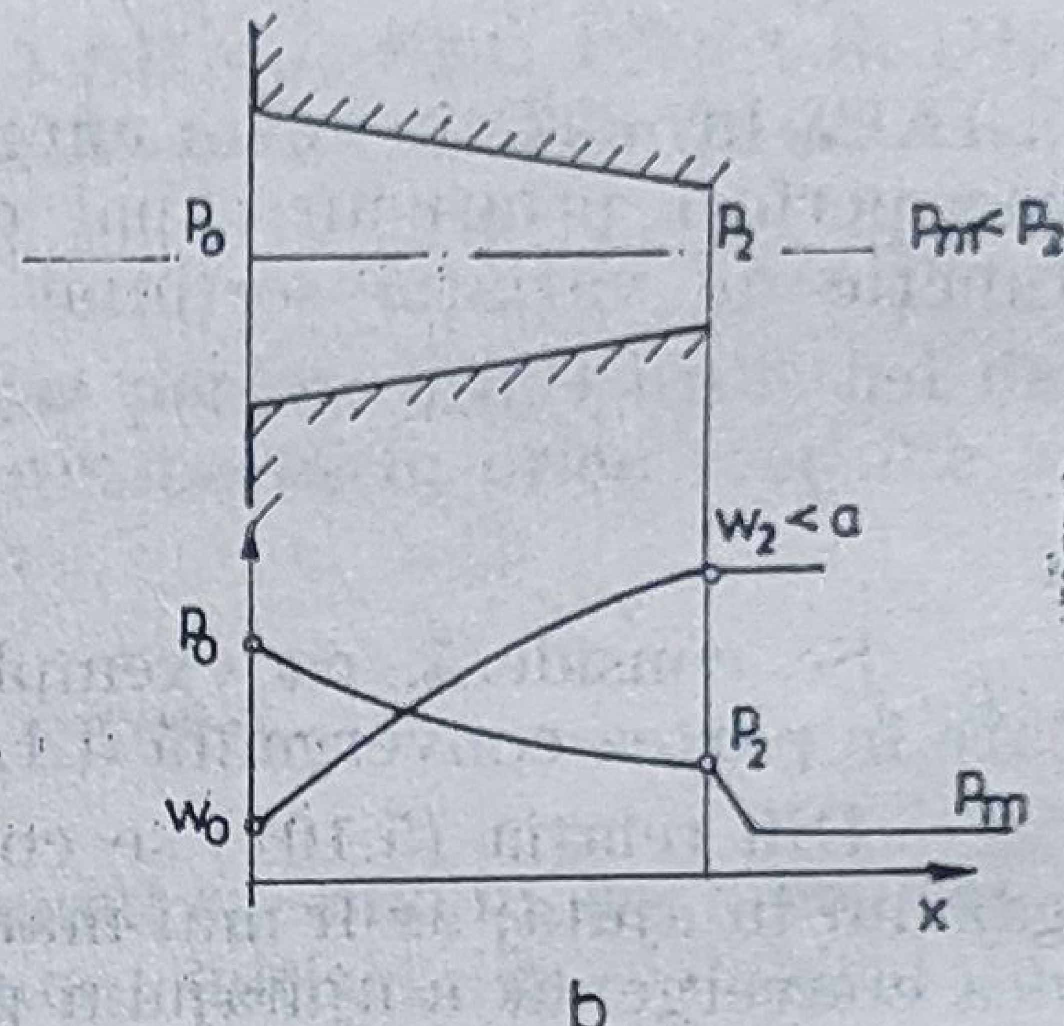


Fig. 5.26. Ajzutaj subsonic: *a* — prea lung *b* — prea scurt

Dacă presiunea p_m la ieșire din ajutaj este mai ridicată decît aceea pentru care el a fost calculat (p_2), atunci echilibrul dintre această presiune și cea din secțiunea finală a ajutajului are loc în interiorul lui și el se numește „ajutaj prea lung". Variația parametrilor caracteristici ai gazului într-un "ajutaj prea lung" este prezentată în figura 5.26 *a*, iar în unul „prea scurt" în figura 5.26 *b*.

Pentru un ajutaj subsonic „prea lung" (figura 5.26 *a*) destinderea de la p_0 la p_m are loc în interiorul lui. Din secțiunea unde presiunea momentană a atins valoarea p_m și deci viteza calculată w_2, procesul de destindere încetează, curgerea căpătînd un caracter potențial care va respecta ecuația de continuitate.

Pentru un ajutaj subsonic „prea scurt" (figura 5.26 *b*) destinderea nu a avut loc în ajutaj de la presiunea p_1 la p_m, ci numai pînă la $p_2 > p$, obținîndu-se viteza de ieșire w_2. Destinderea în continuare de la p_2 la p_m are loc liber, în mediu de presiune p_m avînd un caracter de expansiune bruscă, fără însă ca viteza w_2 să crească.

În continuare se vor prezenta procesele termogazodinamice ce apar în ajutajele „prea scurte" sau „prea lungi", sonice sau supersonice.

Ajutaj sonic sau supersonic "prea scurt". Se notează cu p_1 și p_a presiunea la intrare și ieșire pentru care a fost calculat un ajutaj supersonic (convergent-divergent) și cu p_2 presiunea ce domnește în spațiul de la ieșire. Deoarece ajutajul este prea scurt, $p_2 < p_a$. Deoarece viteza de ieșire a gazului din ajutaj este mai mare decît viteza sunetului, muchia de ieșire *A* va constitui pentru curentul de gaz un element perturbator. În figura 5.27 se prezintă deplasarea perturbației slabe generată de muchia *A* într-un mediu imobil. Dacă viteza de curgere a gazului notată cu w_2 este mai mică decît cea de propagare a undei de șoc ($w < a$), după timpul

τ punctul A se va găsi la distanța $w\tau$ iar zona perturbată se va găsi în interiorul unei sfere de rază $a\tau > w\tau$. În timpul τ (figura 5.28) toate undele sferice perturbatoare generate de muchia A și cu centrul în A s-au deplasat din A în A'_1. Deci în intervalul de timp $0 \to \tau$ ele se găsesc în interiorul sferei de rază $a \cdot \tau$.

Dacă viteza de deplasare a gazului w este mai mare decît viteza de propagare a undei de șoc ($w > a$), punctul A se va găsi după timpul τ

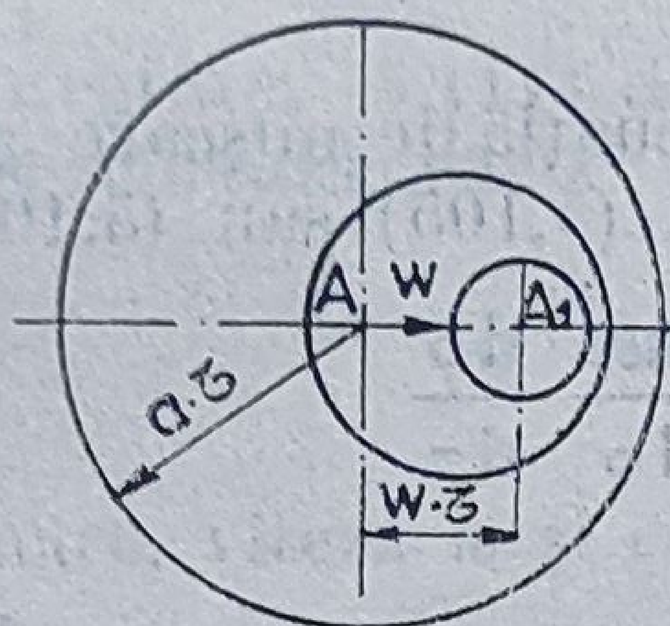


Fig. 5.27. Deplasatea într-un mediu imobil a unei perturbații slabe.

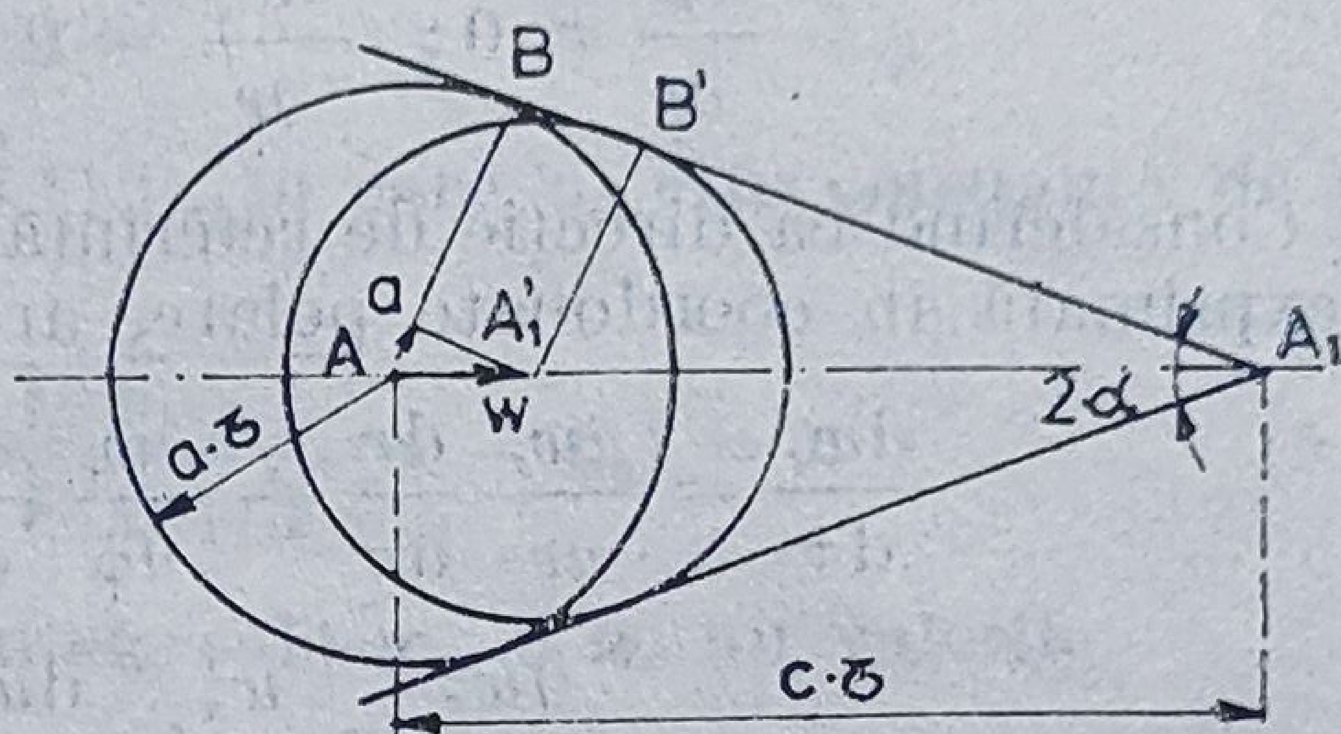


Fig. 5.28. Deplasarea într-un mediu cu viteză subsonică a unei perturbații slabe.

în A_1 distanța $A A_1 = w \cdot \tau$, în timp ce perturbația deplasîndu-se cu viteza sunetului ea se va găsi în interiorul sferei de rază $a \cdot \tau < w \cdot \tau$. La timpul τ toate undele sferice generate din punctul A, în timpul deplasării AA_1, se vor găsi în spatele punctului A_1, deci în interiorul unui con cu vîrful în A_1.

Unghiul α format de generatoarea conului cu axa lui și pe care se deplasează punctul A este dat de relația „unghiului Mach" avînd expresia

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AA_1} = \frac{A'_1B'}{A'_1A_1} = \frac{a \cdot \tau}{w \cdot \tau} = \frac{a}{w} \tag{5.102}$$

Se discută în continuare fenomenele ce apar în secțiunea de ieșire a unui ajutaj supersonic prea scurt ținînd seama de notațiile din figura 5.29. Se consideră planul AM situat în interiorul diedrului M_0AM_1 for-

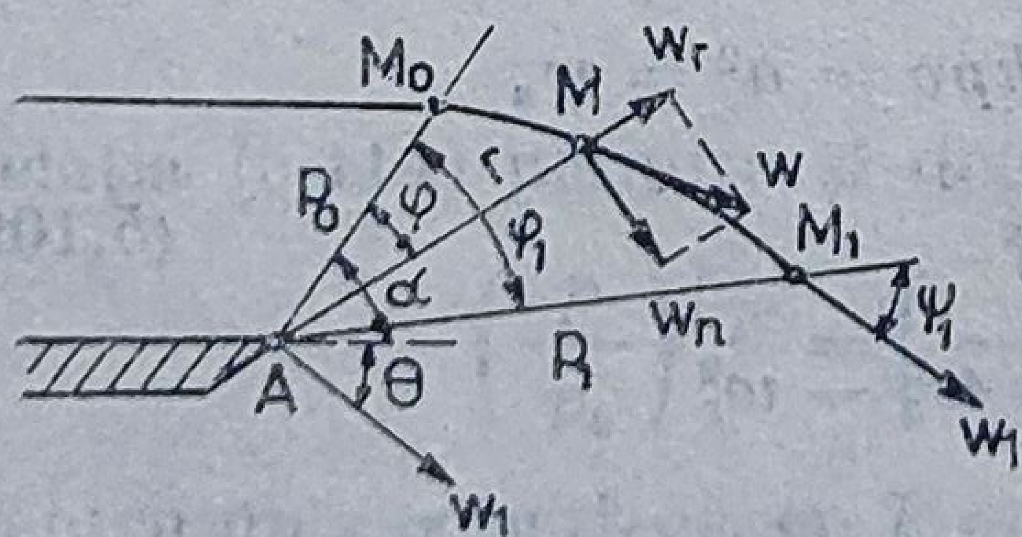


Fig. 5.29. Unda de șoc la ieșirea gazului dintr-un ajutaj supersonic.

mînd un unghi Mach cu viteza locală w a gazului Componenta normală w_n a acestei viteze va fi egală cu viteza sunetului corespunzătoare stării fluidului în planul AM.

Notînd cu w_r și w_n componentele pe direcția r și n a vitezei w ce trece prin M, se obțin relațiile geometrice-analitice (5.103)

$$w^2 = w_n^2 + w_r^2; \quad w_n = a; \frac{dw_r}{d\tau} = \frac{w_n^2}{r} \tag{5.103}$$

În planul AM mărimile caracteristice ale gazului au valori constante, încît se poate scrie:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial w_n}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial w_r}{\partial r} = 0 \tag{5.104}$$

Considerînd ca direcție de referință AM_0, ecuația de mișcare a gazului, exprimată în coordonate polare, are forma (5.105) sau (5.106):

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{\partial w_r}{\partial r}\frac{dr}{d\tau} + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dw_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} \tag{5.105}$$

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{w_n^2}{r}; \quad \frac{dw_r}{d\varphi} = w_n \tag{5.106}$$

Mărimile caracteristice ale fluidului pe linia de curent în punctul M_0 se notează cu indicele „0", deci sînt w_0, p_0, v_0, etc., iar cele în punctul M sînt w, p, v, etc. Deoarece presiunea în secțiunea de ieșire a ajutajului este mai mare decît cea a mediului exterior, are loc o destindere a gazului în spațiul liber (presupusă izentropă). Ecuația energiei pentru această destindere este

$$\frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} = \frac{k}{k-1} p_0 \cdot v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right] \tag{5.107}$$

iar viteza gazului în punctul M:

$$w = 2\left[\frac{k}{k-1} p_0 \cdot v_0 + \frac{c_0^2}{2}\right] - \frac{2\,kpv}{k-1} \tag{5.108}$$

Însemnînd paranteza mare cu C, ea fiind o constantă, relația (5.108) devine

$$C = \frac{k}{k-1} p_0 v_0 + \frac{w_0^2}{2}; \quad kpv = a^2 = w_n$$

$$w^2 = 2C - 2\frac{w_n}{k-1} = w_n^2 - w_r^2 \tag{5.109}$$

sau aranjată convenabil capătă forma

$$\frac{k+1}{k-1} w_n^2 = 2C - w_r^2 = 2C\left[1 - \frac{w_r^2}{2C}\right] \tag{5.110}$$

Ținind seama de (5.110), relația (5.106) devine

$$\frac{dw_r}{d\varphi} = w_n = \sqrt{2C\,\frac{k-1}{k+1}\left(1-\frac{w_r^2}{2\,C}\right)}$$

$$\frac{\dfrac{dw_r}{\sqrt{2C}}}{\sqrt{1+\dfrac{w_r^2}{2C}}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,d\varphi \tag{5.111}$$

Prin integrare, (5.111) devine (5.112), în care φ_0 este constanta de integrare. Se notează cu λ:

$$\arcsin\frac{w_r}{\sqrt{2C}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\varphi-\varphi_0) = \lambda \tag{5.112}$$

Ca urmare, viteza w și componentele sale w_n și w_r au valorile

$$w^2 = 2C\left[\sin^2\lambda + \frac{k-1}{k+1}\cos^2\lambda\right] \tag{5.113}$$

$$w = \sqrt{2C}\cdot\sin\lambda;\quad w_n = \sqrt{2C\,\frac{k-1}{k+1}}\,\cos\lambda$$

Egalînd relația (5.113) cu (5.107), se obține unghiul φ în funcție de presiunea p

$$\frac{w^2}{2} = \frac{k}{k-1}\,p_0\cdot v_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] + \frac{w_0^2}{2} = C\left[\sin^2\lambda + \frac{k-1}{k+1}\cos^2\lambda\right]$$

$$1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{k-1}{2}\,\frac{w_0^2}{kp_0v_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\,\frac{w_0^2}{kp_0v_0}\right)\left(1-\frac{2}{k+1}\cos^2\lambda\right) \tag{5.114}$$

sau, în funcție de $M_0 = w_0/kp_0v_0$ cu relația:

$$1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{k-1}{2}\,M_0^2 = \left(1-\frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)\left(1-\frac{2}{k+1}\cos^2\lambda\right) \tag{5.115}$$

Relația (5.114) permite și determinarea presiunii p în funcție de p_0

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}\,\frac{w_0^2}{kp_0v_0}\right)\cos^2\lambda \tag{5.116}$$

Pentru un gaz perfect, cu $k = 1{,}4$ relația (5.116) poate fi scrisă sub forma simplă

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0{,}285} = (0{,}83 + 0{,}166\,M_0^2)\cos^2\lambda$$

Introducînd expresia lui λ și ținînd seama de relația (5.102) expresia (5.116) devine

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}\,\frac{2}{\sin^2\alpha_0}\right)\cos^2\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varphi-\varphi_0)\right] \quad (5.117)$$

care, pentru gazul perfect, ia forma

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,285} = \left(0,83 + \frac{0,166}{\sin^2\alpha_0}\right)\cos^2\left[0,4(\varphi-\varphi_0)\right]$$

Relația (5.117) permite determinarea abaterii (derivației) liniei de curent a gazului în secțiunea de ieșire a unui ajutaj prea scurt. Unghiul α_0 se calculează cu relația (4.102) pentru starea gazului în secțiunea de ieșire.

Unghiul φ_1 din figura 5.29 se calculează cu relația (5.117), în care se observă că α_0, iar $\varphi_0 = 0$.

Unghiul Ψ făcut de viteză în punctul M cu planul AM este

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{w_n}{w_r} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\mathrm{ctg}\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varphi+\varphi_0)\right] \quad (5.118)$$

iar unghiul ψ_1 se determină cu aceeași relație, înlocuind pe φ cu φ_1.

Unghiul de deviație a vînei de gaz θ se calculează cu relația

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \varphi_1 + \psi_1 - \frac{\pi}{2} = \varphi_1 + \psi_1 - \alpha_0 \quad (5.119)$$

Ajutaj sonic sau supersonic prea lung. Se definește ca ajutaj prea lung acela la care presiunea mediului înconjurător la ieșire este mai ridicată decît presiunea pînă la care se destinde gazul. În acest caz reglarea presiunilor are loc în interiorul ajutajului. În figura 5.30 se prezintă destinderea gazului într-un ajutaj prea lung. Se consideră că presiunea în mediul exterior secțiunii de ieșire din ajutaj este $p_b > p_d < p_a'$. Presiunea p_b este valoarea limită superioară pentru care destinderea are loc în ajutaj pînă la presiunea critică, iar p_a' va fi definită mai jos.

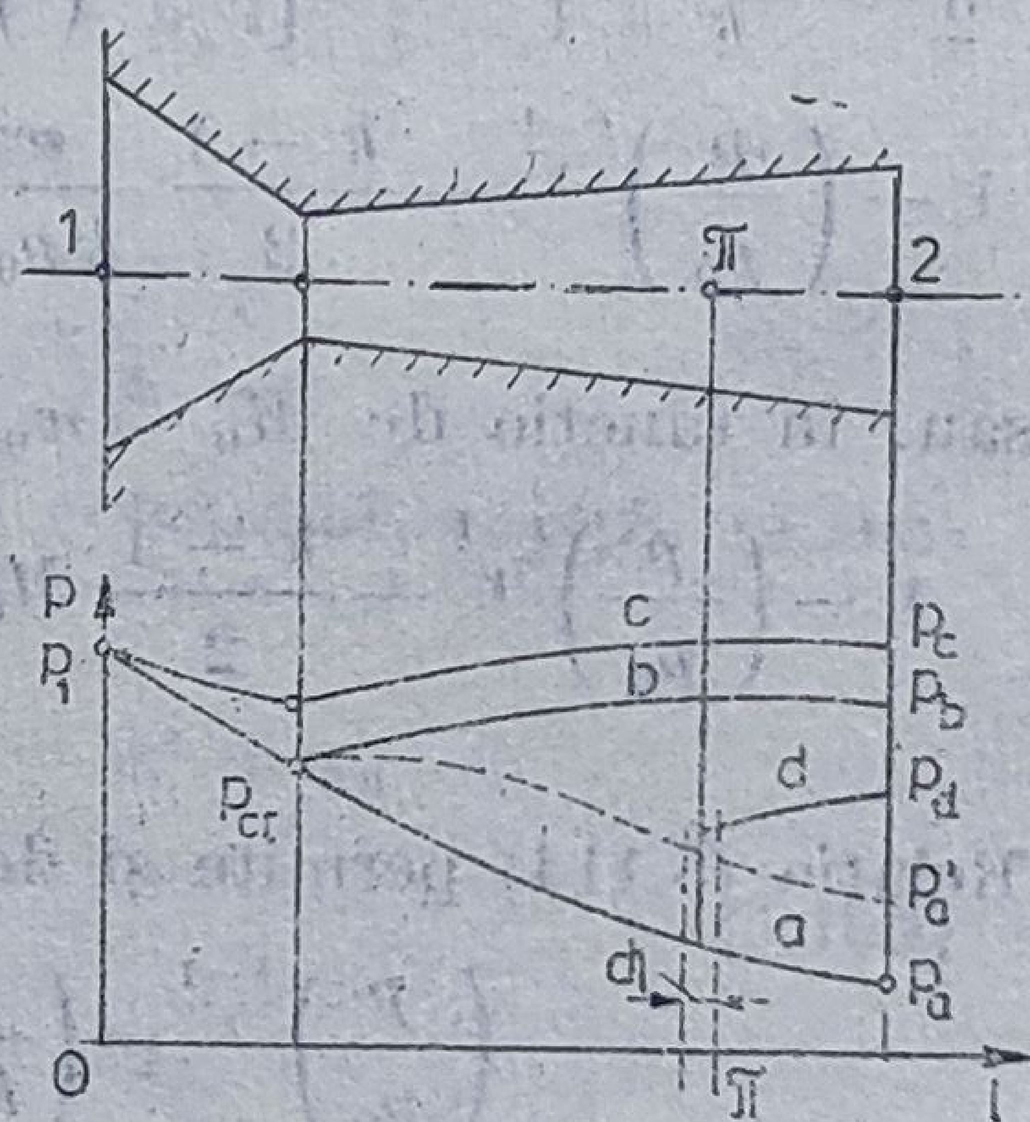


Fig. 5,30. Ajutaj supersonic „prea lung”.

Ca urmare a presiunii p_d a mediului ambiant la gura de ieșire a ajutajului mai ridicată decît presiunea p_a pentru care a fost calculat ajutajul, într-o secțiune oarecare a porțiunii divergente a lui, presiunea se ridică la valoarea p_d. Din punct de vedere teoretic, creșterea de presiune ar trebui să aibă loc brusc în secțiunea π, așa cum arăta curba d din figura 5.30. Dacă așa s-ar pe-

trece lucrurile, această creștere bruscă de presiune ar fi însoțită de o scădere bruscă a vitezei, ceea ce ar duce la transformarea curgerii supersonice în subsonică. Deci dacă înainte de acest salt se respectă condiția $a^2 - w^2 > 0$, după salt raportul ar fi $a^2 - w^2 < 0$.

Se consideră fenomenul de creștere a presiunii din punct de vedere teoretic și se notează parametrii gazului înaintea planului π cu p, v, w, T etc., și după el, la o distanță infinit mică dl cu p', v', w', T' etc. Pentru ambele stări se scrie

$$p\,v = R\,T;$$

$$p'v' = RT' \qquad (5.120)$$

Notînd cu A secțiunea ajutajului în planul π, ecuația de continuitate pentru unitatea de masă de gaz este

$$A = \frac{v}{w} = \frac{v'}{w'}\ [\mathrm{m}^2] \qquad (5.121)$$

Masa de gaz $\mathrm{d}m$ ce se găsește în volumul $A \cdot \mathrm{d}l$ va fi

$$\mathrm{d}m = \frac{A \cdot \mathrm{d}l}{v} \qquad (5.122)$$

Ca urmare, ecuația cantității de mișcare scrisă pentru timpul $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}l/w$ va fi:

$$(p' - p)\,A\mathrm{d}\,\tau = \frac{A\mathrm{d}l}{w}\,(w - w'). \qquad (5.123)$$

Cum $\mathrm{d}l/\mathrm{d}\tau = w$ relația (5.123) se poate scrie sub forma

$$p' - p = \frac{w}{v}\,(w - w'). \qquad (5.124)$$

Deoarece se acceptă prin definiție izentropia fenomenului de creștere bruscă a presiunii, ecuația entalpiei pentru secțiunile amonte și aval ale planului π va avea forma

$$\frac{w'^2}{2} - \frac{w^2}{2} = h - h' = c_p(T - T') = \frac{c_p}{R}(pv - p'v') =$$

$$= \frac{k}{k-1}\,(pv - p'v'). \qquad (5.125$$

Cu ajutorul relațiilor (5.120) —(5.124) se vor determina valorile mărimilor p', v', t', w' etc. în funcție de p, v, T etc. Astfel din (5.121) se obține:

$$\frac{v}{w} = \frac{v'}{w'} = \frac{v - v'}{w - w'}\ ; \quad w - w' = \frac{w'}{v'}\,(v - v') = \frac{w}{v}\,(v - v') \qquad (5.126)$$

Ca urmare relațiile (5.124) și (5.125) capătă formele (5.127) și (5.128):

$$p' - p = \frac{w^2}{v^2}(v - v') \tag{5.127}$$

$$\frac{w^2}{2}\left(\frac{v'^2}{v^2} - 1\right) = \frac{w^2}{2}\,\frac{v'^2 - v^2}{v^2} = \frac{k}{k-1}(pv - p'v') \tag{5.128}$$

Din care se obține:

$$w^2 = 2\frac{k}{k-1}\,\frac{v^2}{v'^2 - v^2}(pv - p'v') \tag{5.128}$$

Introducînd relația (5.128) în (5.127) se obține forma finală (5.129) după cum urmează:

$$p' - p = \frac{v - v'}{v^2}\,\frac{v^2}{v'^2 - v^2}\,\frac{2k}{k-1}(pv - p'v')$$

$$p' - p = \frac{1}{v' + v}\,\frac{2k}{k-1}(pv - p'v') = -\frac{1}{\frac{v'}{v} + 1}\,\frac{2k}{k-1}\left(p - p'\frac{v'}{v}\right)$$

$$(p - p')\left(\frac{v'}{v} + 1\right) = \frac{2k}{k-1}\left(p - p'\frac{v'}{v}\right)$$

$$\frac{v'}{v}\left(p - p' + \frac{2k}{k-1}p'\right) = \frac{2k}{k-1}p - p + p'$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{(k-1)p' + (k+1)p}{(k-1)p + (k+1)p'} \tag{5.129}$$

După cum se vede, s-a obținut chiar ecuația unei unde de șoc adiabate denumită *adiabata Huguenot*. Notînd cu M și cu M′ criteriul Mach al curgerii înainte și după unda de șoc, relația (5.124) devine:

$$p' - p = \frac{w^2}{v}\left(1 - \frac{v'}{v}\right) = \frac{w^2}{k \cdot p \cdot v}\,k \cdot p\left(1 - \frac{v'}{v}\right) = M^2 \cdot k \cdot p\left(1 - \frac{v'}{v}\right) \tag{5.130}$$

și, ținînd seama de (5.129), se ajunge la forma

$$p' - p = M^2 kp - M^2 kp\,\frac{(k-1)p' + (k+1)p}{(k-1)p + (k+1)p'} \tag{5.131}$$

Notînd χ saltul de presiune p'/p, relația (5.131) devine

$$\chi - 1 = M^2k - M^2k\,\frac{(k-1)\,\chi + (k+1)}{(k-1) + (k+1)\chi}$$

$$(k+1)\chi^2 - 2(1 + M^2k)\chi + (2Mk - k + 1) = 0 \qquad (5.132)$$

Rădăcinile ecuației (5.132) permit determinarea saltului de presiune $\chi = p'/p$ în secțiunea π

$$\chi_{1,2} = \frac{1 + M^2 k \pm \sqrt{1 + M^4 k^2 + 2M^2 k - (k-1)(2M^2 k - k + 1)}}{k+1}$$

sau, prin aranjarea termenilor de sub radical,

$$\sqrt{1 + M^4 k^2 + 2M^2k - (k+1)(2M^2k - k + 1)} =$$

$$= \sqrt{M^4k^2 - 2M^2k^2 + k^2} = \sqrt{(M^2k - k)^2}$$

$$\chi_{1,2} = \frac{1 + M^2k \pm \sqrt{(M^2k - k)}}{k+1}$$

Rădăcinile ecuației (5.132) sînt atunci

$$\chi_1 = \frac{p'}{p} = 1\,; \quad \chi_2 = \frac{p'}{p} = \frac{2k}{k+1}\,M^2 - \frac{k-1}{k+1} \qquad (5.133)$$

care pentru un gaz perfect ($k = 1,4$) devin

$$\chi_1 = 1\,; \quad \chi_2 = 1{,}16 \cdot M^2 - 0{,}166$$

Ca urmare în secțiunea π, trecerea de la presiunea p la p' poate avea loc sau lent, fără apariția unei unde de șoc (rădăcina $\chi_1 = 1$), sau cu undă de șoc (rădăcina χ_2). Mărimea saltului de presiune va depinde de valoarea criteriului Mach al curgerii în amontele secțiunii π. În cazul existenței unui salt de presiune vor apărea în secțiunea π și salturi de densitate, de temperatură, de viteză etc., a căror valoare este dată de (5.134) în funcție de valoarea saltului de presiune χ, sau (5.135) în funcție de criteriul Mach al curgerii în secțiunea π:

$$\left.\begin{aligned} \frac{w'}{w} &= \frac{(k-1)\,\chi + (k+1)}{(k-1) + (k+1)\chi}\,; \quad \frac{v'}{v} = \frac{(k-1)\chi + (k+1)}{(k-1) + (k+1)\chi} \\ \frac{\rho'}{\rho} &= \frac{(k-1) + (k-1)\chi}{(k-1)\chi + (k+1)} \end{aligned}\right\} \qquad (5.134)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{w'}{w} &= \frac{(k-1)\left(\dfrac{2k}{k+1}M^2-\dfrac{k-1}{k+1}\right)+(k+1)}{2kM^2} = \frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\,\frac{1}{M^2}\\ \frac{v'}{v} &= \frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\,\frac{1}{M^2};\quad \frac{\rho'}{\rho}=\frac{1}{\dfrac{k-1}{k+1}+\dfrac{2}{k+1}\,\dfrac{1}{M^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(5.135)$$

iar saltul de temperatură în unda de şoc este

$$\frac{T'}{T}=\frac{p'v'}{pv}=\left[\frac{2k}{k+1}M^2-\frac{k-1}{k+1}\right]\left[\frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\,\frac{1}{M^2}\right]$$

$$\frac{T'}{T}=\frac{1}{(k+1)^2}\left[6k-k^2-1-2(k-1)\frac{1}{M^2}+2k(k-1)M^2\right]\qquad(5.136)$$

Cu titlul de exemplu, pentru un gaz perfect cu $k = 1{,}4$, relaţiile (5.134) — (5.136) devin

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p'}{p}=1{,}16M^2-0{,}16;\quad \frac{w'}{w}=0{,}167+0{,}833\,\frac{1}{M^2}\\ &\frac{v'}{v}=0{,}167+0{,}833\,\frac{1}{M^2};\quad \frac{\rho'}{\rho}=\frac{1}{0{,}167+0{,}833\,\dfrac{1}{M^2}}\\ &\frac{T'}{T}=0{,}944-0{,}139\,\frac{1}{M^2}+0{,}1945\cdot M^2\end{aligned}\right\}\qquad(5.137)$$

Valoarea criteriului Mach după saltul de presiune, notat cu M', se obţine în funcţie de valoarea lui M înainte de salt, cu relaţia

$$M'^2=\frac{w'^2}{kp'v'}=\frac{w^2}{a^2}\,\frac{w'^2}{w^2}\,\frac{p}{p'}\,\frac{v}{v'}=M^2\,\frac{p}{p'}\,\frac{v'}{v}$$

$$M'^2=M^2\,\frac{(k-1)+\dfrac{2}{M^2}}{2kM^2-(k-1)}=\frac{(k-1)M^2+2}{2kM^2-(k-1)}\qquad(5.138)$$

Din expresia (5.138) se observă că pentru curgeri cu $M > 1$, (ceea ce este obligatoriu avînd în vedere că fenomenul de salt are loc numai în porţiunea divergentă a ajutajului), M' va avea întotdeauna o valoare mai mică decît 1.

Fenomenul descris mai sus apare numai în procese adiabat-izentrope. În procesele reale, chiar în absenţa schimbului de căldură a gazului cu

pereţii ajutajului procesul are loc adiabat-neizentrop, avînd în vedere termoconducţia din masa gazului. Ca urmare, creşterea presiunii de la p la p', sau respectiv de la p_a la p_d (figura 5.30), nu are loc brusc (ceea ce ar da naştere unor discontinuităţi a parametrilor în curentul de gaz) ci continuu pe o anumită distanţă dl.

Ţinînd seama de notaţiile din figura 5.30, se consideră că presiunea exterioară p'_a este cea mai ridicată valoare la care se mai poate obţine o viteză de curgere supersonică la ieşirea din ajutaj, valoare dată de relaţia (5.139) obţinută din (5.133):

$$p'_a = p_a \left(\frac{2\,k}{k+1} \mathrm{M}^2_{ev} - \frac{k-1}{k+1} \right) \tag{15.139}$$

în care M_{ev} este cifra Mach în secţiunea de ieşire a ajutajului.

Presiunea $p_b = p_{lim}$ este valoarea maximă a presiunii din spaţiul unde iese gazul din ajutaj, pentru care destinderea are loc pînă la secţiunea critică p_{cr}; creşterea presiunii de la p_{cr} la valoarea p_b are loc în porţiunea divergentă Pentru presiuni $p_c > p_b$, destinderea nu mai poate avea loc în ajuta pînă la presiunea critică. Presiunea limită $p_{\text{lim}} = p_b$ se poate calcula cu relaţia

$$p_b = p_{\text{lim}} = p_1 \left[\frac{p_{\text{cr}}}{p_1} + \left(1 - \frac{p_{\text{cr}}}{p_1} \right) \sqrt{\frac{q-1}{q}} \right] \tag{5.140}$$

în care q — este divergenţa ajutajului, $q = \dfrac{d_2 - d_{\text{cr}}}{2}$ (cu d_2 s-a notat diametrul secţiunii de ieşire, cu d_{cr} cel al secţiunii sonore (minime).

5.9. TRANSFORMAREA ENERGIEI CINETICE A UNUI GAZ PERFECT ÎN ENERGIE POTENŢIALĂ. DIFUZORUL GEOMETRIC SUBSONIC

Transformarea energiei cinetice în energie potenţială are loc într-un canal cu secţiune crescătoare denumit *difuzor*. Ecuaţia de bază a difuzorului este aceea a entalpiei frînate pentru două secţiuni oarecare.

În figura 5.31 se prezintă schematic o secţiune printr-un difuzor subsonic ($\mathrm{M}_0 < 1$), avînd ca secţiuni caracteristice aceea de intrare, unde mărimile lor sînt notate cu indicele „0", şi aceea de ieşire notată cu indicele „a".

Neglijînd lucrul mecanic de frecare, lucrul mecanic exterior şi schimbul de căldură cu pereţii, energia cinetică se transformă în difuzor în energie potenţială. Energia cinetică în secţiunea iniţială, notată cu E_{cin_0}

va fi mai mare ca aceea din secțiunea a, notată cu E_{cin_a}. Deci :

$$E_{cin_0} > E_{cin_a} ; \quad \frac{w_0^2}{2} > \frac{w_a^2}{2} ; \quad w_0 > w_a$$

Pentru ca w_a să fie mai mic ca w_0, din ecuația de continuitate, scrisă pentru cele două secțiuni caracteristice A_0 și A_a, se obține în cazul curgerii gazului perfect în regim permanent :

$$\dot{m} = A_0 w_0 \rho_0 ; \quad \dot{m} = A_a w_a \rho_a$$

sau pentru două secțiuni foarte apropiate, acceptînd ipoteza $\rho = \text{const.}$,

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = 0$$

Fig. 5.31. Difuzor.

Deci, dacă $dw/w > 0$ este obligatoriu ca $dA/A > 0$ și ca urmare $A_a > A_0$.

Considerînd că transformarea termodinamică efectuată de un gaz perfect în trecerea de la 0 la a este o adiabată izentropă, ecuația conservării energiei este (5.141) sau (5.142) :

$$h_a + \frac{w_a^2}{2} + h_0 + \frac{w_0^2}{2} \tag{5.141}$$

$$h_a - h_0 = \frac{w_0^2 - w_a^2}{2} \tag{5.142}$$

în care h_a și h_0 reprezintă entalpiile momentane ale gazului în secțiunea „a" și „0"; w_a și w_0 — vitezele medii de curgere a gazului în secțiunile respective. Ecuația (5.142), în funcție de temperatura momentană a gazului, devine

$$c_p(T_a - T_0) = \frac{w_0^2 - w_a^2}{2}, \tag{5.143}$$

deci temperatura momentană la ieșire este

$$T_a = T_0 + \frac{w_0^2 - w_a^2}{2}$$

După cum se vede din (5.142) și (5.143), difuzorul lucrează ca un compresor dinamic.

Pentru simplificarea calculelor se consideră că $w_a \simeq 0$, și ca urmare $T_a = T_{0a}$. Ca urmare din relația (5.143) se obține creșterea de presiune momen-

tană în difuzor :

$$c_p(T_{0a} - T_0) = \frac{w_0^2}{2}\bigg|_{w_a=0} ; \quad T_{0a} - T_0 = \frac{w_0^2}{2c_p}$$

$$\frac{T_{0a}}{T_0} - 1 = \frac{w_0^2}{2c_p T_0} = \frac{R}{2}\,\frac{w_0^2}{c_p R T_0} ; \quad c_p - c_v = R$$

$$\frac{T_{0a}}{T_0} - 1 = \frac{c_p - c_v}{2}\,\frac{w^2}{c_p R T_0} = \frac{k-1}{2}\,\frac{w_0^2}{kRT_0} = \frac{k-1}{2}\,\frac{w_0^2}{a_0^2} = \frac{k-1}{2} M_0^2$$

$$\frac{T_{0a}}{T_a} = 1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 ; \quad \frac{T_{0a}}{T_a} = \left(\frac{p_{0a}}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\frac{p_{0a}}{p_0} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \qquad (5.144)$$

Cu titlu de exemplu, pentru un gaz perfect cu $k = 1,4$ creşterea temperaturii şi gradul de compresie ce se realizează pentru diferite viteze de intrare a gazului în difuzor sînt date în tabelul 5.1. După cum se vede din

Tabelul 5.1.

Presiunea la ieşirea din difuzorul subsonic pentru $p_0 = 1$, $k = 1,4$, $T_0 = 293$ K

M_0	$T_{0a} \mid_{T_0 = 293K}$	$p_{0a} \mid_{p_0 = 1}$
0,2	295,34	1,029
0,5	307,65	1,18
1,0	3511,6	1,81

tabel, pentru $M_0 = 0,5$ (uzual), creşterea maximă de temperatură este ≈ 34 grd, iar gradul maxim de compresie de 1,18.

5.10. PIERDERI DE PRESIUNE ÎN DIFUZORUL GEOMETRIC SUBSONIC

Pentru determinarea pierderilor de presiune în difuzor se notează caracteristicile gazului (figura 5.32) înaintea secţiunii de intrare în difuzor cu indicele „∞", deci w_∞, ρ_∞, a_∞, p_∞, etc. iar secţiunea virtuală cu A_∞. În secţiunea de intrare a difuzorului, mărimile caracteristice se notează cu indicele „e" iar la ieşire cu „d". Gradul de compresie realizat de un difuzor depinde de raportul dintre vitezele w_∞/w_a. În figura 5.32 se prezintă situaţiile ce pot apărea din acest punct de vedere.

Pe figura 5.32 se prezintă fenomenul ce are loc înainte de intrarea în difuzor, în funcție de raportul w_∞/w_e pentru $w_\infty < a_\infty$.

Pentru toate cazurile $w_\infty < a_\infty$ (viteză subsonică) sînt posibile

$$w_\infty > w_e - \text{Fig. } 5.32\, a \rightarrow \frac{w_\infty}{w_e} > 1.$$

$$w_\infty = w_e - \text{Fig. } 5.32\, b \rightarrow \frac{w_\infty}{w_e} = 1.$$

$$w_\infty < w_e - \text{Fig. } 5.32c \rightarrow \frac{w_\infty}{w_e} < 1.$$

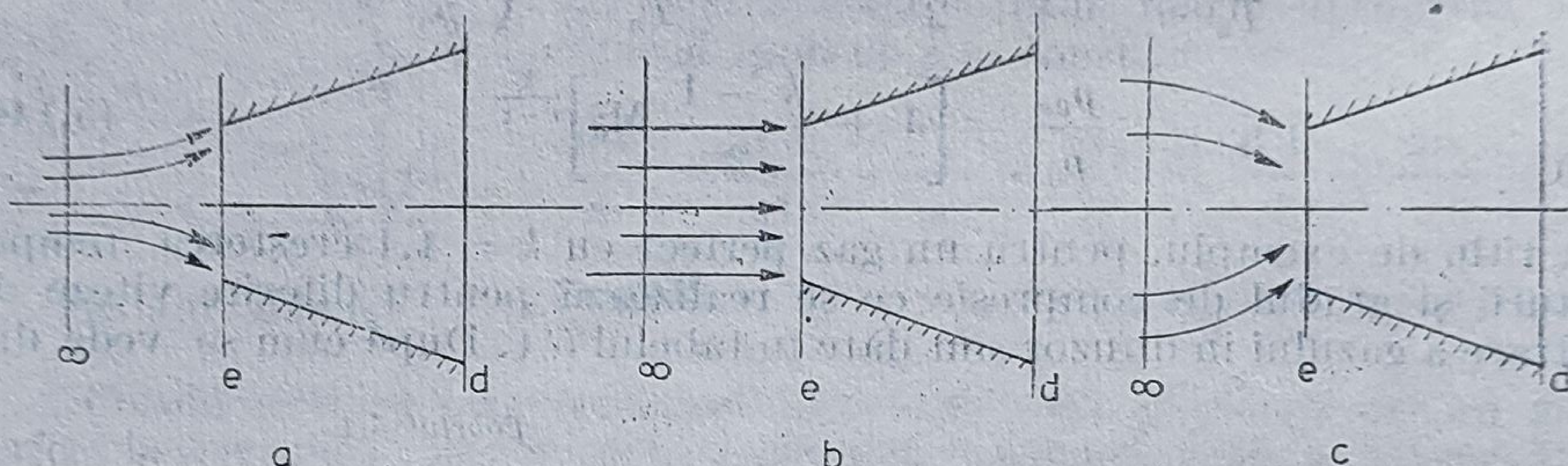


Fig. 5.32. Fenomenele gazodinamice ce au loc la intrarea gazului în difuzor.

Se consideră o viteză subsonică $w_\infty = w_e$ în spațiul liber neturburat din fața difuzorului ($w_\infty < a_\infty$) ca în figura 5.32 *b*. În acest caz gazul va pătrunde cu parametrii nemodificați prin secțiunea de intrare, respectîndu-se condiția $A_\infty = A_e$(A_∞ fiind o secțiune virtuală). Considerînd debitul ce intră în difuzor ca fiind $\dot{m}$, ecuația de continuitate pentru secțiunile „∞" și „e" este

$$A_\infty = \frac{\dot{m}}{\rho_\infty w_\infty} = A_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e w_e} \tag{5.145}$$

Dacă este respectată egalitatea (5.145) se obțin următoarele relații între parametrii caracteristici ai curgerii :

$$w_\infty = w_e;\ p_\infty = p_e$$

Dacă viteza $w_\infty < w_e$, situația liniilor de curent este reprezentată în figura 5.32 *a*. Atunci viteza de curgere în secțiunea e fiind mai mare decît în secțiunea ∞, presiunea momentană va scădea deci

$$w_\infty < w_e;\ p_\infty > p_e$$

În cazul cînd viteza $w_\infty > w_e$, ca în figura 5.32 c, la intrarea gazului în difuzor va apărea o frînare a lui, care va aduce după sine o creștere a presiunii momentane a gazului, adică

$$w_\infty > w_e;\ p_\infty < p_e$$

Avînd în vedere că utilizarea tehnică a difuzorului constă în realizarea unei creşteri a presiunii momentane a unui gaz prin frînarea lui, apare ca avantajoasă frînarea gazului chiar înainte ca el să intre în difuzorul propriu-zis.

Dar realizarea frînării pe porţiunea $\infty - e$ aduce după sine pierderi de presiune importante ca urmare a vîrtejurilor ce apar în secţiunea e. În figura 5.33 se prezintă pentru exemplificare spectrul gazodinamic al curgerii în bordul de atac al difuzorului, pentru condiţia $w_\infty > w_e$, în care se văd elementele perturbatorii ale curgerii, ce generează pierderile de presiune. Avantajele şi dezavantajele frînării libere a gazului necesită un calcul tehnico-economic de optimizare destul de complicat. Pentru curgeri subsonice ($w_\infty < a_\infty$), cercetările tehnico-experimentale dau valoarea optimă a lui w_e în funcţie de w_∞:

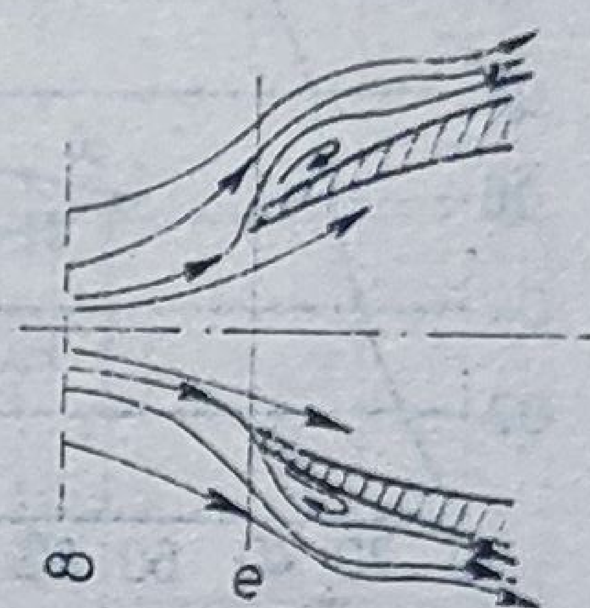


Fig. 5.33. Vîrtejuri la intrarea gazului în difuzor.

$$\left.\frac{w_e}{w_\infty}\right|_{opt} \approx \frac{1}{2} \tag{5.146}$$

Dacă procesul gazodinamic în difuzor ar avea loc fără pierderi, presiunea frînată în orice secţiune, pentru o curgere subsonică, ar avea aceeaşi valoare, adică $p_{0d} = p_{0\infty} = p_{0e}$.

În prezenţa pierderilor, desigur că $p_{0d} < p_{0\infty}$. Pierderile de presiune în difuzor se exprimă în funcţie de presiunea dinamică ce domneşte în secţiunea de ieşire, d, prin relaţia

$$\Delta p_{0d} = p_{0\infty} - p_{0d} = \xi_d \cdot \rho_{0d} \frac{w_d^2}{2} \tag{5.147}$$

în care cu ξ_d se notează coeficientul de pierderi în difuzor. Deoarece pierderile de presiune sînt relativ mici, $\Delta p_{0d}/p_{0\infty} \ll 1$, se acceptă ipoteza, pentru o curgere adiabată, că $\rho_{0d} \approx \rho_{0\infty}$. În aceste condiţii (5.147) devine

$$\Delta p_{0d} = \xi_d \rho_{0\infty} \frac{w_d^2}{2} = p_{0\infty} - p_{0d}$$

sau

$$1 - \frac{p_{0d}}{p_{0\infty}} = \zeta_d \frac{k}{k \dfrac{p_{0\infty}}{\rho_{0\infty}}} \frac{w_d^2}{2} \tag{5.148}$$

Deoarece

$$\frac{k\, p_{0\infty}}{\rho_{0\infty}} = a_0^2 = \frac{k-1}{2} a_{cr}^2$$

se obţine:

$$\sigma_d = \frac{p_{0d}}{p_{0\infty}} = 1 - \frac{k}{k+1} \xi_d \frac{w_d^2}{a_{cr\infty}}$$

$$\sigma_d = 1 - \frac{k}{k+1} \xi_d \cdot \mathrm{M}_{cr_d}^2 \tag{5.149}$$

Pierderile σ_d ale difuzorului depind de frecarea gazului de pereții difuzorului și turbioanelor ce se formează în secțiunea de intrare. Pierderile datorate vîrtejurilor în secțiunea de intrare depind de unghiul făcut de pereții difuzorului față de direcția de curgere a gazului. Pentru unghiuri α mici (figura 5.34) pierderile vor fi cu atît mai mici cu cît pentru aceleași secțiuni de intrare și ieșire, difuzorul va fi mai scurt. Cercetările experimentale au pus în evidență dependența majoră a pierderilor de presiune Δp_{0d} de pierderile la intrare. Relația practică de calculare a pierderilor la intrare este (5.150). Cu $\Delta p_{şoc}$ s-au notat pierderile de presiune datorate vîrtejurilor din zona frontală a difuzorului

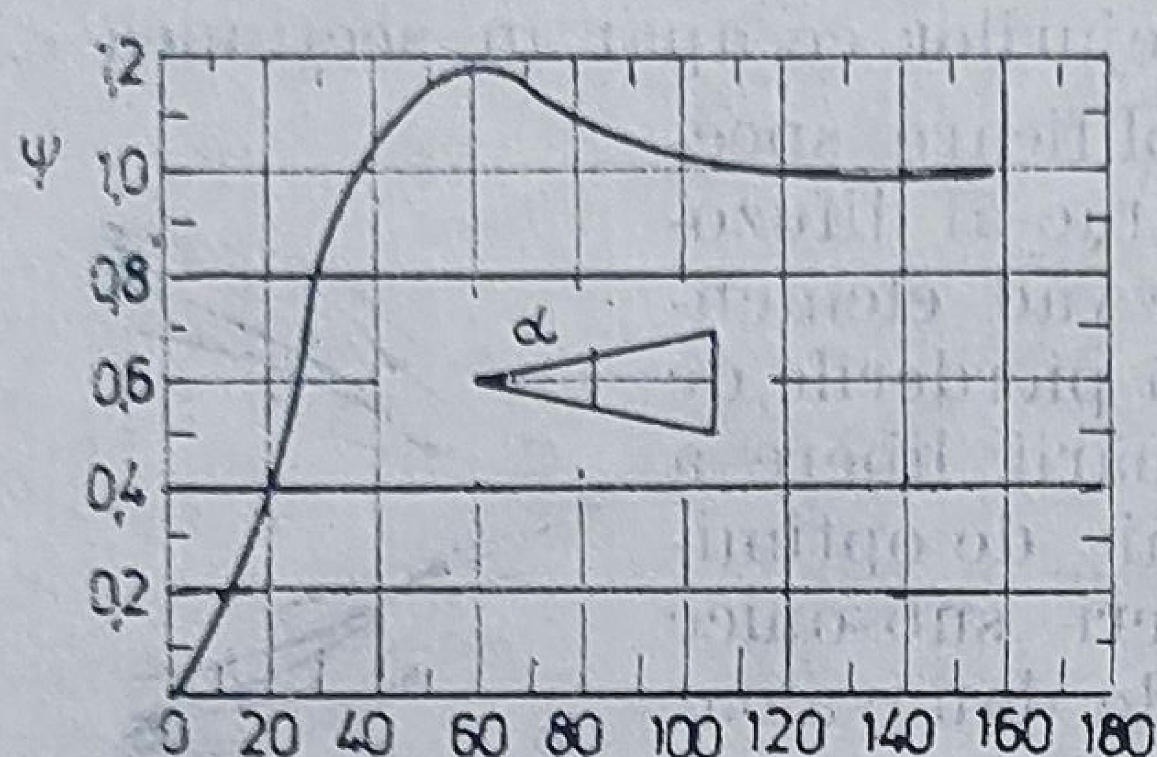


Fig. 5.34. Coeficientul de pierderi $\psi = f(\alpha)$ pentru un difuzor.

$$\Delta p_{şoc} = \psi \rho_{0\infty} \frac{(w_e - w_\infty)^2}{2} \qquad (5.150)$$

în care ψ este factorul de atenuare a șocului a cărui valoare este mai mică decît 1. În figura 5.34 se reprezintă valoarea coeficientului ψ în funcție de unghiul de evazare α al difuzorului. Valoarea maximă a lui ψ corespunde unui unghi de 60° în loc de 90°, cum ar trebui să fie, deoarece s-a constatat experimental că la această valoare apar vîrtejuri cu periodicitate temporală, ceea ce duce la pierderi suplimentare față de cazul vîrtejurilor stabile spațial și temporal cînd $\alpha = 90°$, iar $\psi = 1$. Pentru unghiurile α uzuale și anume $6° < \alpha < 12°$, valorile lui ψ variază între limitele $0,15 < \psi < 0,2$. În baza ipotezei de mai sus $\rho_{0\infty} \approx \rho_{0d} = \rho_{0e}$. Din ecuația de continuitate se obține

$$\frac{w_e}{w_d} = \frac{A_d}{A_e}$$

și ca urmare

$$\xi_d = \frac{\Delta p_{0d}}{\rho_{0\infty} \frac{w_d^2}{2}} = \psi \left(\frac{A_d}{A_e} - 1 \right)^2 \qquad (5.151)$$

Ca exemplu, pentru gazele perfecte, și pentru rapoartele uzuale $A_d/A_e \approx 3$, cu $\alpha = 8°$, se obține $\psi = 0,2$; $\xi_d = 0,8$; $\sigma_d = 1 \ldots 0,44$; $M^2_{cr_e} = 0,98 \ldots 0,94$ pentru $M_{crd} = 0,2 \ldots 0,4$.

5.11. CONSTRUCȚIA DIFUZOARELOR GEOMETRICE SUBSONICE

Difuzoarele utilizate la compresoarele centrifugale sau radiale au secțiuni rectangulare ce se evazează. Realizarea unui difuzor cu secțiune cilindrică este posibilă numai în cazul ventilatoarelor axiale și a compresoarelor axiale și compresorului dinamic al motoarelor de aviație cu turbine cu

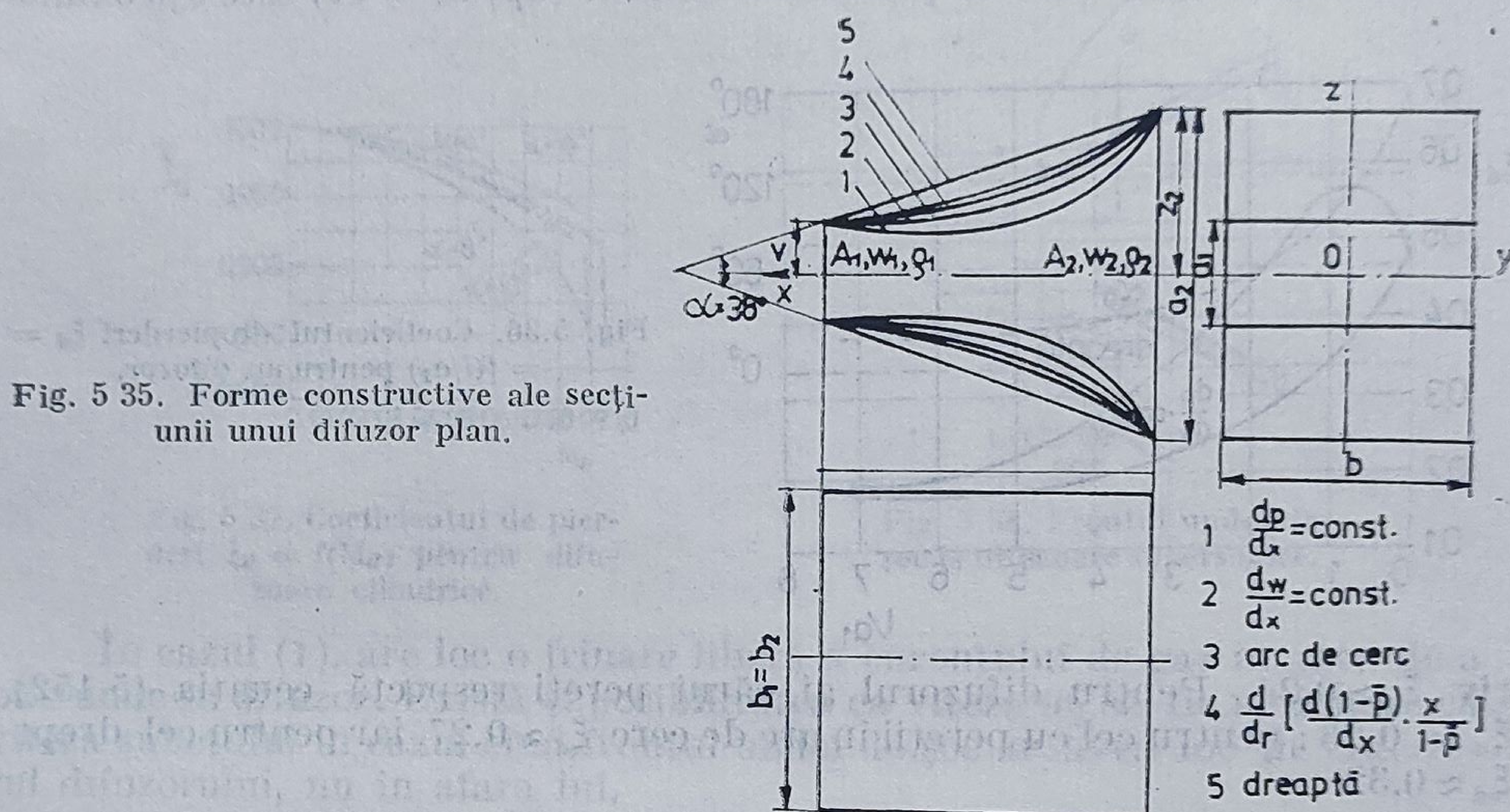


Fig. 5.35. Forme constructive ale secțiunii unui difuzor plan.

gaze sau statoreactoarelor. Difuzoarele turbocompresoarelor sînt realizate prin canalele paletelor fixe și au secțiuni rectangulare.

Un *difuzor rectangular*, denumit și *difuzor plan* este astfel construit încît să satisfacă una din condițiile de mai jos (schematic ele sînt prezentate în figura 5.35):

— difuzor cu pereți laterali a cărui generatoare este o linie dreaptă;

— difuzor cu pereți laterali a cărui generatoare este un arc de cerc;

— difuzor cu pereți laterali a cărui generatoare este astfel aleasă încît secțiunea de curgere să permită realizarea uni gradient de presiune constant în lungul direcției de curgere ($dp/dx = \text{const}$);

— difuzor cu pereții laterali a cărui generatoare este astfel aleasă încît să permită menținerea constantă a gradientului de viteză ($dw/dx = \text{const.}$);

— difuzor cu pereți laterali a cărui generatoare respectă ecuația (5.152)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d(1-\bar{p})}{dx}\,\frac{x}{1-\bar{p}}\right] = \text{const}\ [>0] \qquad (5.152)$$

în care $\bar{p}$ este presiunea adimensională dată de expresia

$$\bar{p} = \frac{p_x - p_e}{\rho_1(w_1^2/2)}$$

Unghiul de evazare α al difuzoarelor plane este în jur de $\alpha \approx 38°$.

Valoarea medie a coeficientului de pierderi ξ_d pentru difuzoarele plane cu pereți curbi ce realizează un gradient de viteză constant ($dw/dx =$ $=$ ct) și cele cu gradient de presiune constant ($dp/dx =$ ct) este aproxima-

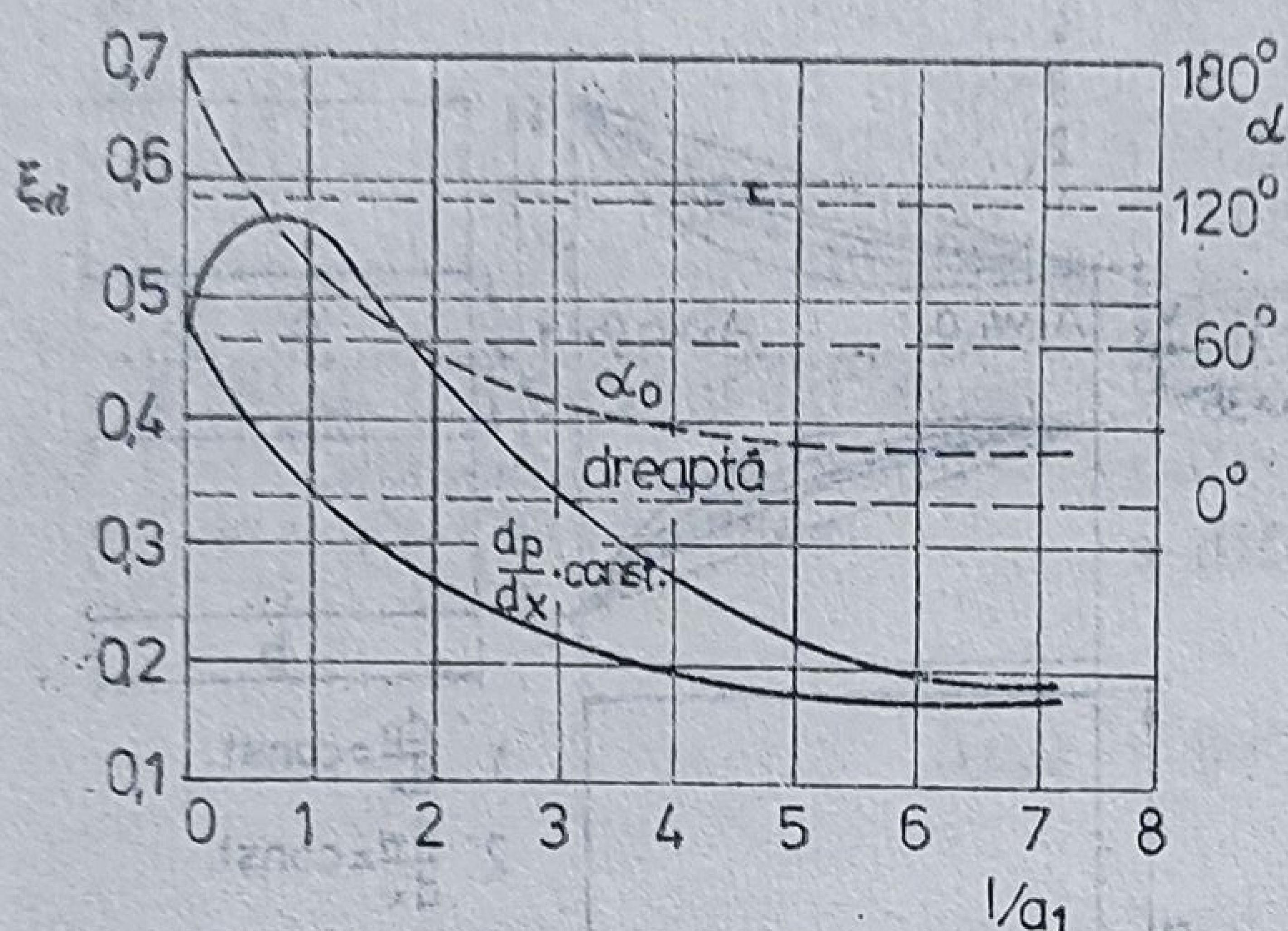


Fig. 5.36. Coeficientul de pierderi $\xi_d =$ $= f(l/a_1)$ pentru un difozor.

tiv $\xi_d \approx 0{,}24$. Pentru difuzorul ai cărui pereți respectă ecuația (5.152) $\xi_d = 0{,}26$; pentru cel cu pereții în arc de cerc $\xi_d \approx 0{,}27$, iar pentru cel drept $\xi_d \approx 0{,}32$.

În figura 5.36 sînt reprezentate valorile lui ξ_d, în funcție de lungimea relativă l/a_1 (în care l = lungimea, iar a_1 semiînălțimea secțiunii „e"), adică în funcție de unghiul de evazare α, pentru difuzoarele plane cu pereți drepți și pentru cei ce realizează un gradient de presiune $dp/dx =$ const. În figura 5.37 sînt reprezentate valorile pierderii totale de presiune ξ_d, pentru difuzoarele cilindrice, cu unghiuri de evazare $\alpha = 4°$, $6°$, $8°$, $10°$, în funcție de criteriul Mach în secțiunea de intrare „e" (M_e).

5.12. DIFUZORUL GEOMETRIC SUPERSONIC

În cazul cînd viteza gazului în zona neturburată „∞" este mai mare ca viteza sunetului ($w_\infty > a_\infty$) fenomenele ce au loc în zona $\infty - e$, sînt diferite față de cazul curgerii subsonice. Construcția difuzorului supersonic însă nu diferă de a difutorului subsonic, deoarece procesul de frînare a curentului de gaz nu ridică alte probleme decît aceea de micșorare a energiei cinetice a lui prin mărirea secțiunii de curgere.

În cazul cînd viteza $w_\infty > a_\infty$, în fața secțiunii de intrare a difuzorului se formează un front al unei unde de șoc, curb în afara difuzorului și drept în fața secțiunii de intrare, așa cum se arată schematic în figura 5.38.

În funcție de dimensiunea secțiunii de intrare A_e pentru un debit de gaz $\dot{m}$, viteza va avea valoarea w_e. Considerînd că viteza gazului după saltul de presiune (unda de șoc) are valoarea w_2, se pot ivi două cazuri și anume :

$$(1)\ w_2 > w_e$$

$$(2)\ w_2 = w_e$$

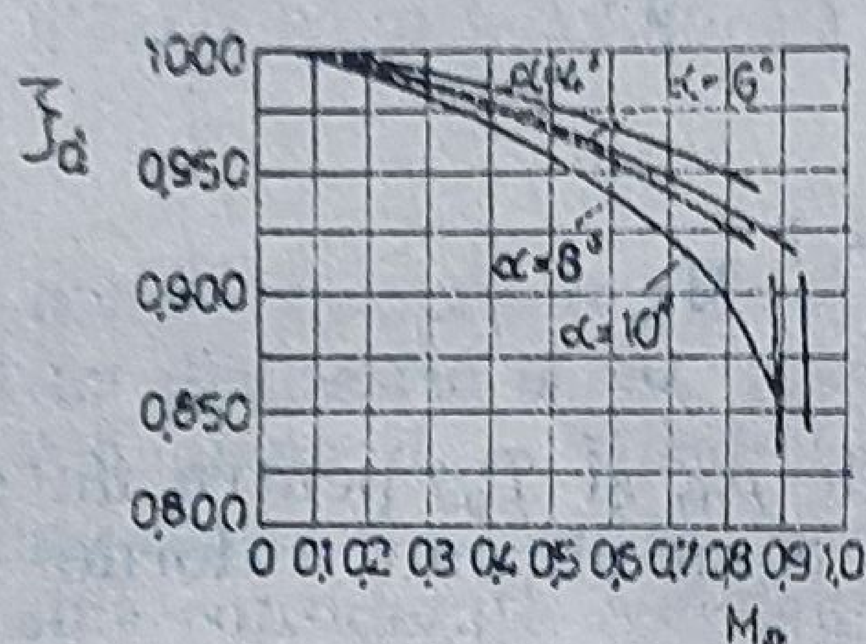


Fig. 5.37. Coeficientul de pierderi $\xi_d = f(M_d)$ pentru difuzoare cilindrice.

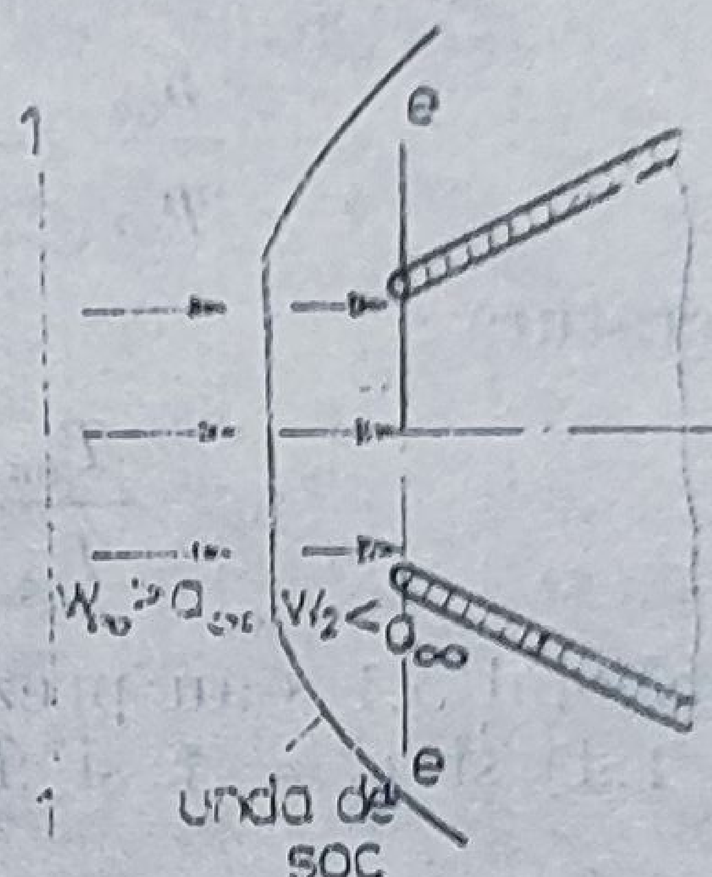


Fig. 5.38. Frontul undei de șoc la difuzoare supersonice.

În cazul (1), are loc o frînare liberă a curentului de gaz înainte de a pătrunde în difuzor. Există și posibilitatea ca viteza w_2 să fie mai mare ca viteza sunetului în cazul cînd frontul undei de șoc ar avea loc în interiorul difuzorului, nu în afara lui.

Situația $w_2 < w_e$, adică accelerarea curentului de gaz între spatele frontului undei de șoc și intrarea în difuzor nu este posibilă în practică. Notînd cu indicele „∞" parametrii gazului înainte de frontul de șoc și cu „2" după el, variația parametrilor în front este dată de relațiile cunoscute și anume :

$$\sigma_g = \frac{p_{02}}{p_{0\infty}} = M^2_{cr\infty}\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr\infty}}{1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{M^2_{cr\infty}}}\ ;\quad w_1 w_2 = a^2_{cr}\ ;\quad M_{cr\infty}M_{cr_2} = 1.$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M^2_{cr\infty}-\frac{k-1}{k+1}}{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr\infty}}\ ;\quad \frac{p_{02}}{p_{0\infty}} = \frac{M^2_{cr\infty}}{\left[1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{M_{cr\infty}}\right]^{\frac{1}{k-1}}}$$

$$p_{02} = \frac{p_2}{\left[1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_2}\right]^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{p_2}{\left[1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{M^2_{cr\infty}}\right]^{\frac{k}{k-1}}}$$

În cazul curentului supersonic, pierderile totale de presiune vor însuma atît pierderile în difuzor σ_d calculate mai sus cît și pierderile în unda de șoc notate cu σ_g. Deci pierderile în difuzorul supersonic σ_s vor fi :

$$\sigma_d = \sigma_g \sigma_s$$

S-a arătat la paragraful 5.9 că presiunea p_{0a} ce se poate realiza cu un difuzor, în funcție de criteriul M_∞ al gazului, este dată de relația

$$\frac{p_{0a}}{p_\infty} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_\infty\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

iar temperatura :

$$\frac{T_{0a}}{T_\infty} = 1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2$$

În tabelul 5.1 s-au prezentat valorile p_{0a} și T_{0a} pentru un gaz perfect ($k = 1{,}4$) și $p_0 = 1$ și $T_0 = 293$ K. S-au obținut valorile maxime

Tabelul 5.2

Presiunea la ieșirea din difuzorul supersonic pentru k = 1,4

M_∞	T_{0a} | $T_\infty = 293$K	p_{0a} | $p_\infty = 1$
2	527	7,12
3	820	41,35
4	1230	206

pentru $M_\infty = 1$ și anume: $T_{0a} = 351$ K; $p_{0a} = 1{,}81$. În tabelul 5.2 se prezintă situația pentru o curgere supersonică cu $M_\infty = 2 \ldots 4$. Se constată că se pot realiza grade de compresie mult superioare.

6. CURGEREA CU FRECARE ȘI SCHIMB DE CĂLDURĂ A GAZELOR PRIN CANALE ȘI CONDUCTE

Se consideră curgerea unui gaz în direcție axială x printr-o conductă circulară cu diametrul d sau printr-un canal de o secțiune oarecare cu diametrul echivalent d_{ech}. Mărimile parametrilor gazului pe direcțiile y în planul unei secțiuni oarecare de curgere, în baza ipotezei curgerii unidirecționale, sînt considerate constante, iar componenta vitezei de curgere w_y egală cu zero. În baza ipotezei curgerii în regim permanent se admite:

$$\frac{dw_x}{d\tau} = 0 \tag{6.1}$$

Procesul de curgere a gazelor prin conductă și canale este studiat la stare statistică. Deci se consideră că viteza medie de curgere are aceeași valoare în întreaga secțiune. Această ipoteză exclude existența stratului limită dinamic.

Ecuațiile Navier-Stockes pentru condiția (6.1) capătă forma simplă.

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right] = 0 \\ F_y &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\ ; \quad F_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Ultimele două ecuații exprimă condițiile de echilibru pentru starea de repaos. Presiunea frînată într-o secțiune oarecare va fi dată de relația

$$p_0 = p + \rho\frac{w^2}{2} \tag{6.3}$$

Atunci (6.2) poate fi scrisă sub forma (6.4):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left[\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right] \tag{6.4}$$

Cum partea dreaptă a ecuației (6.4) depinde numai de y și z, iar presiunea statică (momentană) nu depinde decît de x, ea se va verifica numai atunci cînd este îndeplinită condiția

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.} \tag{6.5}$$

Deci în cazul curgerii unidirecționale, presiunea variază linear în lungul liniilor de curent. Curgerea gazelor prin elementele mașinilor termice are loc forțat, sub acțiunea diferenței de presiune amonte-aval a secțiunii considerate, deci forțele masice F_x sînt neglijabile. Viteza medie w este definită prin expresia

$$w = \frac{1}{A}\int_A w_x . \mathrm{d}A = \frac{\dot{V}}{A} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{6.6}$$

în care $\dot{V}$ este debitul volumic al gazului. Fenomenele interioare ale unei curgeri forțate se pot determina dacă se cunoaște viteza medie w și suprapresiunea asigurată prin energia de pompare în funcție de cota x a secțiunii A.

6.1. CURGEREA ADIABAT-NEIZENTROPĂ (CU FRECARE) A GAZULUI PERFECT

Se consideră curgerea adiabată cu frecare a unui gaz perfect printr-o conductă circulară, sau un canal rectangular de secțiune constantă (fără schimb de căldură gaz-perete).

Ecuația de continuitate pentru regimul permanent de curgere ($\dot{m}/\tau$ = = Const.) aplicată canalului sau conductei de secțiune constantă (A = Const) este (6.7), iar ecuația de stare a gazului perfect (6.8) :

$$\rho w = \text{const}; \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{\mathrm{d}w}{w} \tag{6.7}$$

$$\mathrm{d}p = R(\rho \cdot \mathrm{d}T + T \cdot \mathrm{d}\rho) \tag{6.8}$$

Din (6.7) și (6.8) se obține

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = R \cdot \mathrm{d}T - RT\frac{\mathrm{d}w}{w} \tag{6.9}$$

Ecuația Bernoulli exprimată diferențial are forma

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + w^2\frac{\mathrm{d}w}{w} + \mathrm{d}l_{fr} = 0 \tag{6.10}$$

Relaţia (6.9) capătă forma (6.11) dacă se ţine seama că viteza sunetului este dată de relaţia $a = \sqrt{k\,R\,T}$ (în care T este temperatura gazului în secţiunea considerată):

$$R\,\mathrm{d}T + \left(w^2 - \frac{a^2}{k}\right)\frac{\mathrm{d}w}{w} + \mathrm{d}l_{fr} = 0 \qquad (6.11)$$

Deoarece procesul de curgere este adiabat, temperatura frînată a gazului este dată de relaţia

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p}$$

sau diferenţial

$$\mathrm{d}T_0 = \mathrm{d}T + \frac{w^2{}_p}{c_p}\frac{\mathrm{d}w}{w} = 0 \qquad (6.12)$$

Deoarece

$$R\mathrm{d}T = -\frac{k-1}{k}w^2\frac{\mathrm{d}w}{w} \qquad (6.13)$$

Înlocuind (6.13) în (6.11) se obţine relaţia de legătură dintre lucrul mecanic de frecare (întotdeauna pozitiv) şi variaţia vitezei în lungul conductei:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{k}{a^2}\mathrm{d}l_{fr} \qquad (6.14)$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{k}{a^2}\frac{\mathrm{d}l_{fr}}{\mathrm{M}^2 - 1} \qquad (6.15)$$

Lucrul mecanic de frecare fiind întotdeauna pozitiv, se constată că influenţa lui asupra vitezei de curgere este diametral opusă pentru o curgere supersonică ($\mathrm{M} < 1$) faţă de aceea subsonică ($\mathrm{M} > 1$). Pentru curgerile subsonice ($\mathrm{M} < 1$), lucrul mecanic de frecare aduce după sine o creştere a vitezei aşa cum se vede din 6.15 şi din figura 6.1, iar pentru cele supersonice ($\mathrm{M} > 1$) o scădere a ei. Deci trecerea de la viteza subsonică la cea supersonică numai pe baza lucrului mecanic de frecare nu este posibilă.

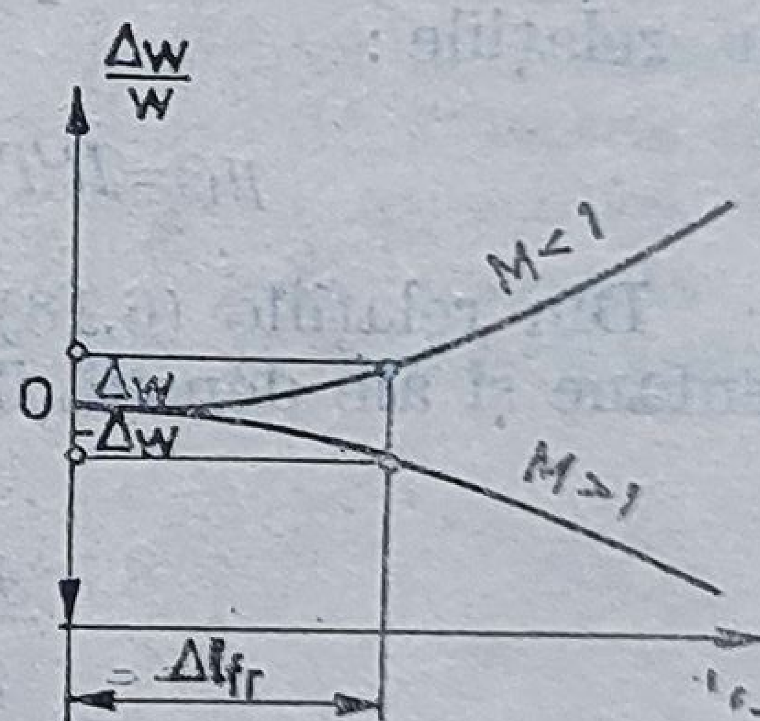


Fig. 6.1. Influenţa lucrului mecanic de frecare asupra curgerilor subsonice şi supersonice.

Temperatura frînată a curentului în două secţiuni oarecari *1* şi *2* ale canalului, va fi constantă dacă schimbul de căldură cu mediul exterior este nul iar $l_{fr} = 0$:

$$T_{01} = T_{02} = \text{Const.}\Big|_{q=0;\ l_{fr}=0} \qquad (6.16)$$

Raportul dintre temperatura momentană şi cea frînată într-o secţiune oarecare este dat de relaţia

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}^2_{cr}$$

Deci temperaturile și presiunile momentane în secțiunile *1* și *2* în funcție de M_{cr} și p_{01}; p_{02}; T_{01}; T_{02}; vor fi date de relațiile (6.17) și (6.18):

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_1}{T_{01}} &= 1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_1}^2; \quad \frac{T_2}{T_{02}} = 1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2 \\ \frac{p_1}{p_{01}} &= \left[1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_1}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{p_2}{p_{02}} = \left[1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Ca urmare, raportul dintre temperaturile momentane în cele două secțiuni, pentru $T_{01} = T_{02}$ este

$$\frac{T_2}{T_1} = \left.\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2}{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_1}^2}\right|_{T_{01}=T_{02}} \tag{6.18}$$

Viteza critică are aceeași valoare în secțiunile 1 și 2 pentru $T_{01} = T_{02}$ și ca urmare se poate scrie raportul

$$\frac{M_{cr_1}}{M_{cr_2}} = \frac{\frac{w_1}{a_{cr}}}{\frac{w_2}{a_{cr}}} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{6.19}$$

Legătura dintre presiunile momentane în secțiunile *1* și *2* se obține din relațiile:

$$p_1 = RT_1\rho_1; \quad p_2 = RT_2\rho_2; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Din relațiile (6.18) și (6.19) se obțin rapoartele temperaturilor momentane și ale densităților și, ca urmare

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_{cr_1}}{M_{cr_2}} \frac{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2}{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_1}^2} \tag{6.20}$$

Din (6.17) se obține legătura dintre presiunile frînate și densitățile gazului în funcție de criteriul Mach critic în cele două secțiuni:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_1}^2}{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{6.21}$$

sau:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{M_{cr_1}}{M_{cr_2}}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_1}^2}{1-\frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{6.22}$$

Lucrul mecanic de frecare, accelerînd curgerea subsonică și frînînd pe cea supersonică, criteriul M_{cr_2} va crește în cazul curgerii subsonice și va scădea în cazul celei supersonice. Ca urmare, presiunea statică, temperatura momentană și densitatea vor fi influențate de existența frecării în mod diferit în curgerea subsonică de acea supersonică.

Din relația (6.21) se observă că în cazul cînd curgerea atinge într-o secțiune oarecare $M_{cr_2} = 1$, presiunea p_{02} are valoarea minimă. Acest lucru se demonstrează diferențiind relația (6.21) în raport cu M_{cr_2}. Înlocuind apoi $M_{cr_2} = 1$ pentru prima derivată se obține

$$\frac{d\left(\dfrac{p_{02}}{p_{01}}\right)\Bigg|_{M_{cr2}=1}}{dM_{cr_2}} = 0;$$

a doua derivată este mai mare ca zero.

Dacă presiunea p_{02} are valoarea minimă, creșterea de entropie a gazului fiind dată de relația:

$$\Delta s = \int_1^2 \frac{dl_{fr}}{T} = R \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \tag{6.23}$$

înseamnă că Δs are valoarea maximă.

Faptul că entropia atinge valoarea maximă la viteză sonică duce la apariția așa-numitei „crize a curgerii" pentru o conductă sau canal de secțiune constantă. Această „criză a curgerii" face imposibilă trecerea lină a unei curgeri supersonice prin viteza sunetului la curgerea subsonică sub influența frecării, deoarece în cazul unei astfel de treceri entropia ar trebui să scadă, ceea ce ar contrazice principiul al doilea al termodinamicii.

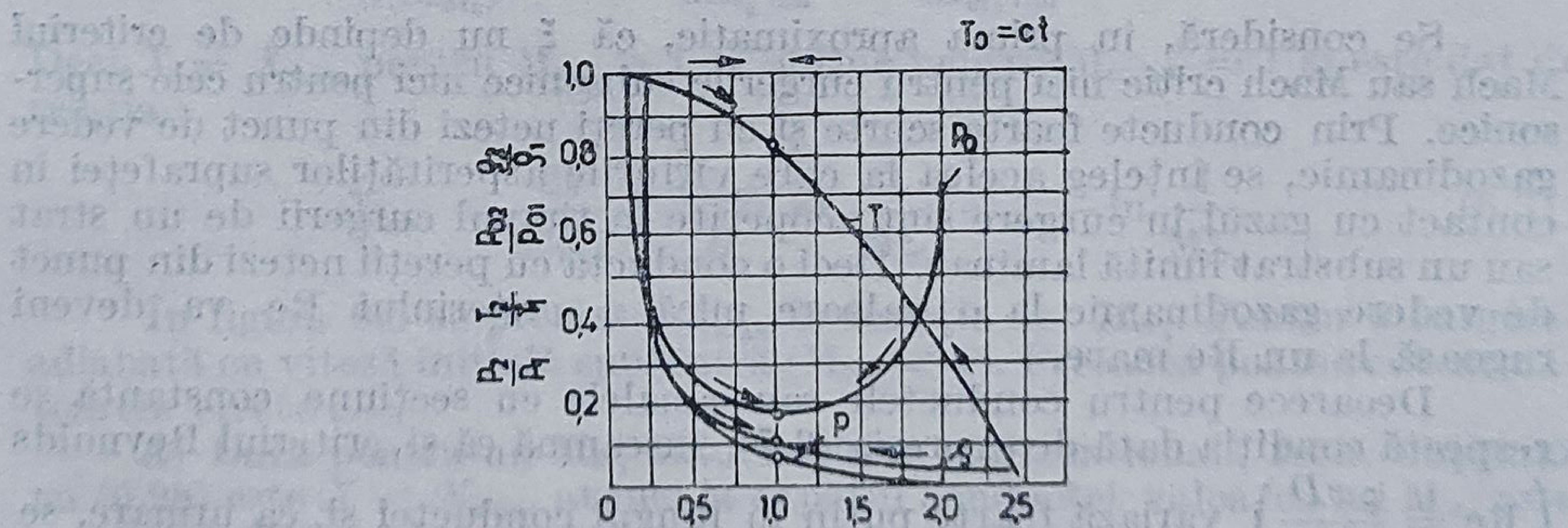


Fig. 6.2. Influența frecării asupra temperaturii și densității gazului.

Pentru exemplificare, în figura 6.2 se prezintă influența frecării asupra temperaturii și densității în funcție de M_{cr_2} pentru un gaz perfect cu $k = 1,4$ ce curge adiabat printr-o conductă cilindrică (izolată termic). Săgețile de pe curbe, indică direcția variației lui M_{cr_2} sub influența frecării.

6.2. CURGEREA ADIABATĂ CU FRECARE A GAZULUI PERFECT PRIN CONDUCTE SAU CANALE FOARTE SCURTE

Se consideră curgerea cu frecare a unui gaz perfect printr-o conductă sau canal foarte scurt şi de secţiune constantă. Se notează cu : ξ = coeficientul de frecare a gazului de pereţii canalului : D — diametrul sau diametrul echivalent al canalului ; w — viteza medie de curgere. Lucrul mecanic al frecării este

$$\mathrm{d}l_{fr} = \xi \frac{w^2}{2} \frac{\mathrm{d}x}{D} \tag{6.24}$$

Pentru un canal cu secţiune constantă există o corespondenţă directă între variaţia vitezei de curgere adiabate a gazului şi variaţia criteriului $\mathrm{M_{cr}}$ avînd în vedere constanţa vitezei critice a_{cr}. Deci :

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{dM_{cr}}}{\mathrm{M_{cr}}}$$

Ţinînd seama de (6.24) relaţia (6.14) capătă forma

$$(\mathrm{M}-1)\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\xi k \frac{\mathrm{M}^2}{2} \frac{\mathrm{d}x}{D} \tag{6.25}$$

sau

$$\left(\frac{1}{\mathrm{M_{cr}^2}} - 1\right)\frac{\mathrm{dM_{cr}}}{\mathrm{M_{cr}}} = \frac{k}{k-1} \xi \frac{\mathrm{d}x}{D} \tag{6.26}$$

Se consideră, în prima aproximaţie, că ξ nu depinde de criteriul Mach sau Mach critic nici pentru curgerile subsonice nici pentru cele supersonice. Prin conducte foarte scurte şi cu pereţi netezi din punct de vedere gazodinamic, se înţeleg acelea la care vîrfurile asperităţilor suprafeţei în contact cu gazul în curgere sînt acoperite în timpul curgerii de un strat sau un substrat limită laminar. Deci o conductă cu pereţii netezi din punct de vedere gazodinamic la o valoare mică a criteriului Re va deveni rugoasă la un Re mare.

Deoarece pentru conductele sau canalele cu secţiune constantă se respectă condiţia dată de expresia (6.7), înseamnă că şi criteriul Reynolds $\left(\mathrm{Re} = \frac{\rho w D}{\mu}\right)$ variază foarte puţin în lungul conductei şi, ca urmare, se poate considera Re = Const. Deci se consideră că şi $\xi = f(\mathrm{Re})$ este constant în lungul conductei.

Se studiază, pentru exemplificare, influenţa frecării asupra curgerii adiabate a unui gaz cu o viteză iniţială supersonică, printr-o conductă scurtă de lungime x şi diametrul D (canale de turbomaşini, tunele experimentale etc.).

Atunci relaţia (6.26) pentru $M_{cr_1} > 1$ integrată între secţiunile *1* şi *2* devine

$$\frac{1}{M_{cr_1}^2} - \frac{1}{M_{cr_2}^2} - \ln\frac{M_{cr_2}^2}{M_{cr_1}^2} = \frac{2k}{k+1}\,\xi\,\frac{x}{D}, \tag{6.27}$$

în care M_{cr_1} corespunde la $x_1 = 0$ iar M_{cr_2} la $x = x_2$.

Relaţia (6.27) permite determinarea lui M_{cr_2}, respectiv a vitezei w_2, în orice secţiune x a conductei dacă se cunosc valorile lui M_{cr_1}, ξ, D şi k. Aşa cum s-a arătat mai sus, limita lui M_{cr_2} pentru curgerile subsonice ($M_{cr_1} < 1$) este $M_{cr_2 lim} = 1$, iar pentru cele supersonice ($M_{cr_1} > 1$) este tot $M_{cr_2 lim} = 1$.

Deci pentru o anumită valoare a $M_{cr_1} > 1$ a curgerii în secţiunea iniţială a conductei, lungimea x a ei nu poate fi mai mare decît x_{max} care corespunde lui $M_{cr_2} = 1$ deci practic $x < x_{max}$.

Notînd cu X lungimea adimensională a conductei, se obţine

$$X = \frac{2\cdot k}{k+1}\,\xi\,\frac{x}{D} = \text{const}\times\frac{x}{D} = \frac{1}{M_{cr_1}^2} - \frac{1}{M_{cr_2}^2} - \ln\frac{M_{cr_2}^2}{M_{cr_1}^2} \tag{6.28}$$

Derivata a întîia a lui X din relaţia (6.28) în raport cu M_{cr_2}, pentru $M_{cr_1} =$ $=$ const este

$$\frac{dX}{d(M_{cr_2}^2)} = \frac{1}{M_{cr_2\,lim}^4} - \frac{1}{M_{cr_2\,lim}^2} = 0 \tag{6.29}$$

iar derivata a doua

$$\frac{d^2X}{d(M_{cr_2}^2)^2} = -\frac{1}{M_{cr_2\,lim}^6} + \frac{1}{M_{cr_2\,lim}^4} = -1 \tag{6.30}$$

Deci $X = X_{max}$ pentru $M_{cr_1} > 1$ se obţine pentru $M_{cr_2 lim} = 1$ şi este dat de relaţia

$$X_{max} = \frac{2k}{k+1}\,\xi\,\frac{x_{max}}{D} = \frac{1}{M_{cr_2}^2} - 1 - \ln\frac{1}{M_{cr_1}^2} \tag{6.31}$$

În figura 6.3 se prezintă X_{max} în funcţie de M_{cr_1}. Pentru o curgere adiabată cu viteză iniţială subsonică ($M_{cr_1} < 1$). Frecarea poate avea următoarele efecte :

a) Dacă pentru un M_{cr_1} dat, lungimea adimensională reală obţinută cu (6.28) este $X < X_{max}$, atunci la capătul conductei valoarea lui M_{cr_2} este mai mică decît unitatea, deci curgerea rămîne subsonică ;

b) Dacă pentru un M_{cr_1} dat se obţine cu formula (6.28) o valoare $X = X_{max}$, atunci la capătul conductei $M_{cr_2} = 1$ (X_{max} se calculează cu rel. (6.31).

c) Dacă pentru un M_{cr_1} dat se obţine cu (6.28) o valoare $X > X_{max}$ (dată de rel. 6.31) înseamnă că în secţiunea iniţială curgerea nu poate să aibă loc cu M_{cr_1}.

Atunci relația (6.26) pentru $M_{cr_1} > 1$ integrată între secțiunile *1* și *2* devine

$$\frac{1}{M_{cr_1}^2} - \frac{1}{M_{cr_2}^2} - \ln\frac{M_{cr_2}^2}{M_{cr_1}^2} = \frac{2k}{k+1}\,\xi\,\frac{x}{D}, \tag{6.27}$$

în care M_{cr_1} corespunde la $x_1 = 0$ iar M_{cr_2} la $x = x_2$.

Relația (6.27) permite determinarea lui M_{cr_2}, respectiv a vitezei w_2, în orice secțiune x a conductei dacă se cunosc valorile lui M_{cr_1}, ξ, D și k. Așa cum s-a arătat mai sus, limita lui M_{cr_2} pentru curgerile subsonice ($M_{cr_2} < 1$) este $M_{cr2lim} = 1$, iar pentru cele supersonice ($M_{cr_1} > 1$) este tot $M_{cr2lim} = 1$.

Deci pentru o anumită valoare a $M_{cr_1} > 1$ a curgerii în secțiunea inițială a conductei, lungimea x a ei nu poate fi mai mare decît x_{max} care corespunde lui $M_{cr_2} = 1$ deci practic $x < x_{max}$.

Notînd cu X lungimea adimensională a conductei, se obține

$$X = \frac{2\cdot k}{k+1}\,\xi\,\frac{x}{D} = \text{const}\times\frac{x}{D} = \frac{1}{M_{cr_1}^2} - \frac{1}{M_{cr_2}^2} - \ln\frac{M_{cr_2}^2}{M_{cr_1}^2} \tag{6.28}$$

Derivata a întîia a lui X din relația (6.28) în raport cu M_{cr_2}, pentru $M_{cr_1} =$ = const este

$$\frac{dX}{d(M_{cr_2}^2)} = \frac{1}{M_{cr_2\,lim}^4} - \frac{1}{M_{cr_2\,lim}^2} = 0 \tag{6.29}$$

iar derivata a doua

$$\frac{d^2X}{d(M_{cr_2}^2)^2} = -\frac{1}{M_{cr_2\,lim}^6} + \frac{1}{M_{cr_2\,lim}^4} = -1 \tag{6.30}$$

Deci $X = X_{max}$ pentru $M_{cr_1} > 1$ se obține pentru $M_{cr_2 lim} = 1$ și este dat de relația

$$X_{max} = \frac{2k}{k+1}\,\xi\,\frac{x_{max}}{D} = \frac{1}{M_{cr_2}^2} - 1 - \ln\frac{1}{M_{cr_1}^2} \tag{6.31}$$

În figura 6.3 se prezintă X_{max} în funcție de M_{cr_1}. Pentru o curgere adiabată cu viteză inițială subsonică ($M_{cr_1} < 1$). Frecarea poate avea următoarele efecte :

a) Dacă pentru un M_{cr_1} dat, lungimea adimensională reală obținută cu (6.28) este $X < X_{max}$, atunci la capătul conductei valoarea lui M_{cr_2} este mai mică decît unitatea, deci curgerea rămîne subsonică ;

b) Dacă pentru un M_{cr_1} dat se obține cu formula (6.28) o valoare $X = X_{max}$, atunci la capătul conductei $M_{cr_2} = 1$ (X_{max} se calculează cu rel. (6.31).

c) Dacă pentru un M_{cr_1} dat se obține cu (6.28) o valoare $X > X_{max}$ (dată de rel. 6.31) înseamnă că în secțiunea inițială curgerea nu poate să aibă loc cu M_{cr_1}.

Situația ar fi posibilă numai dacă valoarea lui M_{cr_1} ar deveni $M_{cr_1\,max}$ dată de relația (6.32), din care se constată că dacă $M_{cr_1\,max} = 1$ și M_{cr_2} ar avea valoarea tot egală cu unitatea.

Deci :

$$X = X_{max} = \frac{1}{M^2_{cr_1 max}} - 1 - \ln\frac{1}{M^2_{cr_1 max}} \quad (6.32)$$

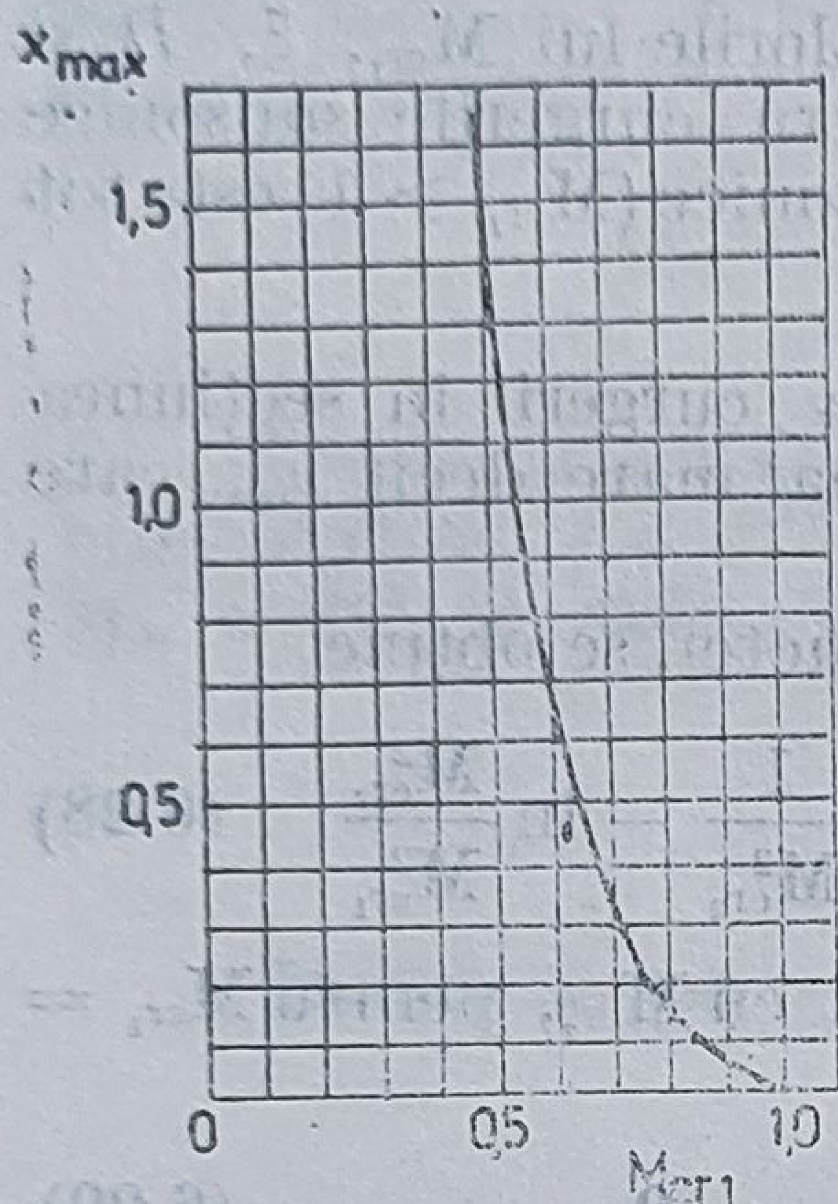


Fig. 6.3. $X_{max} = f(M_{cr_1})$ pentru gaze perfecte.

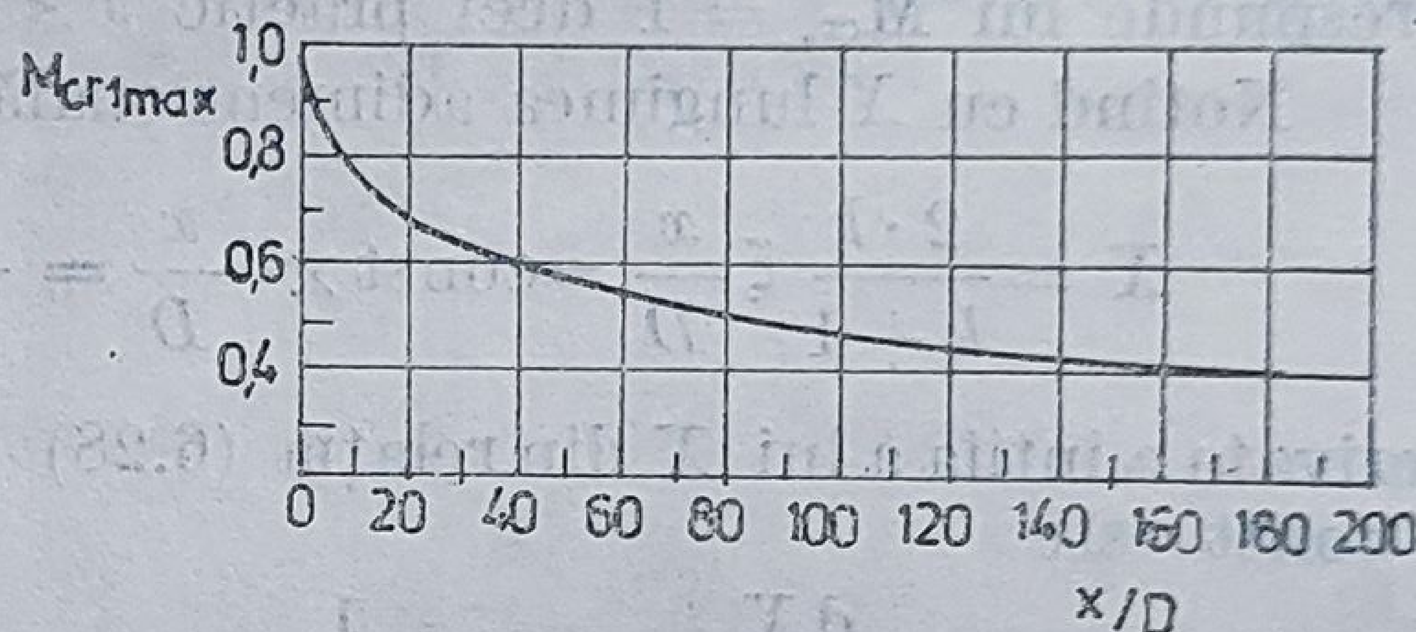


Fig. 6.4. Valoarea lui $M_{cr_2 max} = f(x/D)$ pentru o curgere subsonică printr-o conductă.

În figura 6.4 se reprezintă, ca exemplu, valoarea lui $M_{cr_1 max}$ în funcție de x/D pentru un coeficient de frecare $\xi = 0{,}015$ și exponentul adiabat al gazului perfect $k = 1,\ 4$, în cazul unei curgeri subsonice.

În cazul unei curgeri cu o viteză inițială supersonică ($M_{cr_1} > 1$), pentru care calculele se fac cu relația (6.27) și (6.28), sînt posibile următoarele situații :

a) Dacă pentru o viteză inițială M_{cr_1} dată și o lungime de conductă x cu diametrul D, se obține $X < X_{max}$ atunci în secțiunea finală se obține $M_{cr_2} > 1$.

b) Dacă se obține $X = X_{max}$, atunci $M_{cr_2} = 1$.

c) Dacă se obține $X > X_{max}$ cu formula (6.28) (X_{max} dat de relația 6.31) atunci într-o secțiune oarecare a conductei va apărea un salt de presiune (o undă de șoc), după care curgerea va deveni subsonică accelerată, fenomenul repetîndu-se mereu, deci curgerea va deveni pulsatorie. Poziția saltului de presiune se stabilește de la sine, astfel încît în secțiunea de ieșire viteza să fie egală cu a sunetului.

Pentru determinarea poziției saltului de presiune ce apare în conductă în cazul (c), pentru care $X > X_{max}$ se consideră cunoscute : $M_{cr_1} > 1$; lungimea conductei sau canalului x ; diametrul sau diametrul echivalent D ; coeficientul de frecare ξ ; exponentul adiabat k al gazului. Cu relația

(6.28) se determină lungimea adimensională X a conductei, iar cu (6.31) lungimea adimensională maximă X_{max}.

Distanța de la capătul canalului pînă la saltul de presiune se notează cu x_{st}. Se consideră, pentru simplificare, că saltul este plan și ca urmare există relația (6.33) dintre M_{cr} înainte și după unda de șoc:

$$M_{cr1,1} \cdot M_{cr1,2} = 1 \qquad (6.33)$$

Valoarea lui $M_{cr_{1,1}}$ (înainte de salt) se determină cu (6.27), care pentru cazul de față, are forma

$$\frac{1}{M^2_{cr_1}} - \frac{1}{M^2_{cr1,1}} - \ln \frac{M^2_{cr1,1}}{M^2_{cr_1}} = \frac{2k}{k+1}\,\xi\,\frac{x_{st}}{D} = X_{st} \qquad (6.34)$$

Valoarea lui $M_{cr1,2}$ după saltul de presiune, unde viteza este subsonică accelerată, este legată de lungimea de conductă respectivă, adică $X - X_{st}$. La capătul de ieșire al conductei, viteza va trebui să fie egală cu viteza sunetului, deci $M_{cr_2} = 1$. Ca urmare, $M_{cr1,2}$ se determină cu relația (6.31), care pentru această situație, capătă forma

$$\frac{1}{M^2_{cr1,2}} - 1 - \ln \frac{1}{M^2_{cr1(2}} = \frac{2k}{k+1}\,\xi\,\frac{x - x_{st}}{D} = X - X_{st} \qquad (6.35)$$

Ținînd seama de (6.33), se obține din (6.35) relația

$$M^2_{cr1,1} - 1 - \ln M^2_{cr1,1} = X - X_{st} \qquad (6.36)$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (6.35) și (6.36) în funcție de cele două necunoscute (X_{st}, $M_{cr1,1}$) se obține ecuația (6.37) care permite determinarea criteriului $M_{cr1,1}$ (din fața saltului de presiune):

$$M^2_{cr1,1} + \frac{1}{M^2_{cr_1}} - 1 - \frac{1}{M^2_{cr1,1}} - \ln \frac{M^2_{cr1,1}}{M^2_{cr_1}} = X \qquad (6.37)$$

Odată determinată valoarea lui $M_{cr1,1}$, se obține poziția X_{st} cu ajutorul relației (6.36).

Ca metodă grafică, se poate folosi diagrama din figura 6.5 întocmită pentru $k = 1{,}4$ pe care curba *1* corespunde expresiei

$$a = \frac{1}{M^2_{cr}} + \ln M^2_{cr} \qquad (6.38)$$

Curba *2* corespunde expresiei (6.36) iar curba 3 expresiei (6.31). Pentru a se explica modul de folosire a diagramei se recurge la un exemplu concret. Se consideră că $X = \frac{x}{D} = 0{,}60$. Pentru $X = 0{,}60$ cu ajutorul curbei 3 se obține valoarea lui M_{cr_1}, pentru care la ieșirea din conductă $M_{cr_2} = 1$. Se constată că $M_{cr_1 min} = 1{,}95$.

Se consideră că în secțiunea inițială a conductei viteza trebuie să fie ceva mai mare, deci trebuie să aibă o valoare mai ridicată de 1,95 și se ia arbitrar $M_{cr_1} = 2,2$. Printr-un calcul analitic, din relația (6.27) se obține M_{cr_2}

$$\frac{1}{M_{cr_2}^2} + \ln M_{cr_2}^2 = \frac{1}{M_{cr_1}^2} + \ln M_{cr_1}^2 - X$$

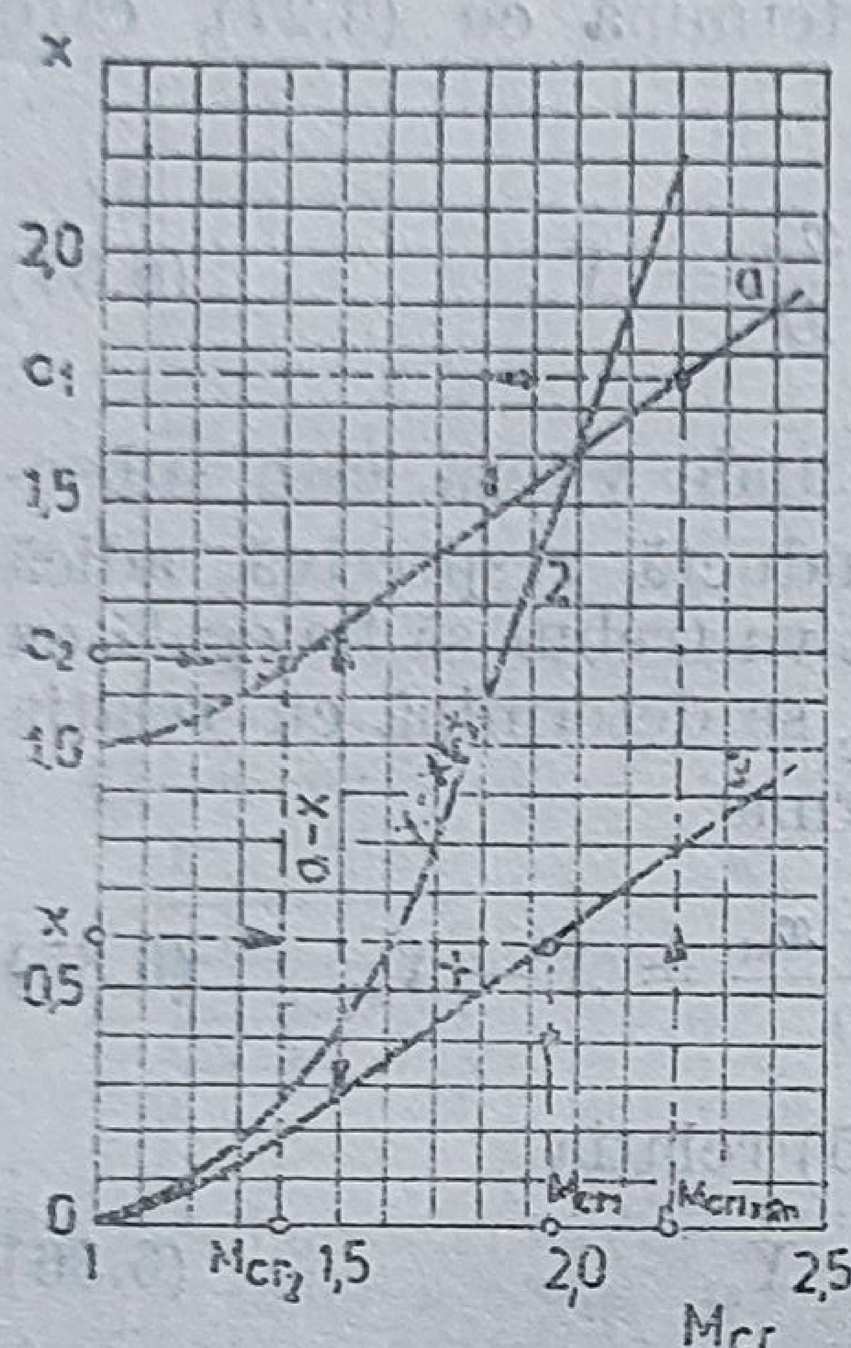


Fig. 6.5. Diagramă pentru determinarea lungimii X_{st} pentru $k = 1,4$.

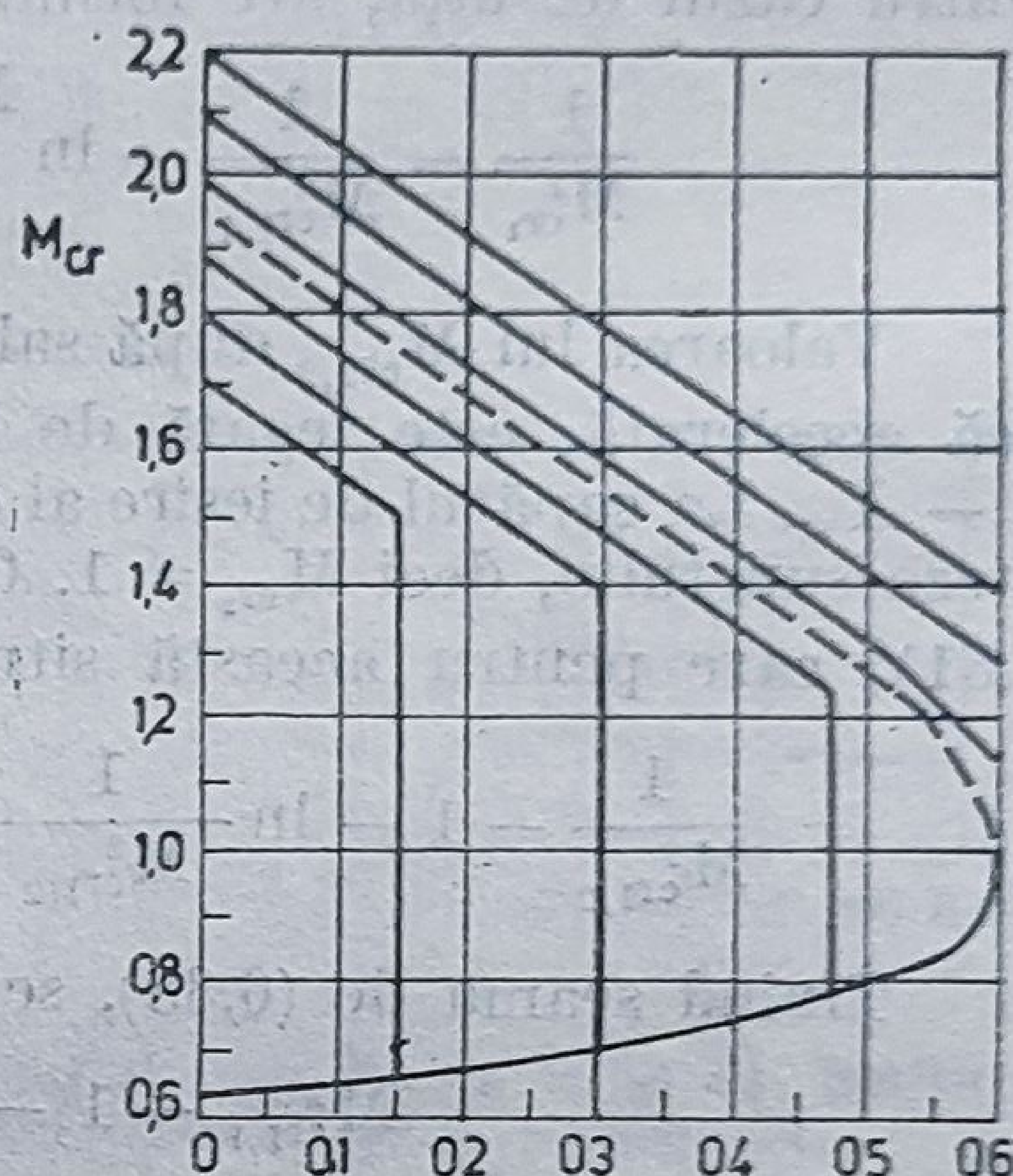


Fig. 6.6. $M_{cr} = f(X)$ pentru diferite valori M_{cr_1}.

Și apoi cu relația (6.38) se calculează valoarea lui a_2 în secțiunea de ieșire și a_1 în aceea de intrare. Între a_1 și a_2 există legătura

$$a_2 = a_1 - X$$

Grafic, cu ajutorul curbei *1*, din figura 6.5, pentru $M_{cr_1} = 2,2$ ales, se obține $a_1 = 1,78$, de unde :

$$a_2 = 1,78 - 0,60 = 1,18.$$

Pentru $a_2 = 1,18$, cu ajutorul curbei *1* se obține $M_{cr_2} = 1,5$.

Se consideră acum cazul cînd s-ar obține $X > X_{max}$. În acest caz pentru datele de mai sus, se consideră $M_{cr_1} < 1,95$ și anume se alege $M_{cr_1} = 1,8$. Folosind aceeași metodă ca în exemplul de mai sus, cu ajutorul curbei *3* se obține

$$X_{st} = X_{max} = 0,48\,; \quad \text{deci} \quad X_{max} < X$$

Ca urmare, pe conductă va apărea o undă de șoc la o distanță $X - X_{st}$, după care se va stabili o curgere subsonică. Pentru determinara distanței

la care apare saltul de presiune se folosește relația (6.34) ținînd seamă de (6.38). Considerînd că distanța are valoarea

$$X_{st} = a_1 - a' \tag{6.39}$$

Deoarece $X = (X - X_{st}) - X_{st}$

se obține $a_1 - X = a'(X - X_{st})$

Cu ajutorul curbei *1* din figura 6.5, se determină valoarea lui a_1 pentru $M_{cr_1} = 1{,}8$ care este $a_1 = 1{,}48$. De unde:

$$a_1 - X = 1{,}48 - 0{,}60 = 0{,}88$$

Rămîne să se determine valoarea lui $M_{cr_{1,1}}$ pentru care distanța dintre curbele *1* și *2* de pe figura 6.5 este egală cu 0,88 adică

$$a' - (X - X_{st}) = 0{,}88$$

Se găsește această valoare la $M_{cr_{1,1}} = 1{,}4$ și $a' = 1{,}18$. Pentru aceste valori, cu ajutorul relației (6.38) se obține

$$X_{st} = a_1 - a' = 1{,}48 - 1{,}18 = 0{,}3.$$

Cu metoda descrisă mai sus s-a întocmit diagrama din figura 6.6 care reprezintă $M_{cr} = f(X)$ pentru o conductă cu $X = 0{,}6$ și pentru diferite valori ale lui M_{cr_1} (la $X = 0$). După cum se vede din figură, saltul de presiune are loc cu atît mai aproape de începutul conductei cu cît viteza inițială este mai mică. Viteza de curgere a gazului după frontul undei de șoc este subsonică și corespunde relației

$$X = \frac{1}{M^2_{cr_{1,2}}} - 1 - \ln \frac{1}{M_{cr_{1,2}}} \tag{6.40}$$

6.3. CURGEREA ADIABATĂ CU FRECARE A GAZULUI PERFECT PRIN CANALE SAU CONDUCTE FOARTE LUNGI

În cazul unei conducte sau canal de lungime mare, pierderea de presiune $p_1 - p_2$ datorită lucrului mecanic de frecare între secțiunea inițială și finală este importantă. Problema practică ce trebuie rezolvată constă în determinarea parametrilor gazului în secțiunea finală (p_2, v_2, w_2) cunoscînd valoarea lor în secțiunea inițială (p_1, v_1, T_1, w_1). Parametrii variabili ai conductelor de lungime mare vor fi lungimea x și cota H față de planul de referință, deci elementele constructive vor fi definite de

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = f_1(x);\ H = f_2(x) \tag{6.41}$$

Debitul masic $\dot{m}$ al gazului la regim permanent stabilizat este

$$\dot{m} = \frac{Aw}{v} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}\frac{w}{v} = \frac{\pi d_1}{4}\frac{w_1}{v_1}\ \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right] \tag{6.42}$$

în care cu A și A_1 și d și d_1 s-au notat secțiunile, respectiv diametrele într-o secțiunea oarecare și în secțiunea inițială.

Ecuațiile curgerii, considerată unidirecțională, vor fi: ecuația conservării energiei pentru $l_{fr} = 0$ (6.43); ecuația conservării energiei pentru o curgere adiabată cu frecare (6.44); ecuația lucrului mecanic de frecare (6.45); ecuația schimbului de căldură a gazului cu pereții canalului (6.46); ecuația de stare a gazului perfect (6.47). Ecuațiile enumerate au formele:

$$\mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}\right) = \mathrm{d}Q - g \cdot \mathrm{d}H - \mathrm{d}h \Big|_{\mathrm{d}l_{fr}=0} \tag{6.43}$$

$$\mathrm{d} = \left(\frac{w^2}{2}\right) = - v \cdot \mathrm{d}p - g \cdot \mathrm{d}H - \mathrm{d}l_{fr} \Big|_{\mathrm{d}q=0} \tag{6.44}$$

$$\mathrm{d}l_{fr} = \frac{w^2}{2} \xi \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}} \tag{6.45}$$

$$\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}Q}{3600 \cdot \dot{m}} \; ; \; \mathrm{d}Q = \alpha\pi\mathrm{d}(T_a - T)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}q = \frac{4\alpha v_1 d}{3600 \cdot w_1 d^2}(T_a - T)\,\mathrm{d}x \tag{6.46}$$

în care T_a este temperatura mediului ambiant considerată egală cu a pereților conductei; T — temperatura gazului în secțiunea curentă; α — coeficientul de schimb de căldură convectiv între gaz și peretele conductei. Pentru gazul perfect

$$pv = RT \tag{6.47}$$

Rezolvarea tuturor problemelor ridicate de curgerea unidirecțională a gazului prin conductele foarte lungi constă în obținerea unor funcții de forma (6.48):

$$A = f_1(x)\,;\; H = f_2(x)\,;\; p = f_3(x)\,;\; v = f_4(x)\,;\; T = f_5(x)\,;\; w = f_6(x) \tag{6.48}$$

Deoarece cazul general pentru care trebuie determinate toate funcțiile (6.48) este mai rar întîlnit, se tratează în continuare cazul cel mai uzual întîlnit în tehnică și care satisface numai condițiile (6.49)

$$A = \mathrm{const}\,;\; \mathrm{d}H = 0\,;\; \mathrm{d}q = 0\,;\; d = \mathrm{const} \tag{6.49}$$

Se notează cu A secțiunea conductei și cu d diametrul:

$$A = \frac{w}{v} = \mathrm{const}\,;\; A = \frac{4m}{\pi d^2} \tag{6.50}$$

Integrînd ecuația (6.43) între secțiunea inițială (*1*) și o secțiune oarecare, se obține viteza de curgere cu relația

$$w = \sqrt{2(h_1 - h) + \left(\frac{w_1^2}{2}\right)}\;\Bigg|_{l_{fr}=0} \tag{6.51}$$

Introducînd expresia lucrului mecanic de frecare l_{fr} din relaţia (6.45) în (6.44) se obţine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{w^2}{2}\right) = -v\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{\xi}{d}\frac{w^2}{2}\Bigg|_{\mathrm{d}q=0} \tag{6.52}$$

Admiţînd rugozitatea canalului constantă pe toată lungimea, coeficientului de frecare ξ va depinde numai de criteriul Reynolds al curgerii :

$$\mathrm{Re} = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{d}{\eta \cdot g}\frac{w}{v}$$

Ţinînd seama că secţiunea $A = \text{const.}$ şi $d = \text{const}$, coeficientul de frecare ξ va depinde numai de vîscozitatea gazului η, care este la rîndul ei funcţie numai de temperatura T a lui. Deoarece temperatura gazului variază puţin între două stări vecine, avînd în vedere ipoteza $\mathrm{d}q = 0$, se admite că şi $\xi = \text{const.}$ în lungul conductei. Din egalarea (6.50) cu (6.51) se obţine pentru $\dot{m}=1\text{kg/s}$

$$w = \sqrt{2(h_1 - h) + \frac{w_1^2}{2}} = A \cdot v \tag{6.53}$$

Transformarea gazului ce satisface relaţia (6.53) prin care se exprimă legătura dintre căderea de entalpie Δh şi volumul specific v al unui gaz perfect ce curge printr-o secţiune A se numeşte „transformarea lui Fanno". Curba corespunzătoare relaţiilor (6.50) şi (6.53), reprezentată pe diagramele $p - v$ şi $T - s$ sau $h - s$, avînd ca parametru variabil volumul specific v, poartă denumirea de „curba lui Fanno".

Entalpia frînată se poate exprima şi ea în funcţie de produsul $A \cdot v$ aşa cum se vede din relaţia

$$h_{01} = h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_1 + \frac{A^2 \cdot v_1^2}{2} \tag{6.54}$$

După cum se vede din relaţiile (6.53) şi (6.54), viteza de curgere şi entalpia unui gaz într-o secţiune oarecare şi care în secţiunea iniţială are viteza w_1 şi entalpia momentană h_1 va depinde numai de produsul dintre secţiunea A şi volumul specific v al lui. Pentru fiecare valoare a secţiunii A din ecuaţiile (6.50) şi (6.51) pentru fiecare pereche de valori v şi h, deci la intersecţia curbelor $h = \text{const}$ şi $v = \text{const.}$ se obţine o viteză w.

În cazul gazului perfect, ecuaţia curbelor Fanno se poate obţine în funcţie de p, v şi T, şi pe cale analitică, admiţînd căldura specifică a gazului constantă. Din ecuaţia entalpiei frînate, constante în lungul conductei pentru o curgere adiabat-izentropă, se obţine pentru secţiunea iniţială şi una oarecare :

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2} = h_1 - h = c_p(T_1 - T) = \frac{c_p}{R}(p_1v_1 - pv) \tag{6.55}$$

care prin înlocuirea lui $w = A \cdot v$ devine

$$p_1v_1 - pv = \frac{R}{2c_p}(w^2 - w_1^2) = \frac{R \cdot A}{2c_p}(v^2 - v_1^2) = b(v^2 - v_1^2) \tag{6.56a}$$

în care :

$$b = \frac{R}{2c_p}\frac{w_1^2}{v_1^2} = \frac{k-1}{2k}\frac{w_1^2}{v_1^2} = \frac{(k-1)\,A^2}{2k} \qquad (6.56b)$$

Din (6.56) se obţine ecuaţia transformării lui Fanno, a cărei formă este

$$p \cdot v + bv^2 = p_1v_1 + bv_1^2 = \text{const.} \qquad (6.57)$$

$$pv\left(1 - \frac{bv}{p}\right) = \text{const.} \qquad (6.58)$$

în care :

$$\frac{bv}{p} = \frac{k-1}{2k}\quad \frac{w_1^2}{v_1^2}\frac{v}{p} = \frac{k-1}{2k}\frac{w^2}{pv} = \frac{k-1}{2}\frac{w^2}{a^2} = \frac{k-1}{2}M^2$$

Deci ecuaţia curbei Fanno este

$$pv\left(1 - \frac{bv}{p}\right) = pv\left(1 - \frac{k-1}{2}M^2\right) = \text{const.} \qquad (6.59)$$

Din analiza ecuaţiei (6.59) se constată că pentru viteze de curgere mici ($M < 0{,}1$) termenul bv/p capătă valori tinzînd către zero şi ca urmare ecuaţia lui Fanno devine ecuaţia unei izoterme. Ca exemplu, considerînd $k = 1{,}4$ şi $M = 0{,}1$ se obţine :

$$\frac{bv}{p} = \frac{k-1}{2}M^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}002\,;\; pv(1 - 0{,}002) \approx pv = \text{const.}$$

Pentru un gaz perfect, o transformare Fanno se poate reprezenta pe diagrama $T-s$, admiţînd ca variabile pe T şi v. Variaţia de entropie a gazului de stare iniţială 1 şi finală oarecare este

$$s - s_1 = c_v \ln\frac{T}{T_1} + R\ln\frac{v}{v_1} \qquad (6.60)$$

Relaţia (6.56) poate fi scrisă sub forma (6.61)

$$p_1v_1 - pv = R(T_1 - T) = b(v^2 - v_1^2) = bv_1^2\left(\frac{v^2}{v_1^2} - 1\right) \qquad (6.61)$$

Din care se obţine :

$$\frac{v}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{R(T_1 - T)}{bv_1^2}} \qquad (6.62)$$

Introducînd pe (6.62) în (6.60) se obţine variaţia de entropie :

$$s - s_1 = c_v \cdot \ln\frac{T}{T_1} + \frac{R}{2}\ln\left[1 + \frac{R(T_1 - T)}{bv_1^2}\right] \qquad (6.63)$$

Cu formula (6.63) se obține un punct oarecare al curbei Fanno ce trece prin punctul 1 și care corespunde unei valori date a constantei b. Punctul de pe curba Fanno se găsește în dreapta curbei izocore $v = v_1$, deoarece variația de entropie pe o izocoră între punctul de temperatură T_1 și cel cu temperatura T este

$$|s - s_1|_v = \Delta s|_v = c_v \cdot \ln \frac{T}{T_1} \quad [\mathrm{J/kg \cdot K}] \tag{6.64}$$

Deci distanța de la entropia s pe izocoră și s_1 pe curba Fanno (figura 6.7) este

$$|s - s_1|_{Fanno} - \Delta s|_v = \frac{R}{2} \ln \left[1 + \frac{R(T_1 - T)}{b v_1^2}\right] \quad [\mathrm{J/kg\ K}] \tag{6.64'}$$

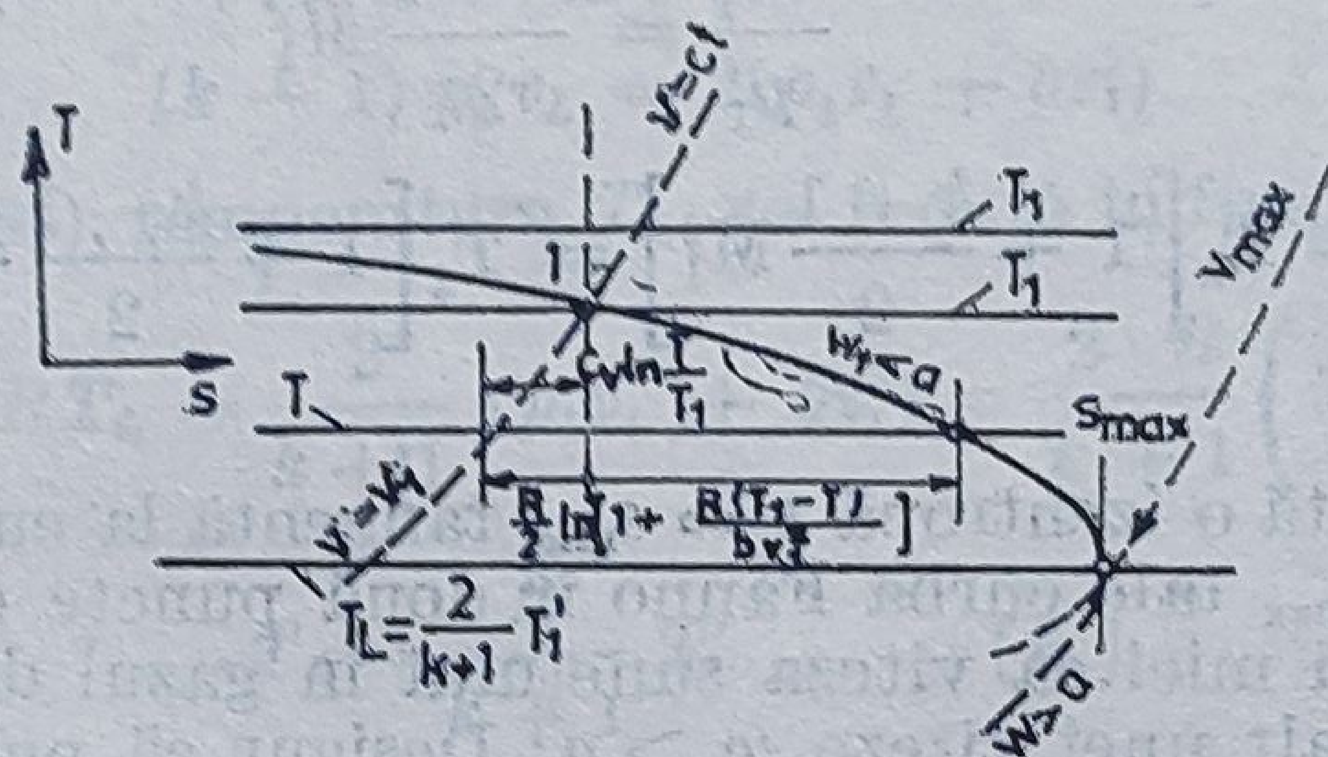


Fig. 6.7. Curba Fanno în diagrama $T - s$.

Dacă se trasează pe diagrama $T - s$ o curbă Fanno ce trece prin starea inițială 1, de temperatura T_1 și v_1 și corespunzătoare unei valo i oarecare b, se constată că ea este cuprinsă într-un domeniu limitat de izotermele T și T_1' și este limitată de izocora $v = v_{max}$ și entropia $s = s_{max}$.

Volumul v_{max} pe care îl căpăta un gaz ce execută o transformare Fanno corespunde destinderii lui din strea 1 (figura 6.7) pînă la presiunea $p = 0$ (pentru un b dat). Din ecuația Fanno (relația 6.57), pentru $p = 0$ volumul devine v_{max} și este dat de relația

$$v_{max}\Big|_{p=0} = \sqrt{v_1^2 + \frac{p_1 v_1}{b}} \quad [\mathrm{m^3/kg}] \tag{6.65}$$

Pe de altă parte, din ecuația (6.63) se constată că entropia s tinde către $-\infty$, dacă temperatura T tinde către o valoare T_1', pentru care

$$1 + \frac{R(T_1 - T_1')}{b v_1^2} = 0 \tag{6.66}$$

Deci temperatura T_1' reprezintă asimptota curbei Fanno la presiuni ridicate care se obține din (6.66) :

$$T_1' = T_1 + \frac{b v_1^2}{R} \quad [\mathrm{K}]$$

Înlocuind expresia lui b, dată de relația (6.56b), se obține

$$T_1' = T_1 + \frac{R}{2c_p} \frac{w_1^2}{v_1^2} \frac{v_1^2}{R} = T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p} \quad [K] \qquad (6.67)$$

Deci temperatura T_1' este temperatura frînată a gazului ce curge cu viteza w_1 și ai cărui parametri sînt cei corespunzători stării 1 (valori momentane).

Temperatura frînată T_1' se poate exprima și în funcție de parametrii momentani ai gazului în curgere și criteriul M_1:

$$T_1' = T_1 + \frac{bv_1^2}{R} = T_1\left[1 + \frac{bv_1^2}{RT_1}\right] = T_1\left[1 + \frac{bv_1}{p_1}\right] \quad [K]$$

Deoarece:

$$\frac{bv_1}{p_1} = \frac{k-1}{2} M_1^2$$

se obține:

$$T_1' = T_1\left[1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right] = T_1\left[1 + \frac{k-1}{2} \frac{w_1^2}{a_1^2}\right] \quad [K] \qquad (6.68)$$

De asemenea există o izentropă $s = s_{max}$ tangentă la curba Fanno. Toate izentropele $s < s_{max}$ taie curba Fanno în două puncte ce corespund unul unei viteze w mai mici ca viteza sunetului în gazul de stare respectivă ($w < a$), iar celălalt unei viteze $w > a$. Desigur că punctul de tangență notat cu L pe figura 6.7 reprezintă tocmai viteza critică ($w = a$) pentru care $s = s_{max}$.

Condiția impusă curgerii și anume că are loc adiabat (fără schimb de căldură cu pereții) dar cu frecare ($l_{fr} > 0$) duce la obligativitatea desfășurării curgerii cu d$s > 0$. Deci dacă viteza inițială w_1 este subsonică ($w_1 < a_1$) procesul de curgere se va desfășura pe ramura superioară a curbei. Dacă viteza inițială $w_1 > a_1$, atunci evoluția stării fluidului este reprezentată pe ramura inferioară a curbei Fanno (figura 6.7, curba punctată).

Mărimile caracteristice ale punctului L se determină în felul următor:

Coeficientul unghiular al curbei Fanno în punctul L, considerînd procesul de curgere adiabat (pv^k = ct), este

$$\frac{dp}{dv} = -k\frac{p}{v}$$

Diferențiind relația (6.57) se obține

$$p\,dv + v\,dp + 2b \cdot v\,dv = 0$$

și ca urmare coeficientul unghiular al transformării gazului în lungul canalului prin care curge este

$$\frac{dp}{dv} = -\left(\frac{p}{v} + 2b\right)$$

Mărimile de stare în punctul L(anume p_L și v_L) sînt rădăcinile ecuațiilor (6.69) și (6.70):

$$k\frac{p_L}{v_L} = \frac{p_L}{v_L} + 2b \qquad (6.69)$$

$$p_L v_L + b v_L^2 = p_1 v_1 + b v_1^2 \qquad (6.70)$$

Pentru determinarea temperaturii în punctul L, notată de asemenea cu T_L, se pleacă de la relația (6.69), de unde se obține

$$(k-1) p_L v_L = 2b\, v_L^2$$

Ținînd seama de (6.70)

$$(k-1)\, p_L v_L = 2(p_1 v_1 + b v_1^2 - p_L v_L)$$

$$(k+1)\, p_L v_L = 2(p_1 v_1 + b v_1^2)$$

Făcînd apel la (6.68), temperatura T_L va fi dată în final de (6.71)

$$p_L v_L = R T_L = \frac{2}{k+1}(p_1 v_1 + b v_1^2) = \frac{2\cdot R}{k+1}\left(T + \frac{w_1^2}{2c_p}\right)$$

$$T_L = \frac{2}{k+1} T_1' \qquad [\mathrm{K}] \qquad (6.71)$$

Din relația (6.68) se obține T_L și în funcție de T_1 și M_1 (6.72);

$$\frac{T_L}{T_1} = \frac{2}{k+1}\frac{T_1'}{T_1} = \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}\frac{w_1^2}{a_1^2} = \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M_1^2 \qquad (6.72)$$

Relația (6.69) se mai poate scrie sub forma (6.73)

$$p_L = \frac{2b}{k-1} v_L \qquad (6.73)$$

Introducînd în (6.73) expresia lui v_L dată de relația (6.70), se obține relația

$$v_L^2 = (p_1 v_1 + b v_1^2)\frac{k-1}{b(k+1)} \qquad [\mathrm{m^3/kg}] \qquad (6.74)$$

Cu relațiile de mai sus se pot determina parametrii de stare ai gazului în punctul L. Din relația (6.74) se obține v_L în funcție de v_1:

$$\frac{v_L^2}{v_1^2} = \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{p_1}{b v_1} + 1\right) = \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{2}{k-1}\frac{a_1^2}{w_1^2} + 1\right)$$

$$\frac{v_L}{v_1} = \frac{k-1}{k+1}\left[\frac{2}{k-1}\frac{1}{M_1^2} + 1\right] = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2} \qquad (6.75)$$

Din relaţia (6.59), aplicată stării iniţiale, se obţine presiunea momentană iniţială :

$$\frac{bv_1}{p_1} = \frac{k-1}{2}\frac{w_1^2}{a_1^2}\ ; \quad p_1 = \frac{2b}{k-1}\frac{a_1^2}{w_1^2}v_1 \tag{6.76}$$

Împărţind relaţia (6.73) la (6.76), se determină valoarea presiunii p_L în funcţie de p_1 :

$$\frac{p_L}{p_1} = \frac{v_L}{v_1}\frac{w_1^2}{a_1^2} = \frac{w_1^2}{a_1^2}\sqrt{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{a_1^2}{w_1^2}}$$

$$\frac{p_L}{p_1} = M_1^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2}}$$

$$\frac{p_L}{p_1} = \frac{w_1}{a_1}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}\frac{w_1^2}{a_1^2} + \frac{2}{k+1}} = M_1\sqrt{\frac{k-1}{k+1}M_1^2 + \frac{2}{k+1}} \tag{6.77}$$

Viteza de curgere a gazului de stare L se obţine din ecuaţia (6.50) fiind dată de expresia

$$\frac{w_L}{w_1} = \frac{v_L}{v_1}\bigg|_A = \sqrt{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2}} \tag{6.78}$$

Identificînd pe (6.73) cu (6.59) pentru punctul L, se obţine

$$p_L = \frac{2b}{k-1}\frac{a_L^2}{w_L^2}v_L = \frac{2b}{k-1}\frac{1}{M_L^2}v_L = \frac{k-1}{2}M_L^2 \tag{6.79}$$

Deci $w_L = a_L$.

După cum se vede, în cazul curgerii adiabate subsonice a unui gaz de o anumită stare iniţială printr-o conductă foarte lungă, pot apărea, datorită lucrului mecanic de frecare, aceleaşi fenomene ca în cazul curgerii printr-un ajutaj geometric convergent. În cazul ajutajului convergent, deci în cazul curgerii subsonice ($w < a$), presiunea poate scade sub influenţa frecării pînă la valoarea critică p_{cr}, iar în cazul conductei foarte lungi poate scădea pînă la valoarea lui p_L dată de relaţia (6.77). Dacă în secţiunea de ieşire a conductei foarte lungi, mediul are o presiune mai scăzută decît p_L atunci presiunea gazului în secţiunea de ieşire a conductei nu se va modifica, rămînînd tot la valoarea p_L.

Pentru exemplificarea aplicării transformării Fanno, se consideră curgerea adiabată cu frecare a unui gaz printr-o conductă foarte lungă, cu diametrul d. Se pleacă de la ecuaţia conservării energiei (6.52), care devine

$$\mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}\right) = -v\cdot \mathrm{d}p - \frac{\xi}{d}\frac{w^2}{2}\mathrm{d}x \tag{6.80}$$

Din expresia lui b se obţine viteza de curgere w^2 :

$$w^2 = \frac{2kb}{k-1}v^2 \tag{6.81}$$

Ca urmare, variaţia energiei cinetice este

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = d\left(\frac{2kb}{k-1} v^2\right) = \frac{2kb}{k-1} v\, dv \tag{6.82}$$

Din ecuaţia lui Fanno (6.57) se obţine presiunea momentană :

$$p = \frac{p_1 v_1 + b v_1^2}{v} - bv, \quad [\mathrm{N/m^2}] \tag{6.83}$$

care prin derivare devine

$$dp = -\frac{p_1 v_1 + b v_1}{v^2} dv - b dv \tag{6.84}$$

Ţinînd seama de (6.82) relaţia (6.80) devine

$$\frac{2kb}{k-1} v\, dv = \frac{p_1 v_1 + b v_1}{v} + bv\, dv - \frac{\xi}{d} \frac{kb}{k-1} v^2\, dx \tag{6.85}$$

Împărţind relaţia (6.8) cu v^2 se obţine

$$b \frac{k+1}{k-1} \frac{dv}{v} = (p_1 v_1 + b v_1^2) \frac{dv}{v^3} - \frac{\xi}{d} \frac{k \cdot b}{k-1} dx \tag{6.86}$$

Integrînd relaţia (6.86) între secţiunea iniţială notată cu A_1 şi o secţiune curentă A aflată la distanţa x de A_1, se obţine relaţia (6.87) în care volumul specific şi presiunea în secţiunea iniţială sînt v_1 şi p_1 iar în secţiunea curentă • şi p :

$$b \frac{k+1}{k-1} \ln \frac{v}{v_1} = -\frac{p_1 \cdot v_1 + b \cdot v_1^2}{2} \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v_1^2}\right) - \frac{k \cdot b}{k-1} \xi \frac{x}{d}$$

$$\frac{k-1}{2 \cdot k} \left(\frac{p_1}{b \cdot v_1} + 1\right) \left(1 - \frac{v_1^2}{v^2}\right) - \frac{k+1}{k} \ln \frac{v}{v_1} = \xi \frac{x}{d} \tag{6.87}$$

Deoarece pentru o conductă de secţiune constantă ($A = \mathrm{const}$), $v/v_1 = w/w_1$, iar raportul p_1/bv_1 este dat de (6.59), relaţia (6.87) capătă forma

$$\frac{1}{k} \left[\frac{a_1^2}{w_1^2} + \frac{k-1}{2}\right] \left[1 - \frac{w_1^2}{w^2}\right] - \frac{k+1}{k} \ln \frac{w}{w_1} = \xi \frac{x}{d}$$

$$\frac{1}{k} \left[\frac{1}{\mathrm{M}_1^2} + \frac{k-1}{2}\right] \left[1 - \frac{w_1^2}{w^2} - \frac{k+1}{k} \ln \frac{w}{w_1}\right] = \xi \frac{x}{d} \tag{6.88}$$

Din (6.87) se obţine variaţia volumului specific v în funcţie de distanţa x, iar din (6.88) variaţia vitezei de curgere w în funcţie de aceeaşi distanţă, sub influenţa lucrului mecanic de frecare.

Pentru determinarea raportului de presiuni p/p_1 în secțiunea aflată la distanța x de la începutul conductei se poate apela și la relația (6.87), în care raportul volumelor specifice v/v_1 este dat de (6.87). Se obține atunci

$$\frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v} + \frac{bv_1}{p_1}\frac{v_1}{v} - \frac{bv_1}{p_1}\frac{v}{v_1}$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v}\left[1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2\left(1 - \frac{v^2}{v_1^2}\right)\right] \tag{6.89}$$

Temperatura T în secțiunea x pentru un gaz perfect se obține din ecuația de stare (6.90):

$$\frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1}\frac{v}{v_1} \tag{6.90}$$

Relațiile (6.87) ... (6.90) permit determinarea volumului specific presiunii, temperaturii și vitezei în curgerea adiabată cu frecare a unui gaz perfect sau asimilat lui, printr-o conductă circulară sau canal de secțiune constantă foarte lung, la o distanță x de la capăt.

După cum se vede din relațiile (6.87) ... (6.90), pentru condiții inițiale cunoscute (p_1, v_1, T_1, w_1) există o lungime maximă a conductei. Această lungime maximă corespunde celei pentru care parametrii gazului sîn secțiunea finală ajunge la valorile limită care sînt cei ai curgerii sonice, deci ai punctului L din figura (6.7), adică la p_L, v_L, T_L și unde $w_L = a$, denumit punctul de criză mecanică a curgerii (datorat lucrului mecanic de frecare). Această lungime maximă corespunde valorii maxime a raportului adimensional x/d care se obține prin derivarea și egalarea cu zero a relației (6.88). Deci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(\frac{\xi x}{d}\right) = 0 \tag{6.91}$$

Prin diferențierea lui (6.88), se obține

$$\frac{2}{k}\left(\frac{k-1}{2} + \frac{a_1^2}{w_1^2}\right)\frac{w_1^2}{w^2} - \frac{k+1}{k}\frac{1}{w} = 0 \tag{6.92}$$

Rădăcinile reale ale ecuației (6.92) sînt

$$w_{1\mathrm{lim}}^2 = \frac{2}{k+1}\left[\frac{k-1}{2} + \frac{1}{\mathrm{M}_1^2}\right]w_1^2 \quad [\mathrm{m/s}]$$

$$w_{1\mathrm{lim}}^2 = w_1^2\left[\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{1}{\mathrm{M}_1^2}\right] \quad [\mathrm{m/s}] \tag{6.93}$$

Relația fiind determinată cu expresia (6.78), înseamnă că $w_{1\mathrm{lim}} = w_L = a$.

În calculele practice ale curgerilor subsonice se pot accepta și ipoteze simplificatoare, care nu modifică substanțial rezultatele. Ipotezele sînt acceptate deoarece ordinul de mărime uzual al lui M_1 la curgerea gaze-

lor perfecte prin conducte foarte lungi este destul de mic ($0{,}1 < M_1 < 0{,}15$). Prima ipoteză simplificatoare este neglijarea termenului $(k-1)/2$ față de raportul $1/M^2$ din relația (6.88).

Deci relația (6.88) capătă forma simplificată

$$\xi \frac{x}{d} = \frac{1}{k} \frac{1}{M_1^2} \left(1 - \frac{w_1^2}{w^2}\right) \tag{6.94}$$

Dacă se însemnă cu L lungimea totală a conductei de diametru d și cu A_2 secțiunea din ieșire, se obține volumul specific v_2 și viteza w_2 la ieșire cu relația (6.95), dedusă din (6.94):

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2} = \sqrt{1 - k \cdot \xi \frac{L}{d} M_1^2} = \sqrt{1 - \xi \frac{L}{d} \frac{w^2}{p_1 v_1}} \tag{6.95}$$

Pentru curgeri cu M_1 nu prea mare ($M_1 < 0{,}2$) curgerea adiabată cu frecare poate fi considerată izotermă (ipoteză simplificatoare) și ca urmare termenul b din ecuația (6.57) poate fi neglijat. În acest caz căderea de presiune în lungul conductei este dată de relația (6.96), obținută din ecuația izotermei $p_2 v_2 = p_1 v_1$:

$$p_1 - p_2 = p_1 \left[1 - \sqrt{1 - \xi \frac{L}{d} \frac{w_1^2}{p_1 \cdot v_1}}\right] \quad [\mathrm{N/m^2}]$$

$$p_1 - p_2 = p_1 \left[1 - \sqrt{1 - \xi k \frac{L}{d} M_1^2}\right] \quad [\mathrm{N/m^2}] \tag{6.96}$$

În cazul curgerii cu $M < 0{,}2$ a unui gaz perfect printr-o conductă a cărei lungime $L < 4000 \cdot d$, termenul de sub radical devine egal cu unitatea și ca urmare relația (6.96) își pierde valabilitatea. În acest caz pierderea de presiune se calculează cu relația aplicabilă unei conducte scurte și anume

$$p_1 - p_2 = \xi \frac{L}{d} \frac{w^2}{2} \frac{1}{v_1} \quad [\mathrm{N/m^2}]$$

Pe de altă parte, curgerea avînd loc adiabat, variația volumului specific, ca urmare a căldurii primite de gaz din lucrul mecanic de frecare, este destul de mică și ca urmare se admite $v_1 = v$. În consecință $v/v_1 = w/w_1 \approx \approx 1$ și ca urmare se poate neglija și termenul $\ln w/w_1$ din relația (6.88).

6.4. CURGEREA FĂRĂ FRECARE A GAZELOR PERFECTE PRIN CANALE SAU CONDUCTE FOARTE LUNGI CU SCHIMB DE CĂLDURĂ CU PEREȚII

Se consideră, în figura 6.8, curgerea unui gaz fără frecare dar cu schimb de căldură activ cu pereții canalului. Gazul curge cu o viteză foarte mică prin secțiunea I, unde se poate neglija atît frecarea cît și schimbul de căldură cu pereții. Cu ajutajul A se accelerează curentul, obținîndu-se în secțiunea *1* viteza w_1. Pe secțiunea de canal *1 — 2*, are loc curgerea

gazului cu o viteză mare şi în prezenţa unui schimb activ de căldură. Secţiunea *2* marchează sfîrşitul conductei studiate. Apoi cu ajutorul difuzorului D, se decelerează curentul de gaz. În secţiunea II viteza este iarăşi

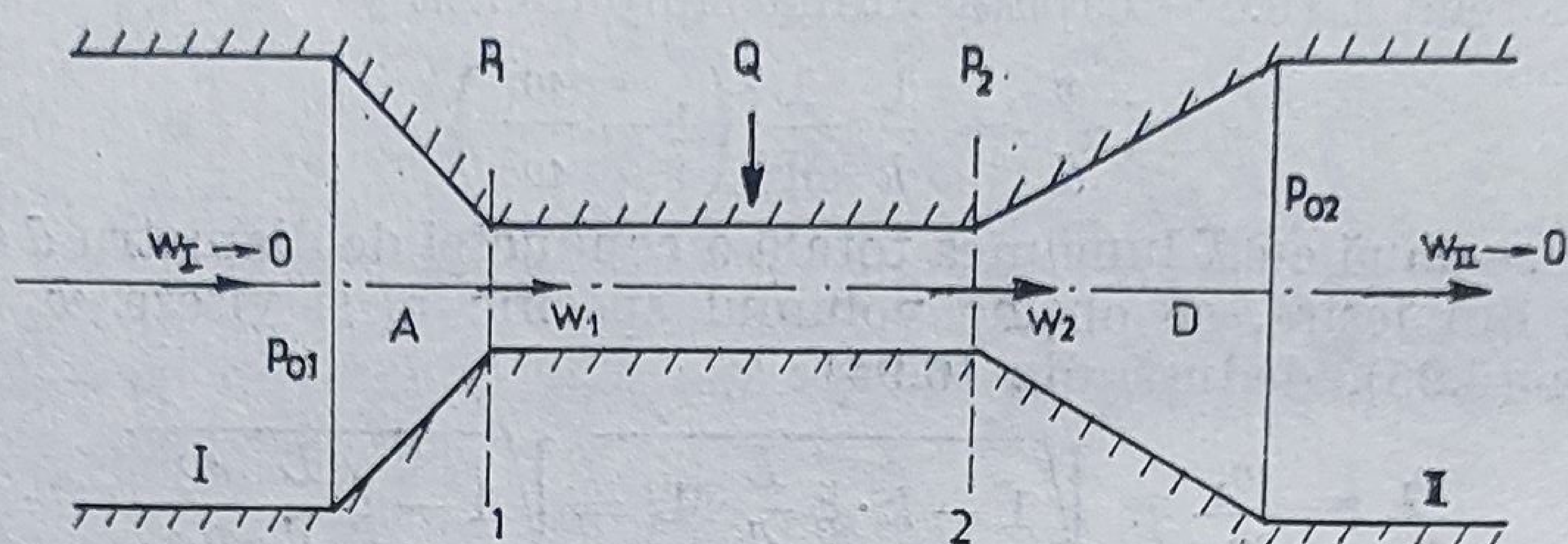


Fig. 6.8. Curgerea unui gaz perfect cu schimb de căldură cu pereţii.

foarte mică iar frecarea şi schimbul de căldură cu pereţii se neglijează. Se consideră că între secţiunile *1* şi *2*

$$M_1 < 1; \quad M_2 < 1$$

Conform ecuaţiei lui Bernoulli, presiunile momentane în secţiunile 1 şi 2 sînt

$$p_1 = p_{01} - \frac{\rho_1 w_1^2}{2}; \quad p_2 = p_{02} - \frac{\rho_2 w_2^2}{2} \tag{6.97}$$

Pierderea totală de presiune între secţiunile *1* şi *2* este

$$p_{01} - p_{02} = (p_1 - p_2) + \left(\frac{\rho_1 w_1^2}{2} - \frac{\rho_2 w_2^2}{2}\right) \tag{6.98}$$

Deoarece se consideră că între secţiunile *1* şi *2* conducta este de secţiune $A = \text{const.}$, ecuaţia de continuitate pentru regimul de curgere permanent stabilizat, se scrie sub forma

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2 = \text{const.} \tag{6.99}$$

Se admite că sensul fluxului de căldură este de la preţi la gaz (sensul poate fi considerat şi invers). Datorită încălzirii, densitatea gazului va scădea ($\rho_2 < \rho_1$), viteza de curgere va creşte ($w_2 > w_1$) şi deci presiunea momentană va scădea ($p_2 < p_1$).

În cazul cînd sensul fluxului de căldură schimbat de gaz cu pereţii canalului este invers (în timpul curgerii el se răceşte) atunci densitatea va creşte ($\rho_2 > \rho_1$), viteza va scădea ($w_2 < w_1$) şi presiunea momentană va creşte ($p_2 > p_1$).

Ecuaţia impulsului aplicată masei de gaz între secţiunile *1—2*, pe direcţia de curgere, neglijînd frecarea, este

$$p_1 - p_2 = \rho_1 w_1 (w_2 - w_1) \tag{6.100}$$

sau

$$p_1 - p_2 = 2\left[\rho_2 \frac{w_2^2}{2} - \rho_1 \frac{w_1^2}{2}\right] \tag{6.101}$$

Expresia (6.98) ce reprezintă pierderea de presiune totală capătă forma (6.102), dacă se ţine seama de (6.100) sau (6.101):

$$p_{01} - p_{02} = \rho_2 \frac{w_2^2}{2} - \rho_1 \frac{w_1^2}{2} = \frac{\rho_1 w_1^2}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) \qquad (6.102)$$

După cum se vede din (6.102) pierderea de presiune totală a unui gaz în curgere subsonică cu $M \ll 1$ şi cu încălzire depinde de creşterea de temperatură a lui, deoarece ea depinde de raportul densităţilor gazului şi de nivelul iniţial al temperaturii (ρ_1).

Din relaţia (6.102) se constată că pierderea totală de presiune la curgerea unui gaz perfect cu viteză mică, însoţită de o încălzire şi neglijînd lucrul mecanic de frecare, este funcţie de energia cinetică a gazului la intrarea în secţiunea considerată, de gradul de încălzire a gazului şi de temperatura iniţială a lui. Deci (6.102) poate fi scrisă sub forma

$$p_{01} - p_{02} = \frac{w_1^2}{2}\rho_1\left[\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right] = f\left(\frac{w_1^2}{2}, \rho_1, \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

Cum pentru un anumit gaz ρ_1 şi ρ_2 depind numai de temperatură, se poate spune că $p_{01} - p_{02}$ este dat de relaţia

$$p_{01} - p_{02} = E_c\left[\rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)\right] = E_c f(\rho)$$

$$E_c = \frac{w_1^2}{2}; \qquad f(\rho) = \rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)$$

Ca exemplificare, se consideră curgerea aerului cu o viteză oarecare (E_c cunoscut) printr-o conductă, încălzindu-se cu o diferenţă de temperatură de 100 grd între temperaturile 100 → 200°C, 400 → 500 °C şi 900 → 1000°C. Pierderea de presiune totală, neglijînd frecarea, este

$$p_{01} - p_{02}\Big|_{100}^{200} = E_c \cdot 0{,}916\left(\frac{0{,}916}{0{,}723} - 1\right) = 0{,}244 \cdot E_c$$

$$p_{01} - p_{02}\Big|_{400}^{500} = E_c \cdot 0{,}508\left(\frac{0{,}508}{0{,}442} - 1\right) = 0{,}075 \cdot E_c$$

$$p_{01} - p_{02}\Big|_{900}^{1000} = E_c \cdot 0{,}291\left(\frac{0{,}291}{0{,}268} - 1\right) = 0{,}024 \cdot E_c$$

Deci la încălzirea cu 100 grd între 100 → 200°C, pierderea de presiune este de 24,4% din energia cinetică iniţială, în timp ce pentru încălzirea de la 400 → 500°C, respectiv 900 → 1000°C este de 7,5% din energia cinetică iniţială, respectiv numai 2,4%.

Se studiază în continuare influenţa pe care o are fluxul termic primit de gaz asupra debitului de gaz ce trece prin secţiunea de conductă *1—2*.

Se consideră, pentru simplificarea demonstrațiilor, o conductă de secțiune constantă, anume porțiunea *1—2* din figura 6.8, în lungimea căreia gazul se încălzește de la temperatura T_1 la T_2. Se consideră o viteză de curgere mică ($M_{cr_1} \ll 1$) și ca urmare se poate accepta egalitatea (6.103) obținută din ecuația de continuitate:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \approx \frac{T_1}{T_2} \approx \frac{T_{01}}{T_{02}} \tag{6.103}$$

Ca urmare pentru $p_{01} - p_{02} = 0$, iar relația (6.98) se poate scrie, dacă se neglijează frecarea, sub forma

$$p_1 - p_2 = \rho_1 \cdot w_1^2 \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]_{p_{01}=p_{02}} \tag{6.104}$$

De asemenea
$$p_{01} - p_1 = \frac{1}{2}\,\rho_1 w_1^2 \tag{6.105}$$

Deci:

$$p_{01} - p_2 = (p_1 - p_2) + (p_{01} - p_1) = \frac{1}{2}\,\rho_1 w_1^2 \left[2\,\frac{T_2}{T_1} - 1\right] \tag{6.106}$$

Notînd cu: $H = p_{01} - p_1$ căderea totală de presiune între secțiunea *I* notată p_{01} și de la intrarea în conducta *1—2* notată cu p_1; A — secțiunea porțiunii de conductă 1—2; $\dot{m}$ — debitul de gaz încălzit ce trece prin secțiunea *1—2*. Se obține

$$\dot{m} = \rho_1 w_1 A; \quad w_1 = \frac{2H}{\rho_1 \left[2\,\frac{T_1}{T_2} - 1\right]} \tag{6.107}$$

În cazul curgerii gazului prin secțiunea *1—2* cu viteză mare, dar tot subsonică, ecuația continuității își păstrează valabilitatea și are forma (6.108) pentru secțiunile *1* și *2*:

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2 \tag{6.108}$$

Ca urmare, încălzirea gazului și pentru curgeri cu viteză mare are aceleași efecte ca în cazul curgerii cu viteză mică și anume scăderea densității ($\rho_2 < \rho_1$) și, deci, creșterea vitezei de curgere ($w_2 > w_1$).

Ecuația impulsului aplicat între secțiunile *1* și *2* este

$$p_1 - p_2 = \rho_1 w_1 (w_2 - w_1) \tag{6.109}$$

Gazul ce curge fiind considerat perfect, se poate scrie ecuația generală

$$\rho = \frac{p}{RT}; \quad \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \tag{6.110}$$

Din analiza relațiilor (6.108) ... (6.110) se constată că scăderea densității are loc cu un gradient mai mare decît cel de creștere a temperaturii. Ca urmarea gradientul de creștere a vitezei de curgere a gazului este și el mai mare decît cel de creștere a temperaturii. Gradientul de creștere a

vitezei sunetului în gazul în curgere este însă mai mic decît cel de creștere a temperaturii, deoarece viteza sunetului este proporțională cu rădăcina pătrată a temperaturii. Ca urmare criteriul $M = w/a$ în lungul conductei va crește, putînd să atingi la limită viteza sunetului ($M = 1$).

Pentru o curgere transonică cu M_1 apropiat de unitate, viteza sunetului poate deci fi atinsă cu un aport de căldură prin pereții conductei. Bineînțeles că cu cît M_1 are o valoare mai mică decît 1, cu atît fluxul termic necesar a fi primit de la pereți de gaz pentru a se atinge viteza sunetului va fi mai mare. Însă oricît de mare ar fi fluxul termic primit de gazul ce curge printr-un canal sau conductă de secțiune constantă și de lungime mare, nu se va putea depăși viteza sunetului. Această situație este denumită „criză termică a curgerii" unui gaz printr-un canal de secțiune constantă, analogă cu „criza mecanică a curgerii" datorită frecării.

Dacă pentru o viteză w_1 și un flux Q transmis prin pereți conductei *1—2* s-a atins viteza sunetului, deci s-a atins punctul de criză termică, viteza inițială a gazului (în secțiunea 1) nu mai poate fi mărită deoarece nu se mai poate mări debitul de gaz prin nici un mijloc, el avînd valoarea maximă. Dacă s-a ajuns la criza termică (viteza sunetului) în secțiunea finală și se mărește fluxul termic transmis gazului prin pereți va rezulta creșterea temperaturii T_2 ceea ce conduce la mărirea vitezei sunetului a_2; în acest caz viteza w_1 din secțiunea inițială va scădea. Cu alte cuvinte, fiecărei valori a fluxului termic primit de gaz de la pereții canalului îi corespunde o valoare maximă a lui M_1. Deci urmările apariției crizei termice a curgerii prin conducte sînt identice cu cele ale apariției crizei mecanice.

Entalpia frînată a gazului în secțiunea *1* și *2* este dată de relațiile cunoscute

$$h_{01} = h_1 + \frac{w_1^2}{2} \quad \text{și} \quad h_{02} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} \quad [\mathrm{J/kg}]$$

Se notează cu q fluxul termic primit de unitatea de masă de gaz în unitatea de timp, $q = Q/\dot{m}$. Deci

$$q = h_{02} - h_{01}$$

Admițînd o căldură specifică medie a gazului notată cu $c_p = c_{p_1} = c_{p_2}$ se obține:

$$q = c_p(T_{02} - T_{01}) = c_p(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2) \quad [\mathrm{J/kg}] \quad (6.111)$$

Pentru p_1, T_1, w_1 date, elementele necunoscute ale gazului în curgere sînt p_2, ρ_2, T_2 și w_2. Pentru determinarea lor se dispune de patru ecuații (6.108) . . . (6.111). Introducînd criteriul M_{cr} al gazului în cele două secțiuni (inițială și finală) ale conductei date de (6.112) se obține

$$M_{cr_1} = \frac{w_1}{a_{cr_1}}; \quad M_{cr_2} = \frac{w_2}{a_{cr_2}} \quad (6.112)$$

în care $a_{cr_1} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_{01}}; \quad a_{cr_2} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_{02}}$

Sistemul de patru ecuaţii (6.108) ... (6.111) cu patru necunoscute se reduce la o ecuaţie de gradul doi. Se pleacă de la (6.109):

$$p_2\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)=\rho_2 w_2(w_2-w_1),$$

care ţinînd seama de (6.110) devine

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{T_2}{T_1}-1=\frac{\rho_2}{\rho_1}w_2^2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad (6.113)$$

Deoarece viteza sunetului este dată de expresia

$$a=\sqrt{kRT}=\sqrt{\frac{kp}{\rho}}\ ;\quad a_2^2=\frac{kp_2}{\rho_2}$$

Expresia (6.113) capătă forma finală (6.114)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{T_2}{T_1}-1=kM_2^2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad (6.114)$$

Raportul temperaturilor momentane din secţiunile 1 şi 2 este

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{T_{01}-\dfrac{w_1^2}{2c_p}}{T_{02}-\dfrac{w_2^2}{2c_p}}=\frac{\dfrac{T_{01}}{T_{02}}-\dfrac{w_1^2}{2c_pT_{02}}}{1-\dfrac{w_2^2}{2c_pT_{02}}} \quad (6.115)$$

Sau exprimată în funcţie de a_{cr_2}

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\dfrac{T_{01}}{T_{02}}-\dfrac{k-1}{k+1}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 M_{cr_2}^2}{1-\dfrac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2} \quad (6.116)$$

În care legătura dintre M_{cr_2} şi M_2 este dată de relaţia

$$M_2=\frac{\dfrac{2}{k+1}M_{cr_2}^2}{1-\dfrac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2} \quad (6.117)$$

Introducînd pe (6.117) şi (6.116) în (6.114) se obţine ecuaţia de gradul doi căutată:

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\frac{M_{cr_2}^2}{1-M_{cr_2}^2}-\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{T_{01}}{T_{02}}\frac{1}{1+M_{cr_2}^2}=0 \quad (6.118)$$

Sistemul de patru ecuaţii (6.108) ... (6.111) cu patru necunoscute se reduce la o ecuaţie de gradul doi. Se pleacă de la (6.109):

$$p_2\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)=\rho_2 w_2(w_2-w_1),$$

care ţinînd seama de (6.110) devine

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{T_2}{T_1}-1=\frac{\rho_2}{\rho_1}w_2^2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \tag{6.113}$$

Deoarece viteza sunetului este dată de expresia

$$a=\sqrt{kRT}=\sqrt{\frac{kp}{\rho}}\ ;\quad a_2^2=\frac{kp_2}{\rho_2}$$

Expresia (6.113) capătă forma finală (6.114)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{T_2}{T_1}-1=kM_2^2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \tag{6.114}$$

Raportul temperaturilor momentane din secţiunile 1 şi 2 este

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{T_{01}-\dfrac{w_1^2}{2c_p}}{T_{02}-\dfrac{w_2^2}{2c_p}}=\frac{\dfrac{T_{01}}{T_{02}}-\dfrac{w_1^2}{2c_pT_{02}}}{1-\dfrac{w_2^2}{2c_pT_{02}}} \tag{6.115}$$

Sau exprimată în funcţie de a_{cr_2}

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\dfrac{T_{01}}{T_{02}}-\dfrac{k-1}{k+1}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 M_{cr_2}^2}{1-\dfrac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2} \tag{6.116}$$

În care legătura dintre M_{cr_2} şi M_2 este dată de relaţia

$$M_2=\frac{\dfrac{2}{k+1}M_{cr_2}^2}{1-\dfrac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2} \tag{6.117}$$

Introducînd pe (6.117) şi (6.116) în (6.114) se obţine ecuaţia de gradul doi căutată:

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\frac{M_{cr_2}^2}{1-M_{cr_2}^2}-\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{T_{01}}{T_{02}}\frac{1}{1+M_{cr_2}^2}=0 \tag{6.118}$$

Soluţia ecuaţiei (6.118) este (6.119) în funcţie de M_{cr_2}, sau (6.120) în funcţie de M_{cr_1}:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + M_{cr_2}^2}{2M_{cr_2}^2}\left[1 - \sqrt{1 - 4\frac{4M_{cr_2}^2}{(1 + M_{cr_2}^2)^2}\frac{T_{01}}{T_{02}}}\right] \quad (6.119)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 + M_{cr_1}^2}{2M_{cr_1}^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4M_{cr_1}^2}{(1 + M_{cr_1}^2)^2}\frac{T_{02}}{T_{01}}}\right] \quad (6.120)$$

Relaţia (6.119) este recomandată pentru curgerile la care în secţiunea finală 2 nu se tinge viteza sunetului (deci $M_{cr_2} < 1$), iar (6.120) pentru cele la care $M_{cr_2} = 1$. Nici una din aceste relaţii de mai sus nu se aplică pentru $M_{cr_2} > 1$, deoarece criza termică nu permite o astfel de curgere.

Pentru $M_{cr_2} = 1$ relaţia (6.119) capătă forma

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}} \quad (6.121)$$

în care
$$w_2 = a_{cr_2} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_{02}}$$

Pentru $w_2 = a_{cr_2}$, viteza w_1 maximă pe care o poate avea gazul este dată de (6.122, a) sau (6.122, b)

$$w_{1_{max}} = a_{cr_2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}}\right) \quad (6.122, a)$$

sau:

$$M_{cr_{1max}} = \frac{a_{cr_2}}{a_{cr_1}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}}\right) \quad (6.122, b)$$

Deoarece
$$\frac{a_{cr_2}}{a_{cr_1}} = \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}$$

se obţine:

$$M_{cr_{1max}} = \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}} - \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1} \quad (6.123)$$

Valoarea lui $M_{cr_{1max}}$ în funcţie de creşterea temperaturii, (raportul temperaturilor T_{02}/T_{01}) pentru un gaz perfect ce curge printr-o conductă este dată în tabelul 6.1. Scădera vitezei iniţiale maxime odată cu creşterea fluxului termic, materializată prin creşterea raportului temperaturilor T_{02}/T_{01}, se explică prin micşorarea debitului maxim de gaz ce poate trece prin conductă. În cazul atingerii „crizei termice a curgerii”, w_2 devine egal cu a_{cr}, a cărei valoare creşte direct proporţional cu temperatura T_{02}, iar densitatea scade invers proporţional cu $T^{1/2}$. Deci debitul maxim de gaz ce poate trece prin secţiunea 2 va fi

$$\dot{m} = \rho_2 w_2 A \approx \frac{p_2}{T_{02}}\sqrt{T_{02}} \approx \frac{p_2}{\sqrt{T_{02}}} \quad (6.124)$$

Problema curgerii gazelor perfecte prin conducte încălzite se întâlneşte în camerele de ardere ale turbinelor cu gaze, unde intrarea aerului

Tabelul 6.1.

Valoarea $M_{1\,cr\,max}$ în funcție de T_{02}/T_{01}

$\frac{T_{02}}{T_{01}}$	$\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}$	$\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}-1}$	$M_{1cr\,max}$
1	1	0	1
1,1	1,048	0,3167	0,732
1,2	1,095	0,447	0,648
1,3	1,140	0,547	0,593
1,4	1,183	0,632	0,551
1,5	1,224	0,707	0,517
1,75	1,322	0,866	0,456
2,0	1,414	1	0,414
2,25	1,500	1,118	0,382
2,5	1,581	1,224	0,357
2,75	1,658	1,322	0,336
3,0	1,732	1,414	0,318
3,5	1,870	1,581	0,289
4,0	2,000	1,732	0,268
4,5	2,121	1,870	0,251
5,0	2,236	2,000	0,236
5,5	2,345	2,121	0,224
6,0	2,449	2,236	0,213
7,0	2,645	2,449	0,196
8,0	2,828	2,645	0,183
9,0	3,000	2,828	0,172
10,0	3,162	3,000	0,162

are loc cu o presiune cunoscută p_1. Încălzirea unui gaz ce curge printr-o conductă circulară poate avea loc fie de la pereții ei, situație ce se întîlnește în schimbătoarele de căldură folosite la încălzirea unui gaz, fie printr-un proces de ardere sau fisiune nucleară ce are loc în interiorul conductei prin care curge gazul. Pentru calculul termogazodinamic al acestora, este necesar să se cunoască pierderea de presiune cu care are loc curgerea. De obicei camerele de ardere ale turbinelor de gaze de mare putere sînt cilindrice (cu secțiune constantă) și ca urmare ecuația impulsului, aplicată secțiunii inițiale 1 și celei finale 2 este

$$\frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{\rho_2 w_2^2}{p_2}\left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right) \tag{6.125}$$

Ținînd seama de expresia vitezei sunetului a_2:

$$a_2^2 = k\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2}{\frac{2k}{k+1}} a_{cr_2}^2$$

relația (6.125), care permite determinarea pierderilor de presiune, devine

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + \frac{\dfrac{2k}{k+1}}{1 - \dfrac{k-1}{k+1} \mathrm{M}_{cr_2}^2} \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right) \tag{6.126}$$

Căderea maximă de presiune în camera de ardere se va obține atunci cînd se atinge „criza termică a curgerii", deci pentru $\mathrm{M}_{cr_2} = 1$. În acest caz, pentru $\mathrm{M}_{cr_2} = 1$ și ținînd seamă de (6.121), relația (6.126) devine:

$$\left.\frac{p_1}{p_2}\right|_{max} = 1 + k\sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}} \tag{6.127}$$

Pentru o încălzire foarte puternică ($T_{01}/T_{02} \to 0$) căderea de presiune capătă valoarea absolută maximă și este

$$\left.\frac{p_1}{p_2}\right|_{max.abs} = k + 1 \tag{6.128}$$

Această cădere maximă absolută de presiune în camera de ardere corespunde unei valori a lui $p_2 = p_1/(k+1)$, cînd la ieșire se obține o viteză de curgere egală cu viteza sunetului. În cazul unei destinderi adiabate, viteza sunetului se obține dacă gazul prezintă o cădere de presiune de la p_1 la p_{2cr}. Prin analogie, în camerea de ardere s-a atins viteza sunetului ca urmare a unui flux termic primit de gaz, el prezentînd o cădere de presiune de la p_1 la $p_2 = p_1 / (k+1)$, care poartă denumirea de *presiune critică pe cale termică*, $p_{cr_{term}}$ și care, de exemplu pentru $k = 1{,}4$ are valoarea

$$p_{2cr_{term}} = \frac{p_1}{k+1} = 0{,}416\, p_1 \quad [\mathrm{N/m^2}]$$

Obținerea aceleiași viteze critice cu un ajutaj geometric pe cale adiabată are loc pentru o destindere de la p_1 la $p_{cr_{geom}}$, dată de relația cunoscută

$$p_{2cr_{geom}} = \frac{p_1}{\left[\dfrac{k+1}{2}\right]^{\frac{k}{k-1}}} \quad [\mathrm{N/m^2}]$$

care pentru $k = 1{,}4$ devine

$$p_{2cr_{geom}} = 0{,}529\, p_1 \quad [\mathrm{N/m^2}]$$

Deci „presiunea critică termică" este diferită de „presiunea critică geometrică".

Căderea de presiune totală $\sigma = p_{02}/p_{01}$ între secţiunea *1* şi *2*, în funcţie de M_{cr_1} şi M_{cr_2} se obţine după cum urmează:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_2}{p_{02}} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_2}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Ca urmare:

$$\frac{p_1}{p_{01}} \frac{p_{02}}{p_2} = \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_2}^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Deci:

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_2}^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{6.129}$$

Căderea de presiune totală maximă σ_{cr} se obţine atunci cînd în secţiunea *2* apare „criza termică de curgere'' deci cînd $M_{cr_2} = 1$. Pentru determinarea ei se face apel la relaţiile (6.123) şi (6.127) care introduse în relaţia (6.129) duc la expresia (6.130) care exprimă pe σ_{cr} (pentru $M_{cr_2} = 1$) în funcţie de raportul temperaturilor frînate la intrare şi ieşire

$$\sigma_{cr} = \frac{\left\{1 - (k-1)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}}\right) \frac{T_{02}}{T_{01}}\right]^{\frac{k}{k-1}}}{1 + k\sqrt{1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}}} \tag{6.130}$$

În figura 6.9 se reprezintă pe o diagramă valorile lui σ_{cr} calculate cu relaţia (6.130) în funcţie de gradul de încălzire al gazului (T_{02}/T_{01}). După cum se vede, valorile lui σ_{cr} variază între 1 pentru curgerea fără încălzire $(T_{02} = T_{01})$ şi 0,79 pentru $T_{02}/T_{01} \to \infty$. Pentru cazurile uzuale întîlnite în maşinile şi utilajele termice, T_{02}/T_{01} variază între 3,5 şi 8, care pentru $T_{01} = 273$ K rezultă pentru T_{02} valori cuprinse între 650°C şi 1900°C. Aşadar presiunea frînată la capătul unei conducte prin care curge un gaz fără frecare, dar încălzit, nu va fi niciodată mai mare decît presiunea frînată iniţială.

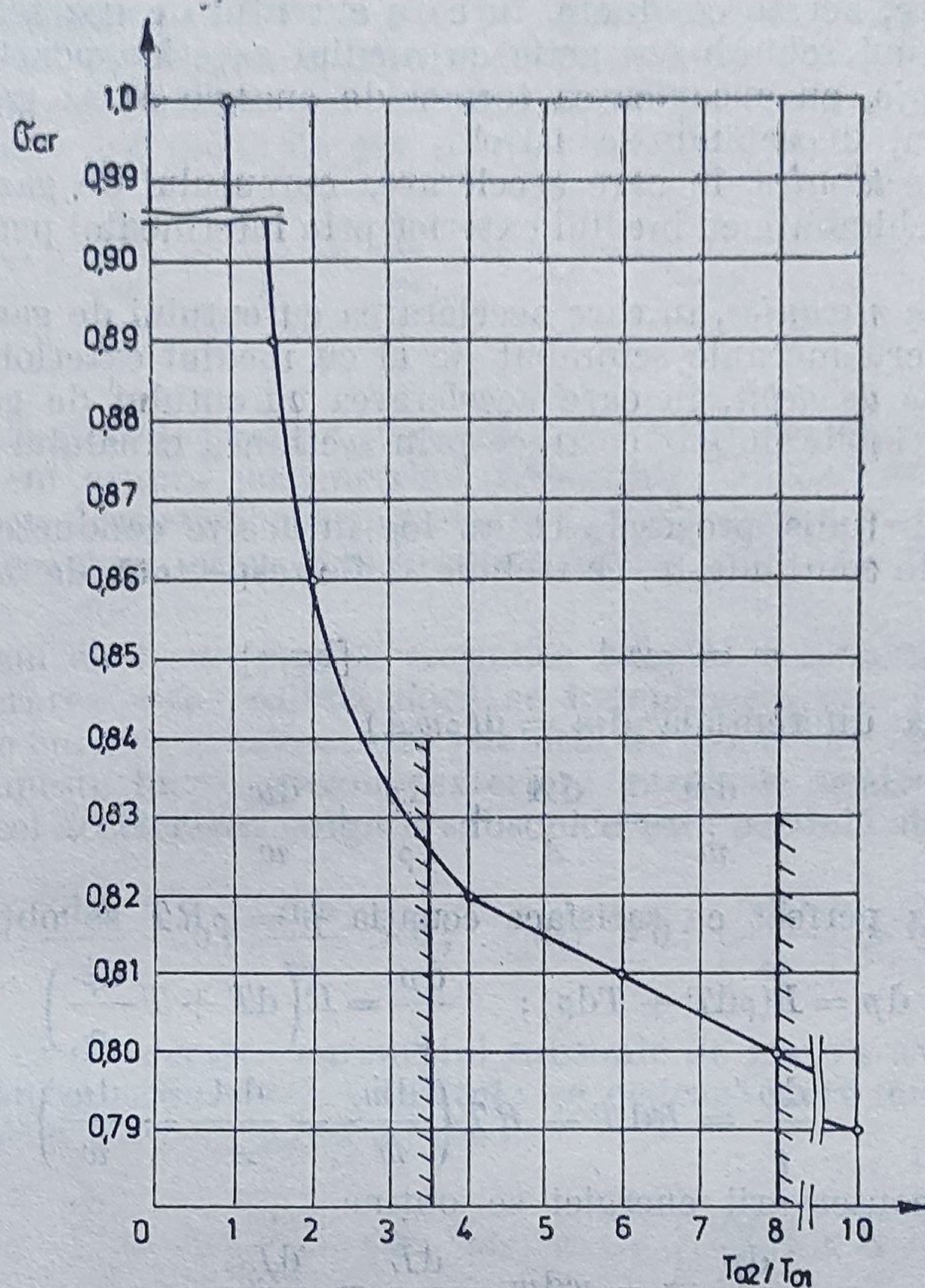


Fig. 6.9. Căderea de presiune $\sigma_{cr} = f(T_{02}/T_{01})$.

6.5. CURGEREA FĂRĂ FRECARE A GAZELOR PERFECTE PRIN CANALE SAU CONDUCTE SCURTE, CU SCHIMB DE ENERGIE SAU MASĂ CU EXTERIORUL. AJUTAJUL TERMIC, DE DEBIT ȘI MECANIC.

Curgerea fără frecare a gazelor prin canale, cu schimb de căldură, de lucru mecanic sau de masă, cu exteriorul este similară ca efect cu curgerea prin ajutaje geometrice (curgerea adiabată fără frecare).

Ca urmare a aportului sau cedării de căldură între gaz și peretele canalului, a schimbului energetic gaz — mediu exterior, sub formă de lucru mecanic, sau a variației debitului de gaz apar accelerări sau decelerări ale curgerii.

Ca urmare, aceste conducte, în care curentul de gaz se accelerează ca urmare a unui schimb energetic cu mediul exterior, poartă tot denumirea de *ajutaje*, cu specificarea formei de energie ce se transformă în energie cinetică, deosebindu-se astfel

— *ajutaje termice*, în care accelerarea curentului de gaz se face pe baza căldurii schimbate cu mediul exterior prin intermediul pereţilor canalului ;

— *ajutaje mecanice*, în care accelerarea curentului de gaz se face pe seama unui lucru mecanic schimbat de el cu mediul exterior ;

— *ajutaje de debit*, în care accelerarea curentului de gaz se datoreşte masei variabile de gaz ce trece prin secţiunea canalului în unitatea de timp.

Pentru a studia procesele ce au loc în aceste conducte, se pleacă de la ecuaţia de continuitate, ce trebuie să fie respectată de orice canal. Deci :

$$\dot{m} = \rho w A \qquad [\text{kg/s}]$$

sau sub formă diferenţială $\mathrm{d}\dot{m} = \mathrm{d}(\rho w A)$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}w}{w} \tag{6.131}$$

Pentru un gaz perfect ce satisface ecuaţia $p = \rho RT$ se obţine

$$\mathrm{d}p = R(\rho \mathrm{d}T + T\mathrm{d}\rho)\,; \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = R\left(\mathrm{d}T + T\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right)$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = R\mathrm{d}T + RT\left(\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{\mathrm{d}A}{A} - \frac{\mathrm{d}w}{w}\right) \tag{6.132}$$

Din ecuaţia conservării energiei se obţine

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -w\mathrm{d}w - \frac{\mathrm{d}L}{\dot{m}} - \frac{\mathrm{d}L_{\mathrm{fr}}}{\dot{m}} \tag{6.133}$$

în care $\mathrm{d}L/\dot{m} = \mathrm{d}l$ este lucrul mecanic specific ; $\mathrm{d}L_{\mathrm{fr}}/\dot{m} = \mathrm{d}l_{\mathrm{fr}}$ cel de frecare ; $\dot{m}$ — debitul de gaz. Din (6.132) şi (6.133) se obţine

$$R\cdot \mathrm{d}T + \frac{a^2}{k}\left(\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{\mathrm{d}A}{A}\right) + \left(w^2 - \frac{a^2}{k}\right)\frac{\mathrm{d}w}{w} + \mathrm{d}l + \mathrm{d}l_{fr} = 0 \tag{6.134}$$

Din ecuaţia conservării entalpiei se obţine pentru $\mathrm{d}l_{\mathrm{fr}} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\dot{m}}\,m = \mathrm{d}h + \mathrm{d}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \mathrm{d}l$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\dot{m}} = \frac{k}{k-1}R\mathrm{d}T + w\,\mathrm{d}w + \mathrm{d}l \tag{6.135}$$

în care $\mathrm{d}Q$ este căldura schimbată de gaz cu pereţii canalului în timpul curgerii : $a^2 = \sqrt{kRT}$; $\mathrm{d}h = R\mathrm{d}Tk/(k-1)$.

Introducînd (6.135) în (6.134) se obține relația (6.136) care exprimă variația vitezei de curgere a gazului în funcție de variația secțiunii canalului, variația debitului de gaz, lucrul mecanic de frecare și lucrul mecanic exterior primit sau cedat de gaz în timpul curgerii :

$$(\mathrm{M}^2-1)\frac{\mathrm{d}w}{w}=\frac{\mathrm{d}A}{A}-\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}-\frac{\mathrm{d}l}{a^2}-\frac{k-1}{a^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\dot{m}}-\frac{k}{a^2}\mathrm{d}l_{fr} \tag{6.136}$$

Ecuația (6.136) pune în evidență influențele diametral opuse a diferiților termeni asupra parametrilor curentului. Parametrii caracteristici accelerării sau decelerării curentului sînt : secțiunea A a canalului ; debitul $\dot{m}$; lucrul mecanic exterior și de frecare ; căldura schimbată de gaz cu pereți canalului.

În cazul cînd curgerea în secțiunea inițială a canalului este subsonică, accelerarea este posibilă dacă se îndeplinește una din condițiile : secțiunea de curgere se micșorează ; debitul de gaz crește ; gazul în timpul curgerii primește lucru mecanic exterior ; gazul se încălzește în timpul curgerii. Deci accelerarea curgerii subsonice este posibilă dacă

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}<0\,;\quad \frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}>0\,;\quad |\mathrm{d}l|>0\,;\quad \left|\frac{\mathrm{d}Q}{\dot{m}}\right|>0$$

Bineînțeles că decelerarea curentului subsonic de gaz va avea loc dacă : crește secțiunea ; se micșorează debitul ; se cedează lucru mecanic în exterior ; are loc o răcire a gazului ; deci :

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}>0\,;\quad \frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}<0\,;\quad |\mathrm{d}l|<0\,;\quad \left|\frac{\mathrm{d}Q}{\dot{m}}\right|<0$$

Considerînd un canal cu secțiune constantă ($\mathrm{d}A/A=0$), o curgere inițială subsonică poate fi accelerată pe seama lucrului mecanic de frecare sau a căldurii primită de la pereții lui numai pînă la viteza sonică (pînă la apariția „crizei mecanice'' sau „termice'' a curgerii).

Dacă în secțiunea inițială a canalului de secțiune constantă, viteza este supersonică ($M_1>1$), accelerarea curentului de gaz se poate face dacă :

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}>0\,;\quad \frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\dot{m}}<0\,;\quad |\mathrm{d}l|>0\,;\quad \frac{\mathrm{d}Q}{\dot{m}}<0$$

Ajutajul geometric. Ajutajul geometric supersonic realizează accelerarea curentului de gaz de la o viteză inițială subsonică la una finală supersonică numai prin modificarea secțiunii canalului, ($\mathrm{d}A/A\neq0$), dacă curgerea are loc : fără frecare $l_{fr}=0$; fără schimb de căldură gaz-perete $\mathrm{d}Q/\dot{m}=0$; fără variație de debit $\mathrm{d}\dot{m}/\dot{m}=0$; lucrul mecanic exte-

rior egal cu zero, $dl = 0$. În aceste condiții relația (6.136) capătă forma simplificată aplicabilă ajutajului geometric :

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dA}{A}\Bigg|_{\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}=0;\ \frac{dQ}{\dot{m}}=0;\ dl=0;\ dl_{fr}=0} \tag{6.137}$$

Ca urmare, se constată că trecerea de la regimul subsonic la regimul supersonic poate fi obținută prin patru metode și anume :

1. Metoda geometrică (ajutaj geometric), care permite destinderea gazului datorită variației secțiunii de curgere a canalului.
2. Metoda debitului (ajutaj de debit), care accelerează sau decelerează un gaz ce curge printr-un canal de secțiune constantă ca urmare numai a variației debitului masic de gaz.
3. Metoda termică (ajutaj termic), care accelerează sau decelerează un curent de gaz ce curge printr-o conductă de secțiune constantă ca urmare numai a fluxului termic primit sau cedat de gaz în timpul curgerii.
4. Metoda energetică (ajutaj mecanic), la care regimul transsonic se realizează numai pe baza lucrului mecanic exterior primit sau cedat de gaz în timpul curgerii printr-un canal de secțiune constantă.

Există și metoda secundară pentru realizarea regimului de curgere transonică :

5. Metoda lucrului mecanic al frecării (ajutaj cu frecare) care însă necesită un ajutaj foarte lung, la care însă se poate realiza sub influența frecării numai trecerea de la curgerea supersonică la cea sonică sau de la cea subsonică la cea sonică.

Ajutajul de debit. Se consideră un ajutaj de debit la care se realizează trecerea prin viteza sunetului numai pe seama variației debitului. Pentru acest ajutaj $d\dot{m}/\dot{m} \neq 0$; secțiunea canalului este constantă $dA/A = 0$; fără schimb de căldură gaz-perete $dQ/\dot{m} = 0$; fără schimb de lucru mecanic exterior $dl = 0$; fără frecare. Ecuația ajutajului de debit este (6.138) obținută din (6.136) pentru condițiile de mai sus :

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}\Bigg|_{\frac{dA}{A}=0;\ dl=0;\ \frac{dQ}{\dot{m}}=0;\ dl_{fr}=0} \tag{6.138}$$

Deci accelerarea curentului de gaz necesită, conform ecuației (6.138), o creștere a masei de gaz în porțiunea de conductă unde curgerea este subsonică și o micșorare a ei în porțiunea unde curgerea este supersonică.

În secțiunea critică unde $M = 1$, debitul masic de gaz trebuie să treacă printr-o valoare maximă.

Pentru ca această situație să aibă loc este necesar ca liniile de curent să se îngusteze pe porțiunea unde viteza este subsonică și să se evazeze în cea supersonică, realizîndu-se astfel un profil al secțiunii reale de curgere similar cu al ajutajului geometric.

Cum însă secțiunea canalului este constantă, mărirea și micșorarea secțiunii reale de curgere s-ar putea realiza numai printr-o recirculație a unei mase de gaz din zona supersonică în cea subsonică. Situația se

prezintă pe figura 6.10 pe care sînt trasate liniile de debit constant; după cum se vede, în interiorul canalului, ca urmare a debitului recirculat, se realizează un profil de curgere convergent-divergent.

Ajutajul mecanic. Ajutajul mecanic reprezintă o metodă posibilă de realizare a unei curgeri transonice, obţinîndu-se trecerea de la viteza

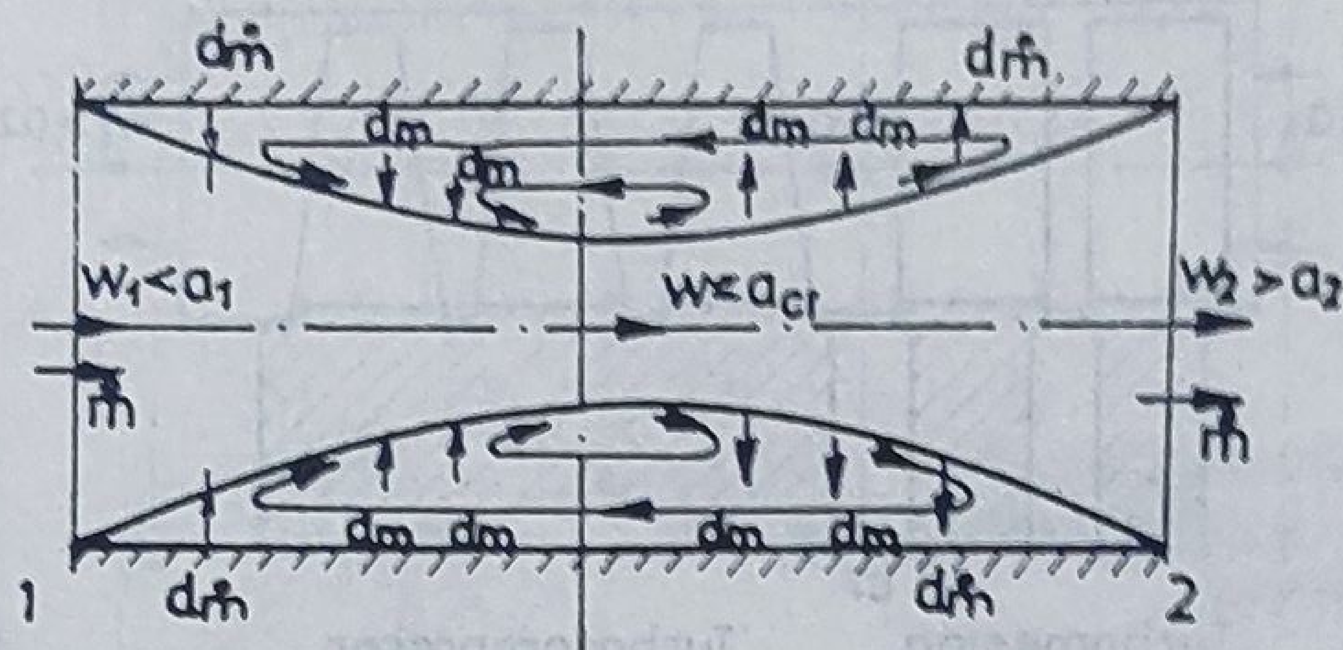


Fig. 6.10. Ajutaj de debit.

subsonică la supersonică pe seama unui lucru mecanic furnizat din exterior de o turbosuflantă. Ecuaţia acestui ajutaj la care $dA/A = 0$, $d\dot{m}/\dot{m} = 0$, $dq = 0$ şi dl_{fr} se obţine tot din (6.136) şi este:

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{dl}{a^2}\Bigg|_{\frac{dA}{A}=0;\ dl_{fr}=0;\ \frac{dQ}{\dot{m}}=0;\ \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}=0} \qquad (6.139)$$

în care dl este lucrul mecanic al unei turbomaşini.

Analizînd posibilităţile de realizare a accelerării unui gaz pe cale mecanică, din relaţia (6.139) se constată următoarele: trecerea gazului cu regim iniţial de curgere subsonic printr-o turbină ($dl > 0$) are ca urmare o accelerare a lui; dacă regimul iniţial de curgere este supersonic şi gazul trece printr-o turbină ($dl > 0$) se decelerează; dacă în regim de curgere iniţial supersonic el trece printr-un turbocompresor ($dl < 0$) se accelerează.

Ca urmare pentru ca o curgere ce iniţial este subsonică să devină supersonică, este necesar ca întîi gazul să treacă prin canalele de palete ale unui turbomaşini unde se va acelara, căpătînd maximum viteza sonică iar după atingerea acestei viteze să treacă prin canalele de palete ale unei turbocompresor, unde viteza va creşte în continuare devenind supersonică.

Schema unui astfel de ajutaj este prezentată în figura 6.11. Particularitatea ajutajului mecanic constă în faptul că în secţiunea unde viteza de curgere este egală cu viteza sunetului, ($M = 1$), lucrul mecanic exterior necesar este egal cu zero ($dl = 0$).

Ecuaţia entalpiei scrisă pentru secţiunea de intrare (*1*) şi ieşire (*2*) are forma

$$h_{01} = h_{02} - \frac{L_m}{\dot{m}} \quad [\text{kJ/kg}]$$

în care L_m este lucrul mecanic dat sau luat de la gaz. În zona curgerii subsonice, lucrul mecanic exterior trebuind să fie pozitiv ($L > 0$) înseamnă că în secțiunea critică $h_{0cr} < h_{01}$, deci gazul se va răci. În zona curgerii supersonice unde $L < 0$ se obține la ieșire $h_{02} < h_{0cr}$. Deci în secțiu-

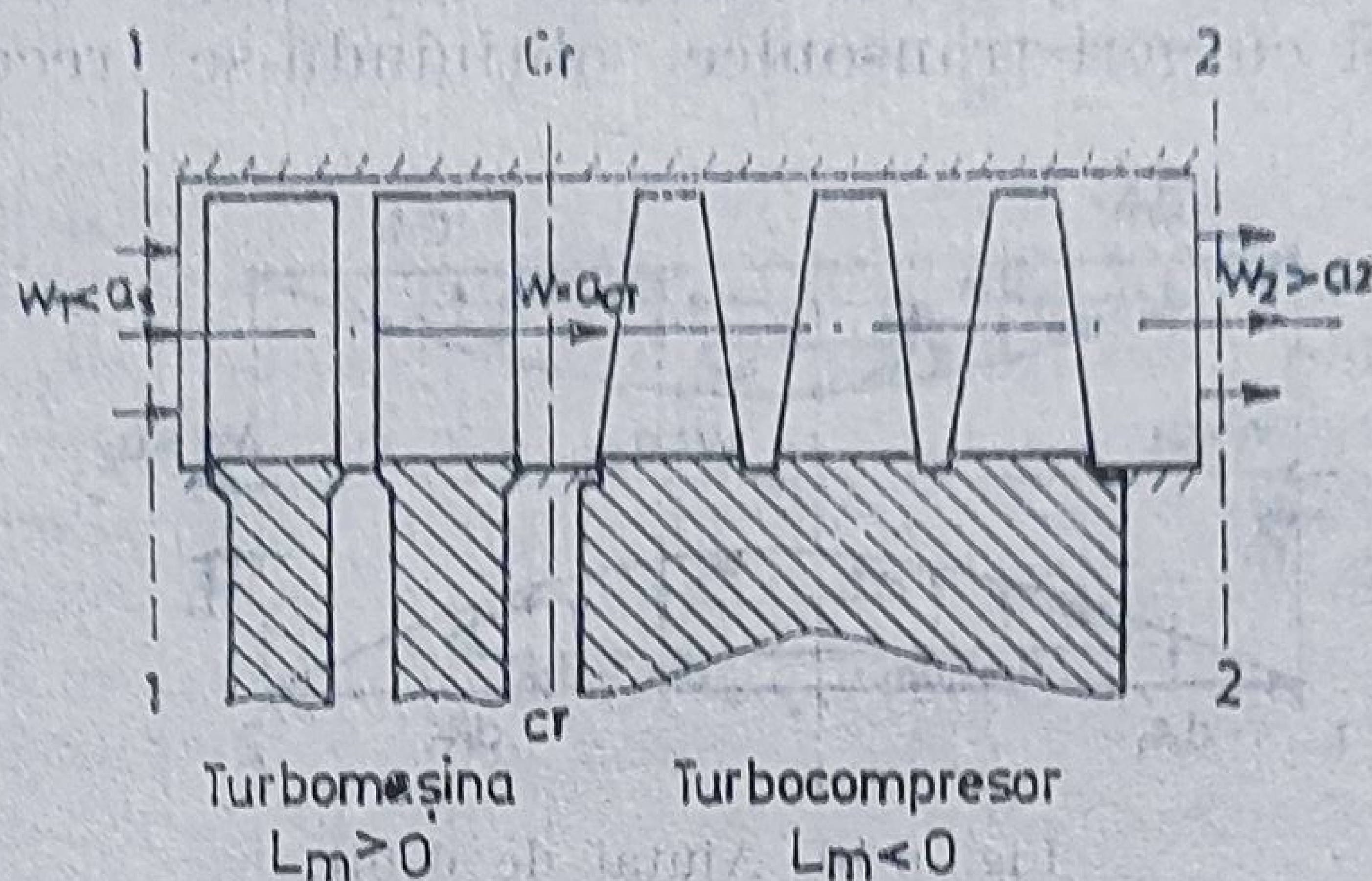


Fig. 6.11. Ajutaj mecanic.

nea unde curgerea are loc cu $M = 1$, entalpia avînd o valoare minimă atît temperatura cît și presiunea vor avea și ele valoarea minimă. Deci

$$T_{01} < T_{cr}; \; T_{02} < T_{cr}$$

și cum pentru o transformare adiabată ($dQ = 0$, există legătura :

$$\frac{p_{0cr}}{p_{01}} = \left[\frac{T_{cr}}{T_{01}}\right]^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_{cr}}{\rho_{01}} = \left[\frac{T_{cr}}{T_{01}}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

însemnează că p_{cr} și ρ_{cr} reprezintă valorile minime ale presiunii frînate și densității gazului.

Variația mărimilor caracteristice momentane ale gazului într-un ajutaj mecanic se obține dacă se face apel la ecuația de continuitate scrisă pentru regimul permanent și un canal de secțiune constantă prin care el curge și anume :

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2; \quad \frac{M_2}{M_1} = \frac{w_2}{w_1} \frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2}$$

Procesul de curgere avînd loc adiabat ($dQ = 0$), se obține

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[\frac{p_1}{p_2}\right]^{\frac{1}{k}} = \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Ca urmare, pentru două secțiuni oarecare *1* și *2* se obține

$$\frac{T_1}{T_2} = \left[\frac{M_2}{M_1}\right]^{\frac{2(k-1)}{k+1}}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^{\frac{2k}{k+1}}; \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^{\frac{2}{k+1}} \tag{6.140}$$

După cum se vede din relaţia (6.140), creşterea continuă a criteriului Mach al curgerii într-un ajutaj mecanic duce la descreşterea continuă a presiunii şi temperaturii momentane, precum şi a densităţii gazului.

Ca exemplu, în figura 6.12 se prezintă variaţia presiunii, densităţii şi temperaturii momentane şi frînate a gazului perfect în funcţie de cri-

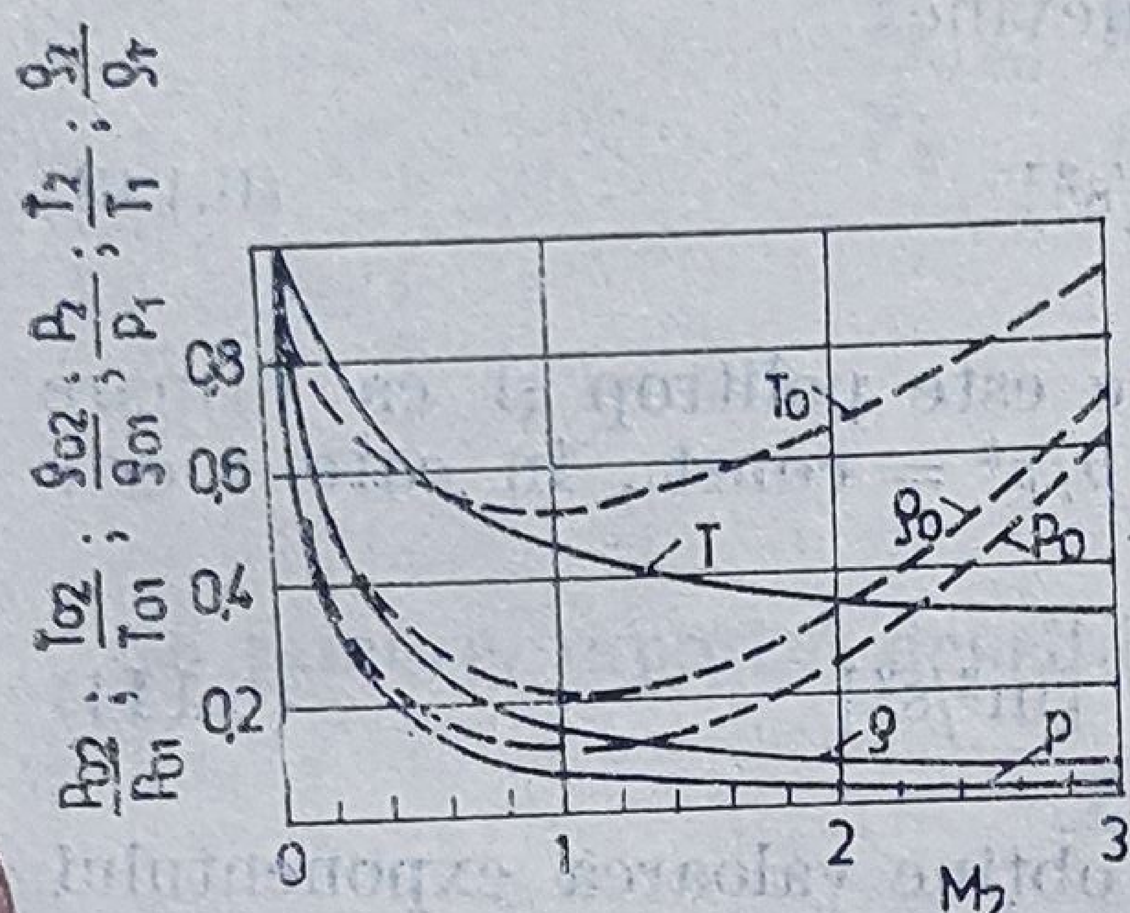


Fig. 6.12. Variaţia presiunii, densităţii şi temperaturii momentane pentru $k = 1{,}4$ într-un ajutaj mecanic.

teriul Mach (M_2) la ieşire pentru $M_1 = 0{,}1$ în secţiunea de intrare. După cum se vede, viteza de ieşire w_2 nu este limitată decît de presiunea p_2, care pentru valoarea minimă absolută $p_2 = 0$ corespunde lui $M_2 \to \infty$.

Ajutajul termic. Acest ajutaj realizează accelerarea unui curent de gaz pe baza schimbului de căldură cu pereţii, curgerea avînd loc fără frecare, printr-o conductă de secţiune constantă fără schimb de lucru mecanic cu exteriorul. Ecuaţia de bază a ajutajului termic este:

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{k-1}{a^2}\frac{dQ}{\dot{m}}\Bigg|_{\frac{dA}{A}=0;\ dl_{fr}=0;\ \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}=0;\ dl=0} \tag{6.141}$$

Accelerarea gazului în porţiunea de conductă unde curgerea este subsonică se face cu aport de căldură din exterior ($dQ > 0$), iar în porţiunea unde curgerea este supersonică cu cedare de căldură ($dQ < 0$).

Deci pentru realizarea unui ajutaj termic supersonic realizat într-o conductă de secţiune constantă, gazul intrînd cu $M_1 \ll 1$, va trebui ca pînă la atingerea vitezei sunetului el să fie încălzit iar apoi, după ce s-a ajuns la $M = 1$, pentru a se obţine $M_2 > 1$, să fie răcit. În secţiunea critică schimbul de căldură este nul ($dQ = 0$).

Spre deosebire de ajutajul mecanic, la cel termic entalpia frînată a gazului în secţiunea sonoră are o valoare maximă. Din paragraful 6.4, în care sînt discutate fenomenele ce au loc într-o conductă încălzită se constată: creşterea presiunii frînate în curentul de gaz ce primeşte căldura şi invers; variaţia densităţii proporţional cu variaţia presiunii frînate; variaţia invers proporţională cu densitatea a temperaturii frînate.

Curgerea gazului prin ajutajul geometric, ajutajul de debit sau ajutajul mecanic s-a presupus mai sus că are loc izentrop, procesul fiind adiabat, iar lucrul mecanic de frecare a fost neglijat. În cazul ajutajului termic, procesul nu mai poate fi considerat izentrop, deoarece, existînd un

schimb de căldură, el are loc cu variația de entropie. Ecuația de continuitate aplicată ajutajului termic este

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dw}{w}\Bigg|_{\frac{dA}{A}=0;\ \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}=0;\ dl=0;\ dl_{fr}=0} \tag{6.142}$$

care, pentru condițiile particulare impuse, devine

$$\frac{dp}{d\rho} = w^2 \quad [m^2/s^2] \tag{6.143}$$

Deci procesul ce are loc în ajutajul termic este politrop și ca urmare ecuația transformării termodinamice este $p/\rho^n =$ const., în care n este exponentul politrop. În consecință

$$\frac{dp}{d\rho} = n\frac{p}{\rho} = n\frac{a^2}{k} \quad [m^2/s^2] \tag{6.144}$$

Din egalarea relațiilor (6.143) cu (6.144) se obține valoarea exponentului politropic al procesului ce are loc în ajutajul termic

$$n = kM^2 \tag{6.145}$$

În secțiunea unde curgerea are loc cu $M = 1/\sqrt{k}$, valoarea lui $n = 1$, deci procesul este izoterm. Pentru gazul perfect, această situație are loc la $M = 0{,}845$ și ca urmare în această secțiune temperatura trece printr-un maximum. În secțiunea critică ($M = 1$), exponentul n devine egal cu k, deci procesul este adiabat și ca urmare $dQ = 0$. De la secțiunea izotermă unde $n = 1$, pînă la cea adiabată unde $n = k$ (critică), are loc scăderea temperaturii gazului ($dT < 0$), ceea ce înseamnă că gradientul de creștere a energiei cinetice pe această porțiune a ajutajului este mai mare decît cel al aportului de căldură.

Variația parametrilor gazului în lungul ajutajului termic se determină plecînd de la ecuația cantității de mișcare scrisă pentru secțiunile *1* unde $M_1 < 1$ și *2* unde $M_2 > 1$.

$$p_1 + \rho_1 w_1^2 = p_2 + \rho_2 w_2^2 \tag{6.146}$$

Deoarece $p_1(1 + kM_1^2) = p_2(1 + kM_2^2)$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}. \tag{6.147}$$

Pentru o secțiune curentă x presiunea momentană p_x va avea valoarea

$$\frac{p_x}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_x^2},$$

iar în secțiunea unde curgerea are loc cu viteza critică ($M_x = 1$)

$$\frac{p_{cr}}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{k + 1}$$

De asemenea

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{w_2^2}{w_1^2}\,\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{w_2^2}{T_2}\,\frac{T_1}{w_1^2}.$$

Din ecuația de stare și din cea de continuitate

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}; \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2}\Bigg|_{\frac{dA}{A}=0}$$

se obține

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{p_1}{p_2}$$

Ca urmare, raportul densităților gazului în cele două secțiuni, va fi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\,\frac{p_1}{p_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

Ținînd seama de relația (6.147), se ajunge la expresia

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\,\frac{1 + k\,M_2^2}{1 + kM_1^2} = \frac{w_1}{w_2} \tag{6.148}$$

Deci densitatea gazului în ajutajul termic scade cu creșterea criteriului Mach.

Variația temperaturii momentane în ajutaj se obține din ecuația de stare și din relația (6.148):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\left[\frac{1 + k\cdot M_1^2}{1 + k\cdot M_2^2}\right]^2 \tag{6.149}$$

Pentru o secțiune oarecare x, parametrii gazului vor avea valorile

$$\frac{\rho_x}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_x} = \frac{M_1^2}{M_x^2}\,\frac{1 + k\cdot M_x^2}{1 + k\cdot M_1^2}$$

$$\frac{T_x}{T_1} = \frac{M_x^2}{M_1^2}\left[\frac{1 + k\cdot M_1^2}{1 + k\cdot M_x^2}\right]^2$$

Curba de variație a temperaturii prezintă un maxim în secțiunea unde $M_x = 1/\sqrt{k}$.

Valorile temperaturii frînate, presiunii frînate și densității gazului se obțin din ecuațiile cunoscute și anume:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1}\,\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr_1}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}M_{cr_2}^2} = \frac{M_{cr_2}^2}{M_{cr_1}^2}\left[\frac{1 + M_{cr_1}^2}{1 + M_{cr_2}^2}\right]^2$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_1}}{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_2}}\right]^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1+M^2_{cr_1}}{1+M^2_{cr_2}}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_1}}{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_2}}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{M^2_{cr_1}}{M^2_{cr_2}}\,\frac{1+M^2_{cr_2}}{1+M^2_{cr_1}}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_1}}{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_2}}\right]^{\frac{1}{k-1}}; \quad M^2_{cr} = \frac{\frac{k+1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{k+1}M^2}$$

Pentru gazul perfect ($k = 1{,}4$) relațiile parametrilor frînați de mai sus capătă formele

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1}\,\frac{1-0{,}166\cdot M^2_{cr_1}}{1-0{,}166\cdot M^2_{cr_2}}; \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1-0{,}166\cdot M^2_{cr_1}}{1-0{,}166\cdot M^2_{cr_2}}\right]^{3,5}$$

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{M^2_{cr_1}}{M^2_{cr_2}}\,\frac{1+M^2_{cr_2}}{1+M^2_{cr_1}}\left[\frac{1-0{,}166\cdot M^2_{cr_1}}{1-0{,}166\cdot M^2_{cr_2}}\right]^{2,5}; \quad M^2_{cr} = \frac{0{,}7\cdot M^2}{1+0{,}2\cdot M^2}$$

În figurile 6.13 și 6.14 sînt prezentate două diagrame de calcul a presiunii și temperaturii frînate și momentane într-un ajutaj termic, în funcție de M_2 pentru un gaz perfect cu $k = 1{,}4$ și cu $M_1 = 0{,}1$.

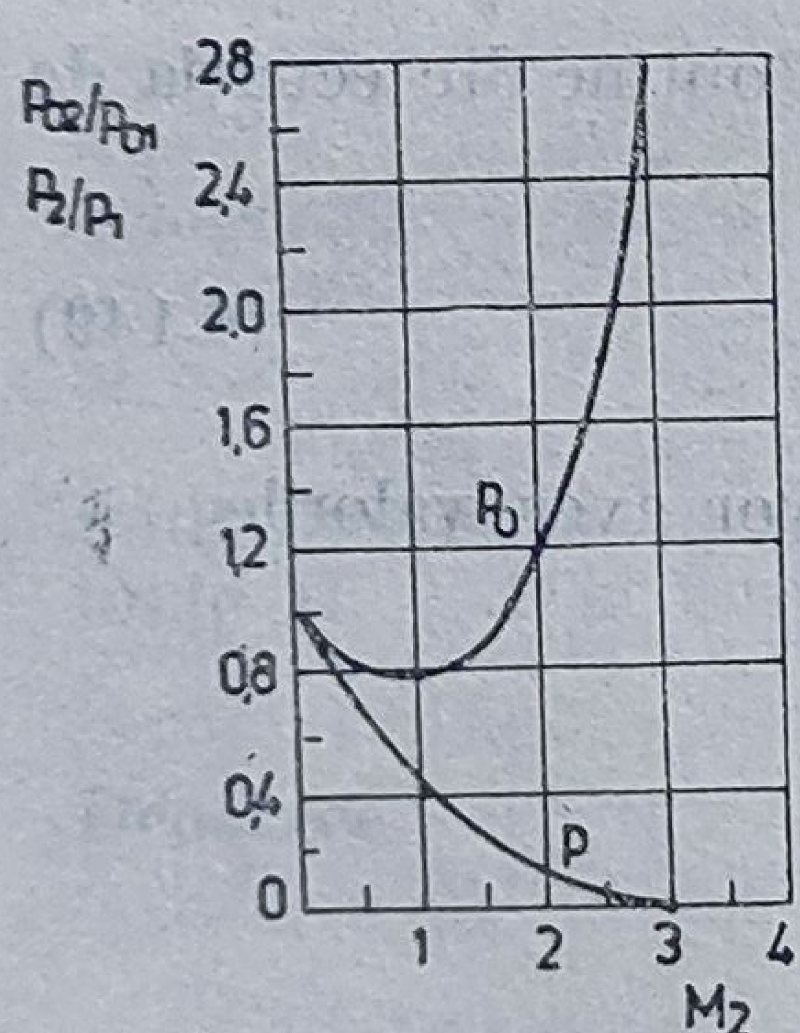


Fig. 6.13. Variația presiunii, pentru $k = 1{,}4$, într-un ajutaj termic.

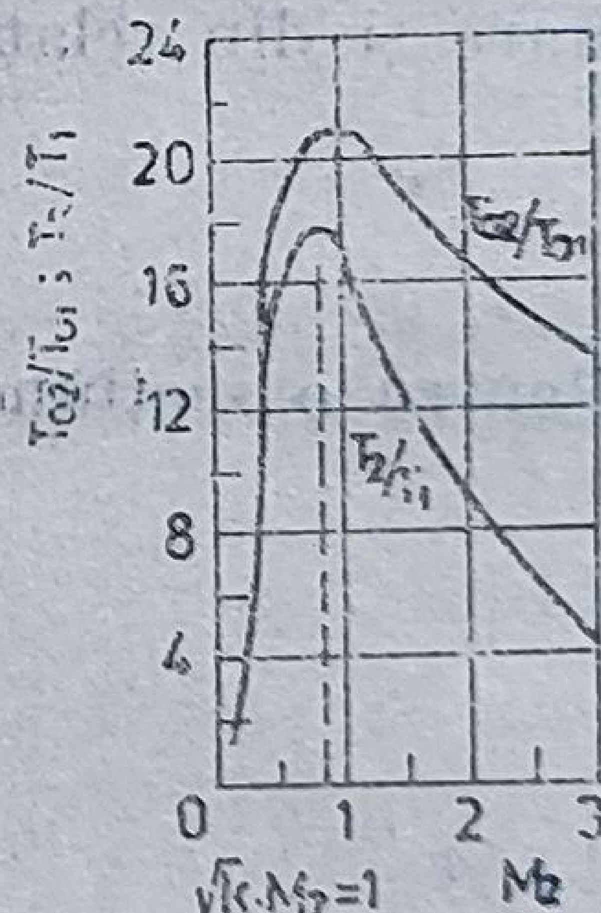


Fig. 6.14. Variația temperaturii, pentru $k = 1{,}4$, într-un ajutaj termic.

Cantitatea de căldură ce trebuie să fie transmisă gazului într-un ajutaj termic pentru a fi accelerat de la M_{cr_1} la $M_{cr_2} \leq 1$, considerînd valoarea medie a căldurii specifice, este

$$Q = \dot{m}(h_{02} - h_{01}) = c_p(T_{02} - T_{01})\dot{m} \text{ [J]} \tag{6.150}$$

Notînd cu q raportul

$$q = \frac{Q}{c_p T_{01}\,\dot{m}} = \frac{\dot{m}(h_{02}-h_{01})}{\dot{m}\,h_{01}} = \frac{T_{02}-T_{01}}{T_{01}} = \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1$$

Ca urmare, căldura ce trebuie dată debitului $\dot{m}$ de gaz pentru a se accelera de la M_{cr_1} la $M_{cr_2} \leq 1$ va fi

$$Q = qc_p T_{01}\dot{m} = q\dot{m}h_{01} \ [J]$$

Ținînd seama de relația $T_{02}/T_{01} = f(M_{cr})$ se obține:

$$q = \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 = \frac{(M^2_{cr_2} - M^2_{cr_1})(1 - M^2_{cr_1} \cdot M^2_{cr_2})}{M^2_{cr_1}(1 + M^2_{cr_2})} \quad (6.151)$$

Valoarea maximă a lui q este atunci cînd $M_{cr_2} = 1$ și are expresia

$$q_{max} = \left[\frac{1 - M^2_{cr_1}}{2M_{cr_1}}\right]^2_{M_{cr_2}=1} \quad (6.152)$$

Cantitatea de căldură necesară pentru a se obține într-un ajutaj termic o viteză egală cu viteza critică scade odată cu creșterea vitezei gazului la intrare (M_1). În figura 6.15 se prezintă dependența lui q_{max} de M_{cr_1}. După cum se vede, cu cît M_{cr_1} are valori mai mici cu atît q_{max} este mai mare. Viteza maximă de ieșire a gazului dintr-un ajutaj termic depinde de criteriul Mach (M_1) în secțiunea inițială și din (6.148) pentru $M_2 = \infty$ se obține

$$\frac{w_{max}}{w_1} = 1 + \frac{1}{kM_1^2} \quad (6.153)$$

Pe lîngă cele patru metode de obținere a unei viteze supersonice și anume cu un ajutaj geometric, de debit, mecanic sau termic, se pot utiliza și metode combinate. De exemplu, o metodă combinată simplă este aceea de a utiliza pentru obținerea vitezei sonice un ajutaj mecanic sau termic, iar obținerea în continuare a vitezei supersonice să se facă cu partea divergentă corespunzătoare ajutajului geometric. Realizabil relativ ușor, acest ajutaj combinat (fig. 6.16) poartă denumirea de *ajutaj termic-geometric* sau *semi-termic*.

În acest ajutaj semi-termic, secțiunea *1—2* este un ajutaj termic unde curentul de gaz, care are la intrare viteza subsonică ($M_{cr_1} < 1$), este accelerat termic pînă la criza termică a curgerii ($M_{cr_2} = 1$), într-o conductă de secțiune constantă. În continuare, accelerarea curentului pînă la $M_{cr_3} > 1$ se face cu ajutorul părții divergente a unui ajutaj geometric. Calculul unui astfel de ajutaj se face pentru porțiunea subsonică după legile ajutajului termic, iar calculul părții divergente se face după criteriile ajutajului geometric. Comparînd ajutajul semi-termic cu cel geometric pentru aceeași valoare a entalpiei finale h_{03} se constată că entalpia h_{02} (în secțiunea critică) trebuie să aibă aceeași valoare pentru ambele ajutaje deci $(h_{02} - h_{03})_{geometric} = (h_{02} - h_{03})_{semi\text{-}termic}$. În ajutajul semi-termic, gazul se încălzește pînă la h_{02} de la pereți sau de la o sursă de căldură internă, deci el poate intra ca orice entalpie $h'_{01} \leq h_{02}$, diferența $h'_{01} - h_{02}$ urmînd a fi primită de gaz în timpul parcurgerii distanței *1—2*. Viteza de curgere a gazului în secțiunea critică are aceeași valoare atît la ajutajul geometric cît și la cel semi-termic, dar variația vitezei în porțiunea subsonică este diferită, avînd în vedere că ea variază după alte legi la ajuta-

jul semi-termic unde gazul primește căldură în timpul accelerării, față de cel geometric în care accelerarea are loc adiabat.

Se consideră pentru exemplificare un ajutaj semi-termic cu $M_{cr_1} = 0{,}2$ ce destinde gazul de la p_{01} la p_3 (figura 6.16). Cantitatea de căldură

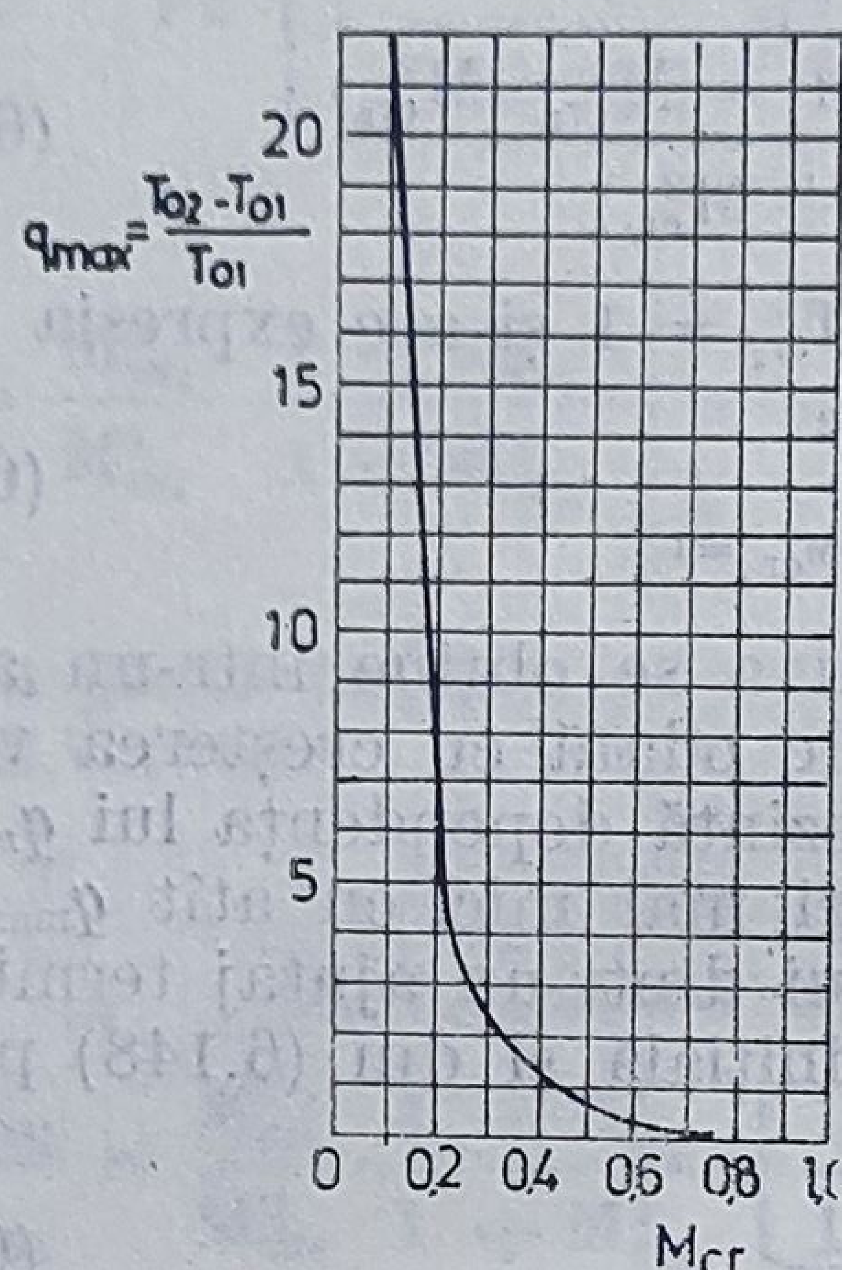


Fig. 6.15. Căldura primită de un gaz perfect într-un ajutaj termic.

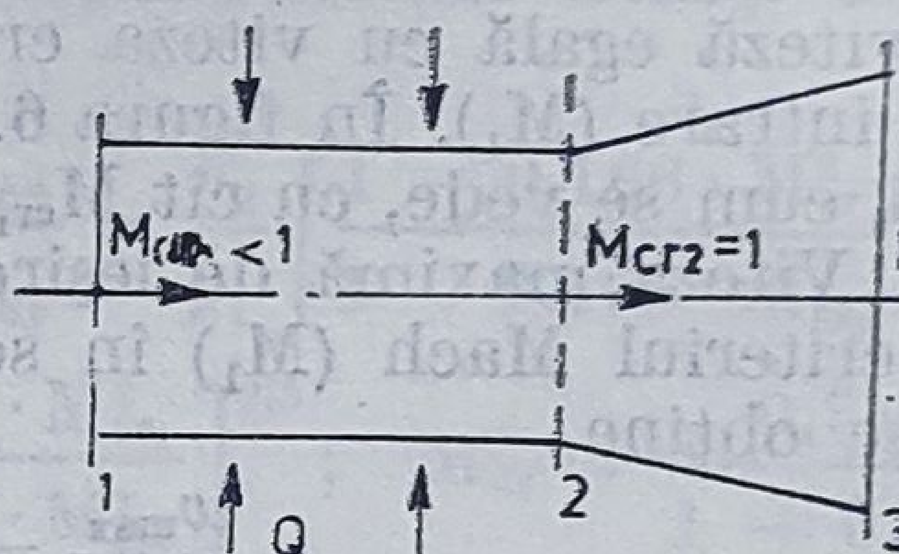


Fig. 6.16. Ajutaj semi-termic (termic-geometric).

ce trebuie dată pe conducta de secțiune constantă pentru ca $M_{cr_2} = 1$ și un gaz perfect (figura 6.16) este

$$Q = q_{max} \dot{m} h_{01} \ [J]$$

în care:

$$q_{max} = \left[\frac{1 - M_{cr_1}^2}{2M_{cr_1}}\right]^2 = 5{,}75$$

Căderea de presiune frînată în ajutajul semi-termic notată cu σ_{st} pe porțiunea $1-2$ pentru $M_{cr_2} = 1$ și $M_{cr_1} = 0{,}2$ este

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \sigma_{st} = \frac{1 - M_{cr_1}^2}{2}\left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2}{\frac{2}{k+1}}\right]^{\frac{1}{k-1}} = 0{,}82$$

Pe porțiunea $2-3$ a ajutajului semi-termic, care corespunde unui ajutaj geometric, presiunea frînată, în absența frecării, are o valoare constantă, deci $p_{03} = p_{02}$. Ca urmare, notînd cu $\sigma_g = p_{03}/p_{02} = 1$, căderea totală de presiune frînată în ajutajul semi-termic este

$$\sigma_{tot} = \frac{p_{03}}{p_{02}} \frac{p_{02}}{p_{01}} = \sigma_{st}\sigma_g = \sigma_{st}.$$

Presiunea momentană în secțiunea de ieșire a ajutajului semi-termic va fi

$$\frac{p_3}{p_{01}} = \frac{p_3}{p_{03}} \frac{p_{03}}{p_{02}} \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_3}{p_{03}} \sigma_g \sigma_{st} = \frac{p_3}{p_{03}} \sigma_{st}.$$

Raportul dintre presiunea statică p_3 și presiunea frînată p_{03} se obține din relația (6.129) găsită în cazul ajutajului geometric deci :

$$\frac{p_3}{p_{01}} = \frac{p_3}{p_{03}} \sigma_{st} = \sigma_{st} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \mathrm{M}^2_{\mathrm{cr}_3}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

În cazul cînd destinderea ar fi avut loc de la presiunea p_{01} la p_3 într-un ajutaj geometric, s-ar fi obținut o viteză $\mathrm{M}_{\mathrm{cr}_{3g}}$ dată de relația (6.129)

$$\left.\frac{p_3}{p_{01}}\right|_g = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \mathrm{M}^2_{\mathrm{cr}_{3g}}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Deoarece căderea de presiune p_3/p_{01} este aceeași atît în ajutorul geometric cît și în cel termic, trebuie să existe egalitatea

$$\left[1 - \frac{k-1}{k+1} \mathrm{M}^2_{\mathrm{cr}_{3_g}}\right]^{\frac{k}{k-1}} = \sigma_{st} \left[1 - \frac{k-1}{k+1} \mathrm{M}^2_{\mathrm{cr}_3}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Pentru a fi satisfăcută egalitatea de mai sus, este obligatoriu ca $\mathrm{M}_{\mathrm{cr}_{3g}} > \mathrm{M}_{\mathrm{cr}_3}$, deci viteza de ieșire w_3 a gazului din ajutajul geometric pentru o cădere de presiune p_3/p_{01} să fie mai mare decît viteza de ieșire w_3 din ajutajul semi-termic, pentru aceeași cădere de presiune. Sau, pentru a se realiza aceeași viteză de ieșire căderea de presiune în ajutajul semi-termic trebuie să fie mai mare decît aceea din ajutajul geometric.

6.6. CURGEREA GAZELOR PERFECTE PRIN LABIRINȚI DE ETANȘARE

În construcția turbomașinilor, etanșeitatea carcasei la arbore nu poate fi realizată prin suprafețe cu contact direct. Ca urmare se utilizează etanșări cu gaze sau așa-numitul labirint, prezentat schematic în figura 6.17. Punctul 0 corespunde interiorului turbomașinii, unde gazul are o presiune p_0, iar punctul $2n$ corespunde mediului exterior unde presiunea este p_{2n}, existînd inegalitatea $p_0 > p_{2n}$. Ca urmare a diferenței de presiune $p_0 - p_{2n}$ va avea loc o curgere a gazului prin labirintul respectiv, astfel încît în camerele *2*, *4*, *6*, ... *2n* se va stabili o presiune care să satisfacă relația

$$p_0 > p_2 > p_4 > \ldots > p_{2n-2} > p_{2n}$$

Prin fiecare strangulare *1*, *3*, *5*, ..., $2n-1$ va curge același debit masic de gaz. Numărul de camere și de strangulări necesar ca să realizeze

în labirint căderea de presiune impusă etanşării constituie calculul lui. Se admte că pentru fiecare secţiune caracteristică 0—1, 1—2, 2—3, et., precum şi pentru ansamblul labirintului, sînt îndeplinite condiţiile de adiabaticitate ($Q = 0$) şi de nivel constant (z = const). Ca urmare, ecuaţia

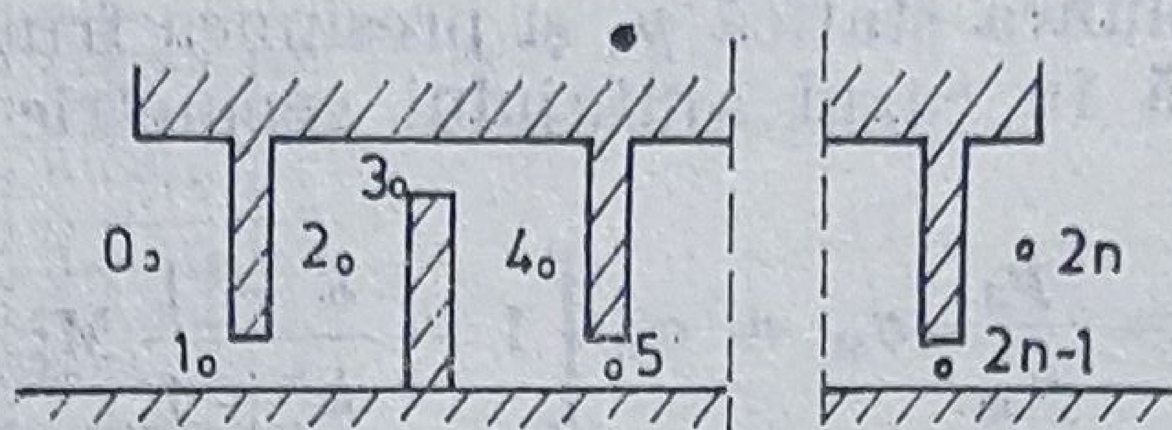


Fig. 6.17. Schemă de labirint de etanşare.

entalpiei, exprimată pentru o cameră sau pentru toate camerele ce formează labirintul, este

$$-\Delta h = -\int v \mathrm{d}p - l_{\mathrm{fr}} \tag{6.154}$$

Condiţiile în care are loc curgerea gazului între secţiunile 0—1, 2—3, 4—5, etc. sînt diferite de cele între secţiunile 1—2, 3—4 ... $2n - 1 - 2n$. Între secţiunile 0—1, 2—3, etc. curgerea are loc însoţită de o destindere adiabată deci cu o accelerare a curentului de gaz, proces care se poate considera că are loc fără frecare, deci izentrop, şi a cărei ecuaţie este

$$\frac{w_1^2 - w_0^2}{2} - (h_0 - h_1) = \int_2^1 - v\,\mathrm{d}p \tag{6.155}$$

Legătura dintre parametrii termofizici fiind $p_0 \cdot v_0^k = p_1 \cdot v_1^k =$ const. Ecuaţia de continuitate, respectată pentru toate secţiunile înguste de trecere, exprimată pentru regimul permanent, este

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_3}{v_3} = \ldots = \frac{w_{2n-1}}{v_{2n-1}} \tag{6.156}$$

Evoluţia gazului între secţiunile 1—2, 3—4 etc. este presupusă a fi izobară, energia cinetică disponibilă în punctele ,1 3, 5 etc. fiind consumată pentru învingerea lucrului mecanic de frecare. Deci are loc o frînare mecanică a curentului de gaz, iar ecuaţia caracteristică a acestei transformări are forma (6.157), scrisă pentru exemplificare pentru secţiunile 1 şi 2 :

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = h_2 - h_1 = l_{\mathrm{fr}} = \int_1^2 T \cdot \mathrm{d}s \tag{6.157}$$

Ca urmare, procesul termogazodinamic din labirint este reprezentat printr-o succesiune de adiabate izentrope, urmate fiecare de o compresie izobară. Aceste transformări au loc între două stări limită care vor repre-

zenta stările gazului în punctele 0, 2, 4 ... $2n-2$ şi respectiv 1, 3, 5 ... 2_{n-1}. Curba pe care se găsesc stările gazului în punctele pare 0, 2, 4 ... 2_{n-2} este izoentalpa ce trece prin punctul 0, deoarece entalpia frînată a curentului rămîne tot timpul constantă. Izoentalpa ce trece prin punctul 0 este dată de relaţia

$$h_{00} = h_0 + \frac{w_0^2}{2} = h_{02} = h_{04} = \ldots = h_{2n-2} \tag{6.158}$$

Stările gazului în punctele 1, 3, ..., 2_{n-1} se obţin din (6.155) şi (6.156), iar viteza de curgere din (6.159):

$$w_1 = \sqrt{2\left(h_0 + \frac{w_0^2}{2}\right) - h_{00}} \quad \text{[m/s]} \tag{6.159}$$

Ecuaţia (6.159) reprezintă chiar curba lui Fanno din figura 6.7, cu asimptota $(h_0 + w_0^2/2)$. Deci toate stările gazului în secţiunile înguste ale labirintului se vor găsi pe curba lui Fanno ce trece prin starea 0.

În cazul gazului perfect, determinarea curbei lui Fanno se poate face cu uşurinţă prin puncte, pe diagrama $h - s$.

Numărul z de camere de labrirint (o cameră de labirint este formată dintr-o secţiune îngustă urmată de o cameră de liniştire) pentru un debit dat şi o secţiune îngustă a cărei valoare se alege corespunde în principiu unui număr de destinderi izentrope, urmate de frînări izobare, ce se pot înscrie între cele două curbe limită, pornind din starea 0, pînă la presiunea atmosferică sau aceea ce domneşte în ultima cameră, însemnată pe figura 6.17 cu p_{2n}.

Pentru exemplificare, se prezintă mai jos metoda de calcul a unui labirint de gaze, a cărui formulă constructivă este dată în figura 6.18 În cazul cînd diferenţa de presiune, notată (ca în figura 6.18) cu $p_1 - p_2$ este mică şi numărul de camere de labirint este mare, se poate admite că între două camere succesive diferenţa de presiune $p - p'$ este atît de mică încît se poate accepta ipoteza că valorile greutăţii specifice (densităţii) a gazului la presiunea p şi p' sînt practic egale şi ca urmare viteza de curgere a gazului este dată de ecuaţia Bernoulli

$$w = \sqrt{2\,\frac{p - p'}{\rho}} \quad \text{[m/s]} \tag{6.160}$$

Notînd cu A secţiunea minimă de curgere (secţiunea îngustă) în m² şi cu $\dot{m}$ debitul de gaz ce trece prin labirint, în kg/s, ecuaţia de continuitate are expresia

$$\dot{m} = Aw\rho = A\sqrt{2\rho(p - p')} \quad \text{[kg/s]} \tag{6.161}$$

deci: $$(p - p')\rho = \left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^2 \frac{1}{2} = -\frac{\Delta p}{\Delta x}\rho = \frac{p^2}{2kA^2\Delta x} = \frac{B}{\Delta x} \tag{6.162}$$

în care $B = p^2/2kA^2 = \text{const.}$ pentru $\Delta p \to 0$:

$$-p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{B}{\Delta x} \tag{6.163}$$

Prin integrare de la p la p' și de la x_1 la x_2 se obține

$$p_1^2 - p_2^2 = 2B\frac{x_2 - x_1}{\Delta x} \tag{6.164}$$

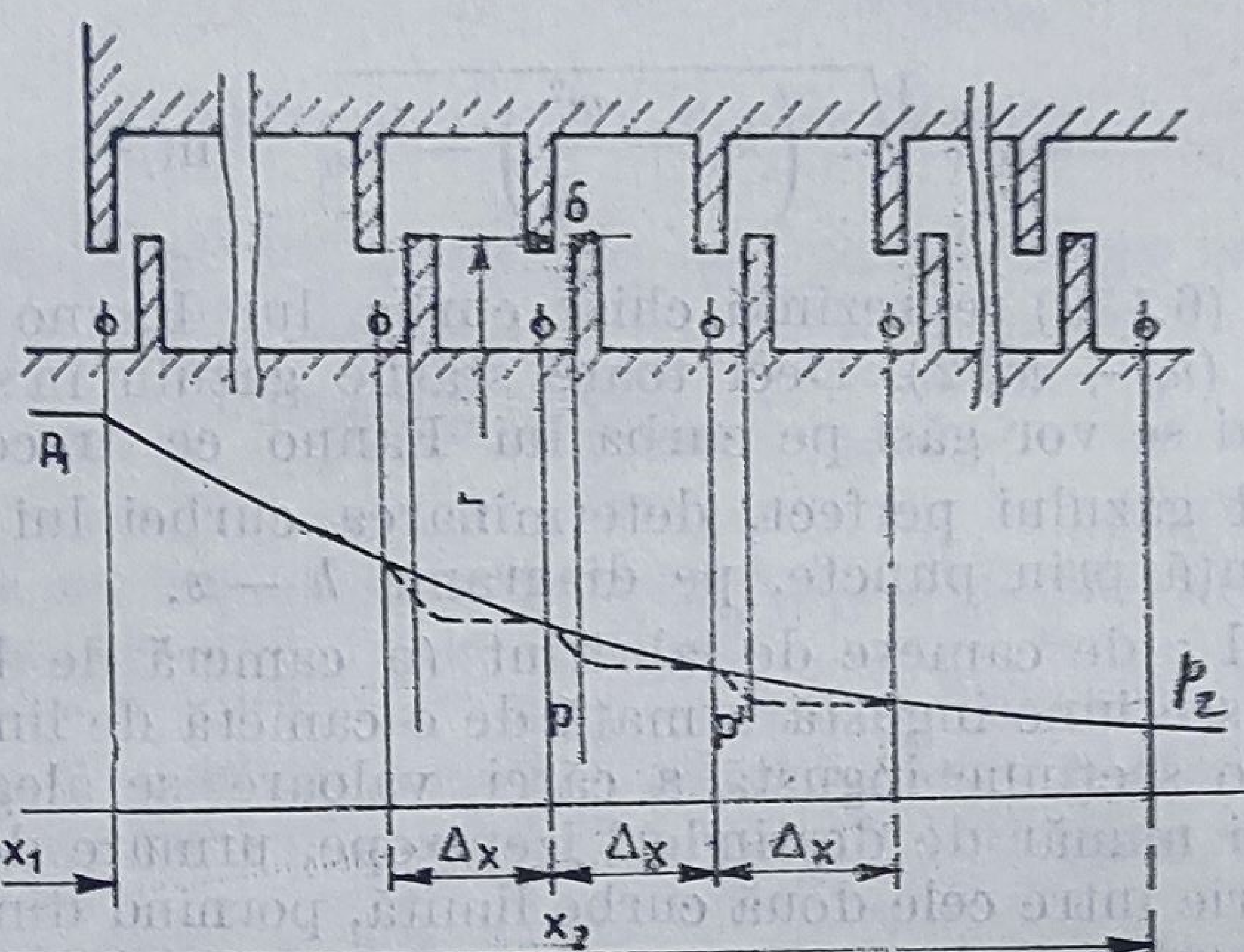


Fig. 6.18. Variația presiunii gazului într-un labirint de etanșare.

Cum $(x_2 - x_1)/\Delta x = z$ este numărul de camere de labirint, iar $1/\rho = kp$ (pentru destinderea izoentalpă), debitul masic este

$$\dot{m} = A\sqrt{\frac{k}{Z}(p_1^2 - p_2^2)} = \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{Zpv_1}}\ \text{[kg/s]} \tag{6.165}$$

Secțiunea de curgere $A = 2\pi r\delta$, deci :

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{Z}(p_1^2 - p_2^2)A_1 \cdot A_2}\ \ \text{[kg/s]} \tag{6.166}$$

în care $A_1 = 2\pi r_1\delta$ și $A_2 = 2\pi r_2\delta$ (cu r_1 și r_2 notîndu-se raza secțiunii minime la intrare și ieșire din labirint). În cazul cînd $r_1 = r_2$, așa cum este în figura 6.18, desigur că $A_1 = A_2$.

În cazul cînd diferența de presiune $p_1 - p_2$ este mai mare sau egală cu $p_1 - p_{cr}$, în ultima cameră de labirint se poate atinge viteza sunetului. Verificarea atingerii vitezei sunetului se face calculînd viteza de curgere a gazului prin ultima cameră de labirint cu ecuația de continuitate și a vitezei sunetului în gazul de stare respectivă :

$$w_2 = \frac{\dot{m}v_2}{A}\ ; \quad v_2 = \frac{p_1 v_1}{p_2}\ ; \quad a_2 = \sqrt{kp_2v_2}$$

Dacă $w_2 < a_2$, calculul debitului de gaz ce trece prin labirintul compus din Z camere (valoarea aleasă), sau al numărului Z de camere necesar pentru ca debitul de gaz să aibă o valoare impusă $\dot{m}$, se face cu relațiile (6.160)...(6.166).

Dacă $w_2 \geqslant a_2$, calculul se face cu relațiile de mai jos. Se consideră că în ultima cameră a labirintului, starea gazului este caracterizată prin presiunea p_x și volumul specific v_x, în care caz debitul ce trece prin ea este debitul maxim ce trece printr-un ajutaj geometric sonic dat de relația (v. cap. 5.1.)

$$\dot{m} = A\sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}\cdot\sqrt{p_x\rho_x} = \alpha A\sqrt{\frac{p_x}{v_x}} \tag{6.167}$$

Pentru $k = 1{,}4$ se obține $\alpha \approx 2$. Pentru cele $z - 1$ camere de labirint precedente se poate utiliza relația (6.166) care în cazul cînd $A_1 = A_2$ devine

$$\dot{m} = A\sqrt{\frac{k}{z-1}(p_1^2 - p_x^2)} \quad \text{[kg/s]} \tag{6.168}$$

Deoarece curgerea este permanentă, prin egalarea relației (6.167) cu (6.168) se obține presiunea p_x:

$$p_x^2 = \frac{p_1^2}{\alpha^2(Z-1)},$$

iar (6.167) devine

$$\dot{m} = A\sqrt{\frac{kp_1^2}{(Z-1)+\frac{1}{\alpha^2}}} \quad \text{[kg/s]} \tag{6.169}$$

Pentru $\alpha = 2$ și $k = 1$ (pentru o transformare izentalpă $p_1v_1 = \text{ct}$), relația (6.169) capătă forma finală

$$\dot{m} = A\sqrt{\frac{p_1}{(Z+1{,}5)v_1}} \quad \text{[kg/s]} \tag{6.170}$$

6.7. CALCULUL MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE UNUI GAZ PERFECT ÎN CURGERE CU AJUTORUL FUNCȚIILOR GAZODINAMICE

Calculul mărimilor caracteristice ale gazului perfect în curgere ce efectuează și un proces termodinamic se poate face și cu ajutorul unor funcții a căror variabilă independentă este criteriul Mach sub formele M sau M_{cr}.

Astfel, raportul dintre temperatura frînată şi momentană, la curgerea adiabată a unui gaz perfect este dat de relaţia

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \qquad (6.171)$$

Deci temperatura momentană a gazului în curgere, în funcţie de temperatura frînată T_0 a lui, poate fi exprimată prin

$$T(M_{cr}) = 1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2 \qquad (6.172)$$

$T(M_{cr})$ fiind o funcţie monoton descrescătoare de la valoarea unu (ce corespunde lui $M_{cr} = 0$) la zero pentru $M_{cr\,max}^2 = (k+1)/(k-1)$. De asemenea, presiunea momentană în funcţie de valoarea frînată pentru o curgere adiabat izentropă este dată de relaţia (6.173):

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \qquad (6.173)$$

De asemenea densitatea ρ a gazuluki la p şi T, în funcţie de densitatea ρ_0 la presiunea şi temperatura frînată p_0 şi T_0 este dată de relaţia

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \qquad (6.174)$$

Ca şi în cazul temperaturii, se pot introduce funcţiile

$$\frac{p}{p_0} = p(M_{cr}); \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \rho(M_{cr})$$

Pentru un gaz perfect sau gaz real asimilat celui perfect, ce ascultă de legea $p = \rho RT$, se poate obţine relaţia dintre funcţiile $T(M_{cr})$, $p(M_{cr})$ şi $\rho(M_{cr})$, denumite funcţii gazodinamice ale gazului perfect, sub forma (6.175):

$$\rho(M_{cr}) = \frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T} = \frac{p(M_{cr})}{T(M_{cr})} \qquad (6.175)$$

Determinarea funcţiilor $T(M_{cr})$, $p(M_{cr})$ şi $\rho(M_{cr})$, denumite „funcţiile gazodinamice ale gazului perfect", pentru diferite valori M_{cr}, se poate face şi cu ajutorul tabelului 6.2.

După cum se vede, funcţiile gazodinamice de temperatură, presiune şi densitate, pentru un gaz perfect cu $k = 1,4$ devin

$$T(M_{cr}) = 1 - 0,166 \cdot M_{cr}^2$$

$$p(M_{cr}) = [1 - 0,166 \cdot M_{cr}^2]^{3,5}$$

$$\rho(M_{cr}) = [1 - 0,166 \cdot M_{cr}^2]^{2,5}$$

Tabelul 6.2.

Valoarea numerică a funcţiilor gazodinamice pentru k = 1,4

M_{cr}	$T(M_{cr})$	$p(M_{cr})$	$\rho(M_{cr})$	$q(M_{cr})$	$y(M_{cr})$	$f(M_{cr})$	$r(M_{cr})$	M
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,9990	0,9999	0,0158	0,0158	1,0000	0,9999	0,0091
0,02	0,9999	0,9990	0,9998	0,0315	0,0316	1,0002	0,9996	0,0183
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0473	0,0473	1,0006	0,9989	0,0274
0,04	0,9997	0,9990	0,9993	0,0631	0,0631	1,0009	0,9981	0,0365
0,05	0,9996	p,9986	0,9990	0,0788	0,0789	1,0015	0,9971	0,0457
0,06	0,9994	0,9979	0,9985	0,0945	0,0947	1,0021	0,9958	0,0548
0,07	0,9992	0,9971	0,9979	0,1102	0,1105	1,0028	0,9943	0,0639
0,08	0,9989	0,9963	0,9974	0,1259	0,1263	1,0038	0,9925	0,0731
0,09	0,9987	0,9953	0,9967	0,1415	0,1422	1,0047	0,9906	0,0822
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,1580	1,0058	0,9885	0,0914
0,11	0,9980	0,9920	0,9949	0,1726	0,1739	1,0070	0,9860	0,1005
0,12	0,9976	0,9916	0,9940	0,1882	0,1897	1,0083	0,9834	0,1097
0,13	0,9972	0,9901	0,9929	0,2036	0,2056	1,0100	0,9806	0,1190
0,14	0,9967	0,9886	0,9918	0,2190	0,2216	1,0113	0,9776	0,1280
0,15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	2,2375	1,0129	0,9744	0,1372
0,16	0,9957	0,9851	0,9893	0,2497	0,2535	1,0147	0,9709	0,1460
0,17	0,9952	0,9832	0,9880	0,2649	0,2695	1,0165	0,9673	0,1560
0,18	0,9946	0,9812	0,9866	0,2801	0,2855	1,0185	0,9634	0,1650
0,19	0,9940	0,9791	0,9850	0,2925	0,3015	1,0206	0,9594	0,1740
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,3176	1,0227	0,9551	0,1830
0,21	0,9927	0,9745	0,9817	0,3252	0,3337	1,0250	0,9507	0,1920
0,22	0,9919	0,9720	0,9799	0,3401	0,3499	1,0274	0,9461	0,2020
0,23	0,9912	0,9695	0,9781	0,3549	0,3660	1,0298	0,9414	0,2109
0,24	0,9904	0,9668	0,9762	0,3696	0,3823	1,0315	0,9373	0,2202
0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,3985	1,0350	0,9314	0,2290
0,26	0,9887	0,9611	0,9721	0,3987	0,4148	1,0378	0,9261	0,2387
0,27	0,9879	0,9581	0,9699	0,4131	0,4311	1,0406	0,9207	0,2480
0,28	0,9869	0,9550	0,9677	0,4274	0,4475	1,0435	0,9152	0,2573
0,29	0,9860	0,9518	0,9653	0,4416	0,4640	1,0465	0,9095	0,2670
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,4804	1,0496	0,9037	0,2760
0,35	0,9766	0,9303	0,9497	0,5243	0,5636	1,0661	0,8727	0,3228
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,6482	1,0842	0,8391	0,3701
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,7346	1,1036	0,8035	0,4179
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,8230	1,1239	0,7666	0,4663
0,55	0,9496	0,8344	0,8797	0,7623	0,9136	1,1445	0,7290	0,5152
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	1,0069	1,1651	0,6912	0,5649
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	1,1030	1,1852	0,6535	0,6154
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	1,2024	1,2042	0,6163	0,6688
0,75	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	1,3054	1,2216	0,5800	0,7192
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	1,4126	1,2370	0,5447	0,7727

Tabelul 6.2. (continuare)

M_{cr}	$T(M_{cr})$	$p(M_{cr})$	$\rho(M_{cr})$	$q(M_{cr})$	$\nu(M_{cr})$	$f(M_{cr})$	$r(M_{cr})$	M
0,85	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	1,5243	1,2498	0,5107	0,8274
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	1,6412	1,2595	0,4779	0,8833
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	1,7638	1,2658	0,4466	0,9409
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,8929	1,2679	0,4176	1,0000
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	2,0291	1,2655	0,3882	1,0609
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	2,1734	1,2584	0,3613	1,1239
1,15	0,7896	0,4184	0,5366	0,9735	2,3269	1,2463	0,3357	1,1890
1,20	0,7600	0,3827	0,5053	0,9531	3,4906	1,2286	0,3115	1,2566
1,25	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	2,660	1,2054	0,2886	1,3268
1,30	0,7183	0,3142	0,4274	0,8969	2,8547	1,1765	0,2670	1,4002
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	3,0585	1,1417	0,2467	1,4769
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	3,2798	1,1012	0,2275	1,5575
1,45	0,6496	0,2209	0,3401	0,7778	3,5211	1,0551	0,2094	1,6423
1,50	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	3,7858	1,0037	0,1923	1,7321
1,55	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	4,0778	0,9472	0,1762	1,8273
1,60	0,5733	0,1427	0,2498	0,6282	4,4020	0,8861	0,1611	1,9290
1,65	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	4,7647	0,8210	0,1467	2,0380
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	5,1735	0,7524	0,1333	2,1555
1,75	0,4896	0,0821	0,1677	0,4630	5,6383	0,6813	0,1205	2,2841
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	6,1723	0,6085	0,1085	2,4227
1,85	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	6,7934	0,5349	0,0971	2,5766
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	7,5243	0,4617	0,0864	2,7481
1,95	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	8,3985	0,3899	0,0763	2,9414
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	9,464	0,3203	0,0668	3,1622
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	10,794	0,2556	0,0576	3,4190
2,10	0,2650	0,0096	0,0361	0,1198	12,500	0,1956	0,0490	3,7240
2,15	0,2296	0,0058	0,0253	0,0857	14,772	0,1420	0,0408	4,0961
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	17,949	0,0960	0,0331	4,5674
2,25	0,1563	0,00151	0,00966	0,0343	22,712	0,0585	0,0258	5,1958
2,30	0,1183	0,00057	0,00482	0,0175	30,658	0,0302	0,0189	6,1033
2,35	0,0796	0,00014	0,00170	0,0063	46,593	0,0111	0,0122	7,6053
2,40	0,0400	$0,128 \cdot 10^{-4}$	0,0032	0,0012	94,703	0,0022	0,0059	10,957
2,41	0,0320	$0,584 \cdot 10^{-5}$	0,00018	0,0007	118,94	0,0012	0,0047	12,306
2,42	0,0239	$0,214 \cdot 10^{-5}$	$0,88 \cdot 10^{-5}$	0,0003	159,65	0,0006	0,0035	14,287
2,43	0,0158	$0,49 \cdot 10^{-6}$	$0,31 \cdot 10^{-6}$	0,0001	242,16	0,0002	0,025	17,631
2,44	0,0077	$0,316 \cdot 10^{-7}$	$0,410 \cdot 10^{-6}$	$0,058 \cdot 10^{-4}$	499,16 ·	$0,285 \cdot 10^{-4}$	0,285 ·	0,0011
2,49	0	0	0	0		0	0	0

Pentru calcule aproximative se poate folosi și diagrama din figura 6.19 întocmită pentru un gaz cu exponent adiabat $k = 1,4$. Pe lîngă funcțiile gazodinamice ale temperaturii, presiunii și densității, se mai utilizează și o serie de funcții gazodinamice ajutătoare, de exemplu funcția

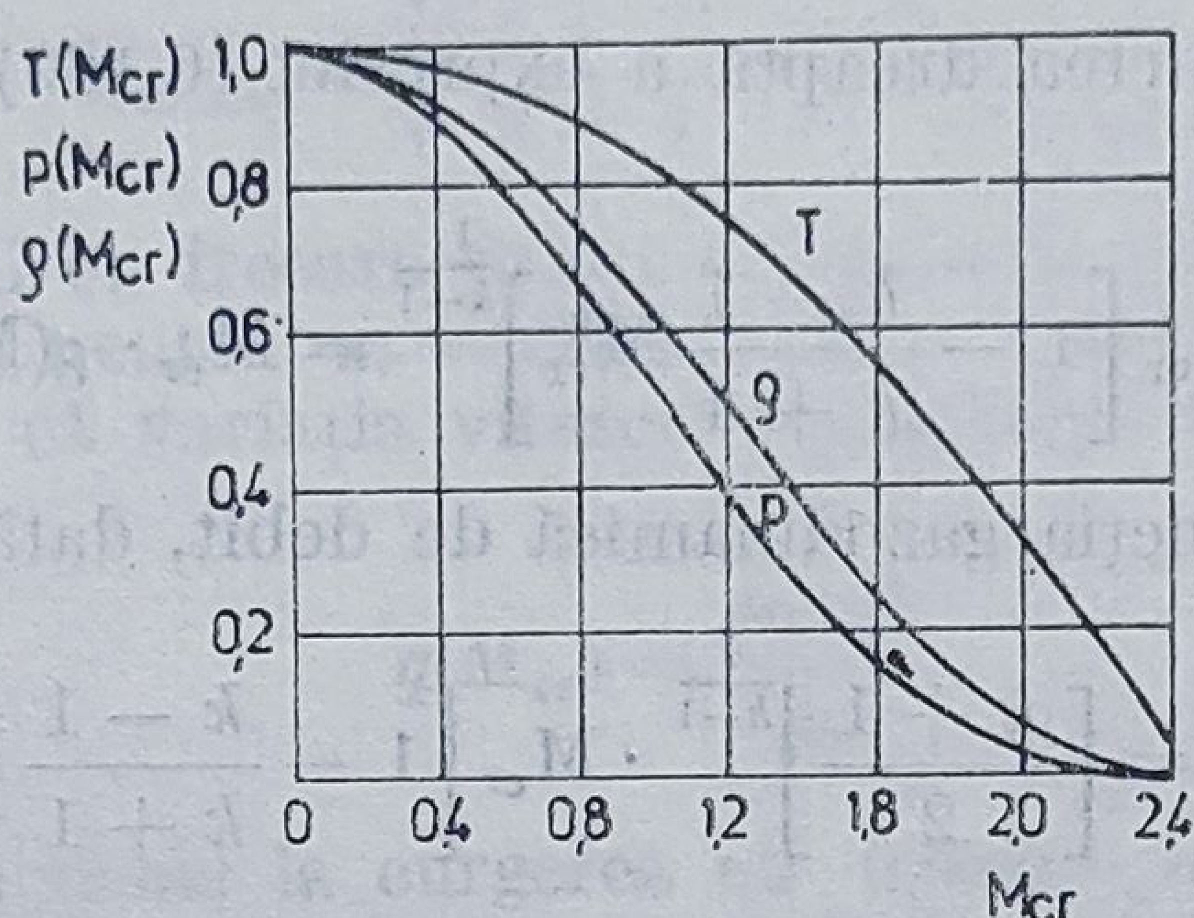


Fig. 6.19. Funcțiile gazodinamice $T(\mathrm{M_{cr}})$, $p(\mathrm{M_{cr}})$, și $\rho(\mathrm{M_{cr}})$.

gazodinamică de debit și funcția gazodinamică de viteză. Pentru o curgere în regim permanent stabilizat, ecuația continuității este

$$\dot{m} = Aw\rho$$

în care: $\dot{m}$ este debitul masic de gaz; ρ = densitatea (kg/m³) gazului; A = secțiunea canalului; ρ_0 = densitatea la presiunea și temperatura frînată a curentului. Pentru o curgere adiabată se cunosc relațiile

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{6.176}$$

sau:

$$\rho = \frac{p_0}{RT_0}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{6.177}$$

Viteza medie de curgere exprimată în funcție de $\mathrm{M_{cr}}$ este dată de relația

$$w = \mathrm{M}_{cr} \cdot a_{cr} = \mathrm{M}_{cr}\sqrt{2\frac{k}{k+1}RT_0} \tag{6.178}$$

Ca urmare, debitul masic de gaz se poate exprima în funcție de $\mathrm{M_{cr}}$ prin relația

$$\dot{m} = \frac{p_0}{R \cdot T_0}\sqrt{2\frac{k}{k+1}R \cdot T_0}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot A \cdot \mathrm{M}_{cr} \tag{6.179}$$

Înmulţind expresia (6.179) cu a_{cr} din (6.178) se obţine relaţia

$$\dot{m}a_{cr} = 2\frac{k}{k+1}p_0 A\,\mathrm{M}_{cr}\left[1-\frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{6.180}$$

Se observă că în partea dreaptă a expresiei (6.180) se regăseşte funcţia $\rho(\mathrm{M}_{cr})$ şi anume :

$$\mathrm{M}_{cr}\left[1-\frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} = \mathrm{M}_{cr}\cdot\rho(\mathrm{M}_{cr})$$

Notînd cu $q(\mathrm{M}_{cr})$ funcţia gazodinamică de debit, dată de expresia (6.181)

$$q(\mathrm{M}_{cr}) = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}}\cdot\mathrm{M}_{cr}\left[1-\frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{6.181}$$

sau

$$q(\mathrm{M}_{cr}) = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}}\cdot\mathrm{M}_{cr}\,\rho(\mathrm{M}_{cr})$$

pentru gazul perfect capătă forma :

$$q(\mathrm{M}_{cr}) = 1{,}2^{2,5}\cdot\mathrm{M}_{cr}\cdot\rho(\mathrm{M}_{cr}).$$

Deci şi funcţia termodinamică de debit depinde numai de criteriul M_{cr} al curgerii.

Înlocuind în relaţia (6.180) pe (6.181) şi expresia vitezei sunetului

$$a_{cr} = \sqrt{2\frac{k-1}{k+1}R\cdot T_0} \tag{6.182}$$

debitul de gaz devine

$$\dot{m} = V\frac{p_0 A q(\mathrm{M}_{cr})}{\sqrt{T_0}}, \tag{6.182}$$

în care cu V este notată expresia :

$$V = \sqrt{\frac{1}{R}}\sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$$

Funcţia de debit $q(\mathrm{M}_{cr})$ are valoarea egală cu 1 pentru $\mathrm{M}_{cr} = 1$ şi ca urmare are sensul fizic al unei densităţi masice adimensionale de forma

$$q(\mathrm{M}_{cr}) = \frac{\rho w}{\rho w|_{cr}}$$

S-a notat cu $\rho w|_{cr}$ valoarea maximă a densităţii masice, care corespunde vitezei sonice de curgere a gazului. Funcţia $q(\mathrm{M}_{cr})$ este invers proporţională cu secţiunea.

În figura 6.20 şi tabelul 6.2 este prezentată funcţia $q(M_{cr})$ în funcţie de M_{cr}. Creşterea lui M_{cr} de la 0 la 1 duce la creşterea lui $q(M_{cr})$ de la 0 la 1, iar pentru $1 < M_{cr} \leq M_{cr\,max}$ funcţia $q(M_{cr})$ scade din nou pînă la valoarea zero. Funcţia gazodinamică $q(M_{cr})$ devine zero pentru

$$M_{cr,max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2{,}449\Big|_{k=1,4}$$

La curgerea gazului cu frecare printr-o conductă cilindrică sau canal de secţiune constantă, pentru $\dot{m} = \text{Const}$, $T_0 = \text{Const.}$, şi $A = \text{Const.}$, din (6.182) se constată că variaţia vitezei în lungul conductei este de forma dată de expresia

$$q(M_{cr}) = \frac{\text{const}}{p_0} \tag{6.183}$$

Deoarece presiunea scade la curgerea cu frecare în lungul conductei, înseamnă că valoarea lui $q(M_{cr})$ creşte în lungul ei. După cum s-a văzut la curgerea subsonică, frecarea duce la o accelerare a vitezei pînă la apariţia vitezei sonore ($M_{cr} = 1$), iar la cea supersonică va duce la scăderea vitezei pînă la valoarea critică. Pentru a se exprima debitul de gaz în funcţie de presiunea momentană se face apel la relaţia dintre presiunea frînată p_0 şi cea momentană p dată de relaţia cunoscută

$$p_0 = \frac{p}{p(M_{cr})} = \frac{p}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} \tag{6.184}$$

Deci debitul de gaz se poate exprima prin relaţia

$$\dot{m} = V \frac{A y(M_{cr})}{\sqrt{T_0}} \tag{6.185}$$

în care $y(M_{cr})$ este funcţia masică a gazodinamicii dată de expresia (6.186) şi preprezentată în figura 6.21 şi tabelul 6.2 :

$$y(M_{cr}) = \frac{q(M_{cr})}{p(M_{cr})} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{M_{cr}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2} \tag{6.186}$$

După cum se vede din (6.186) funcţia $y(M_{cr})$ creşte cu creşterea lui M_{cr} şi pentru $M_{cr} = M_{cr,max}$ funcţia de debit $y_{cr}(M) \to \infty$

Ecuaţia cantităţii de mişcare scrisă numai pentru forţele de presiune pe direcţia de curgere, pentru o secţiune oarecare, este

$$\dot{m}w + pA = \dot{m}\left(w + \frac{p}{\rho \cdot w}\right) \tag{6.187}$$

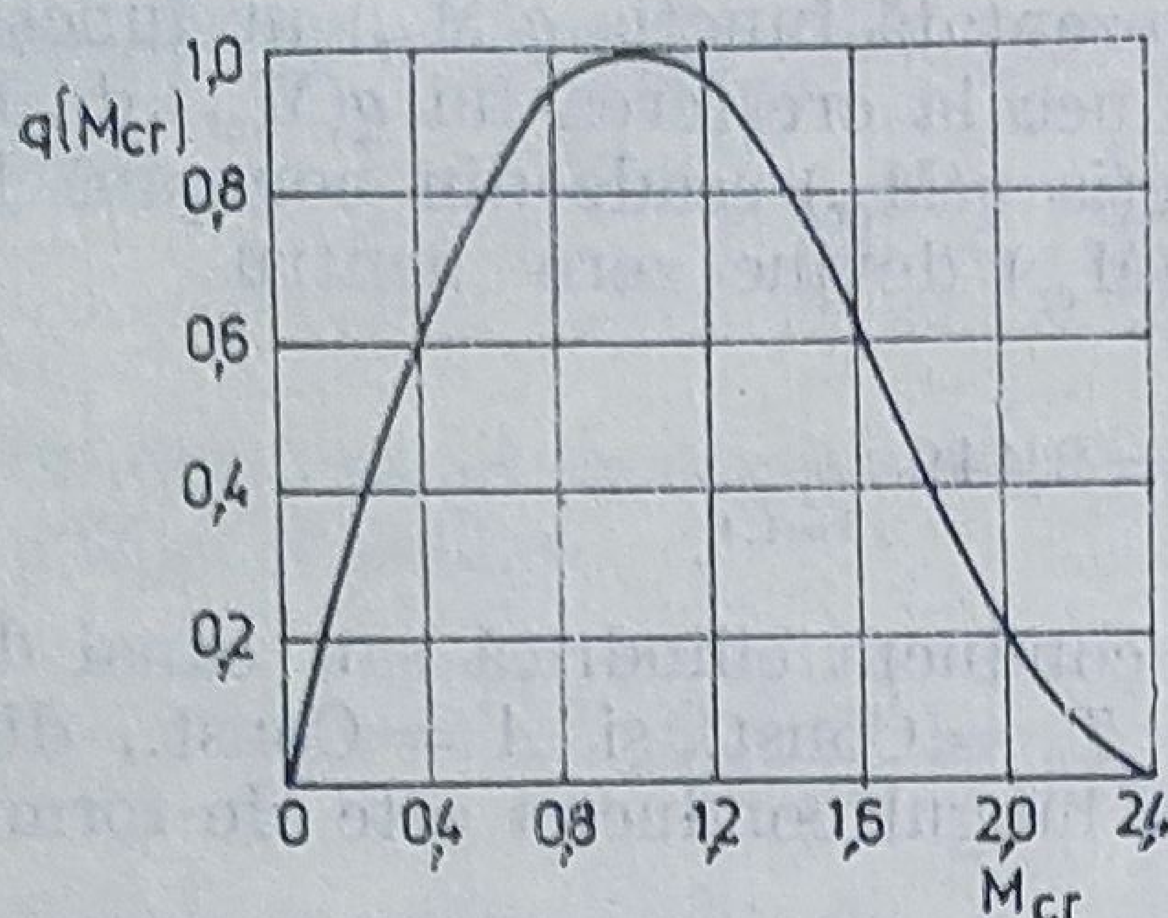


Fig. 6.20. Funcţia gazodinamică $q(M_{cr})$.

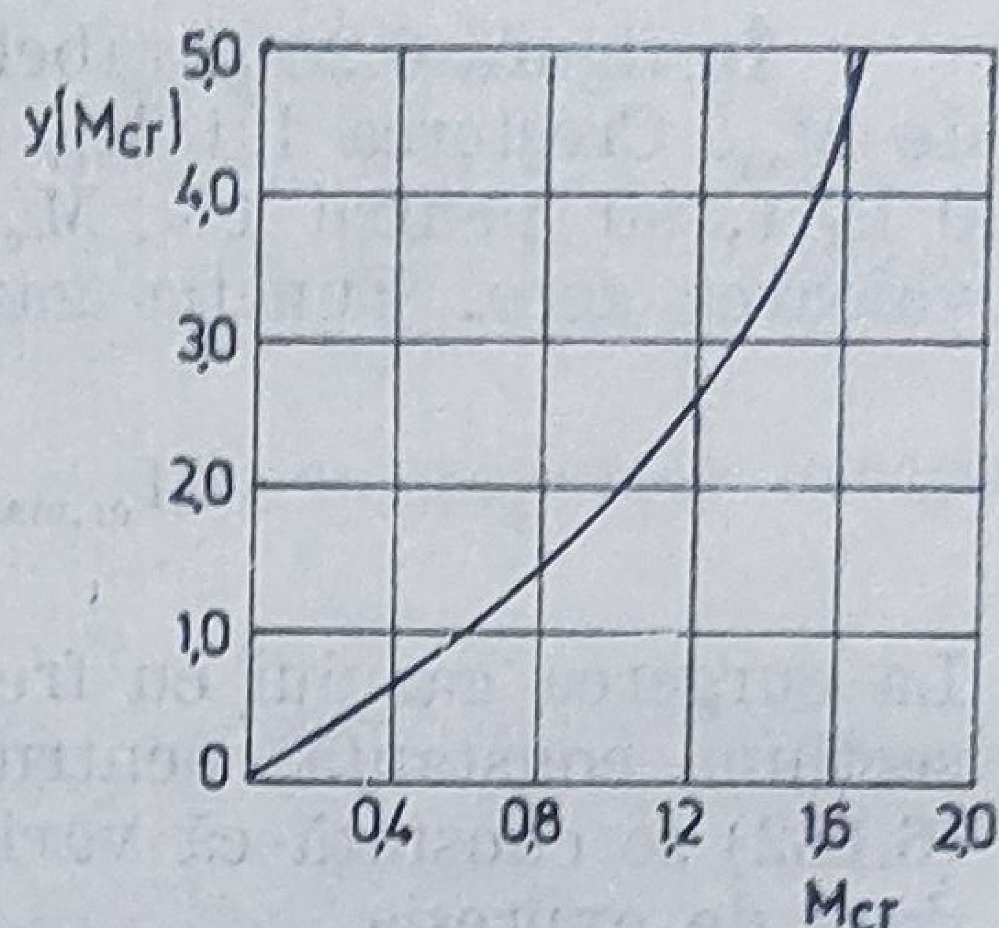


Fig. 6.21. Funcţia gazodinamică $y(M_{cr})$.

Deoarece pentru un gaz perfect

$$\frac{p}{\rho} = RT = RT_0\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\,M_{cr}^2\right] = \frac{k+1}{2k}\,a_{cr}^2\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\,M_{cr}^2\right]$$

Se obţine pentru (6.187) forma (6.188) ştiind că $w = M_{cr}\cdot a_{cr}$:

$$\dot{m}w + pA = \dot{m}\left[M_{cr}a_{cr} + \frac{k+1}{2k}\frac{a_{cr}}{M_{cr}}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,M_{cr}^2\right)\right]$$

$$\dot{m}w + pA = \frac{k+1}{2k}\,\dot{m}a_{cr}\cdot z(M_{cr}) \tag{6.188}$$

în care funcţia $z(M_{cr})$ este funcţia de impuls a dinamicii gazelor dată de expresia

$$z(M_{cr}) = M_{cr} + \frac{1}{M_{cr}}, \tag{6.189}$$

reprezentată şi în figura 6.22. În curgerile sub şi supersonice $z(M_{cr}) > 2$, valoarea minimă fiind pentru $M_{cr} = 1$ cînd $z(M_{cr}) = 2$. Funcţia $z(M_{cr})$ este utilizată în toate cazurile unde ecuaţia impulsului stă la baza fenomenului fizic, ca de exemplu: curgerea gazelor cu schimb de căldură, curgerea cu frecare, fenomenul undei de şoc, calculul forţelor dinamice ce acţionează asupra pereţilor canalului de palete al turbomaşinilor etc. Deoarece aplicaţiile tehnice ale impulsului sînt foarte numeroase şi diversificate, se mai utilizează pentru impuls şi alte două funcţii, care se obţin din (6.188) ţinînd seama de relaţia (6.180):

$$\dot{m}w + pA = p_0AM_{cr}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\,M_{cr}^2\right]^{\frac{1}{k-1}}\cdot z(M_{cr})$$

sau:

$$\dot{m}w + pA = \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{1}{k-1}} p_0Aq(M_{cr})\cdot z(M_{cr}) \tag{6.190}$$

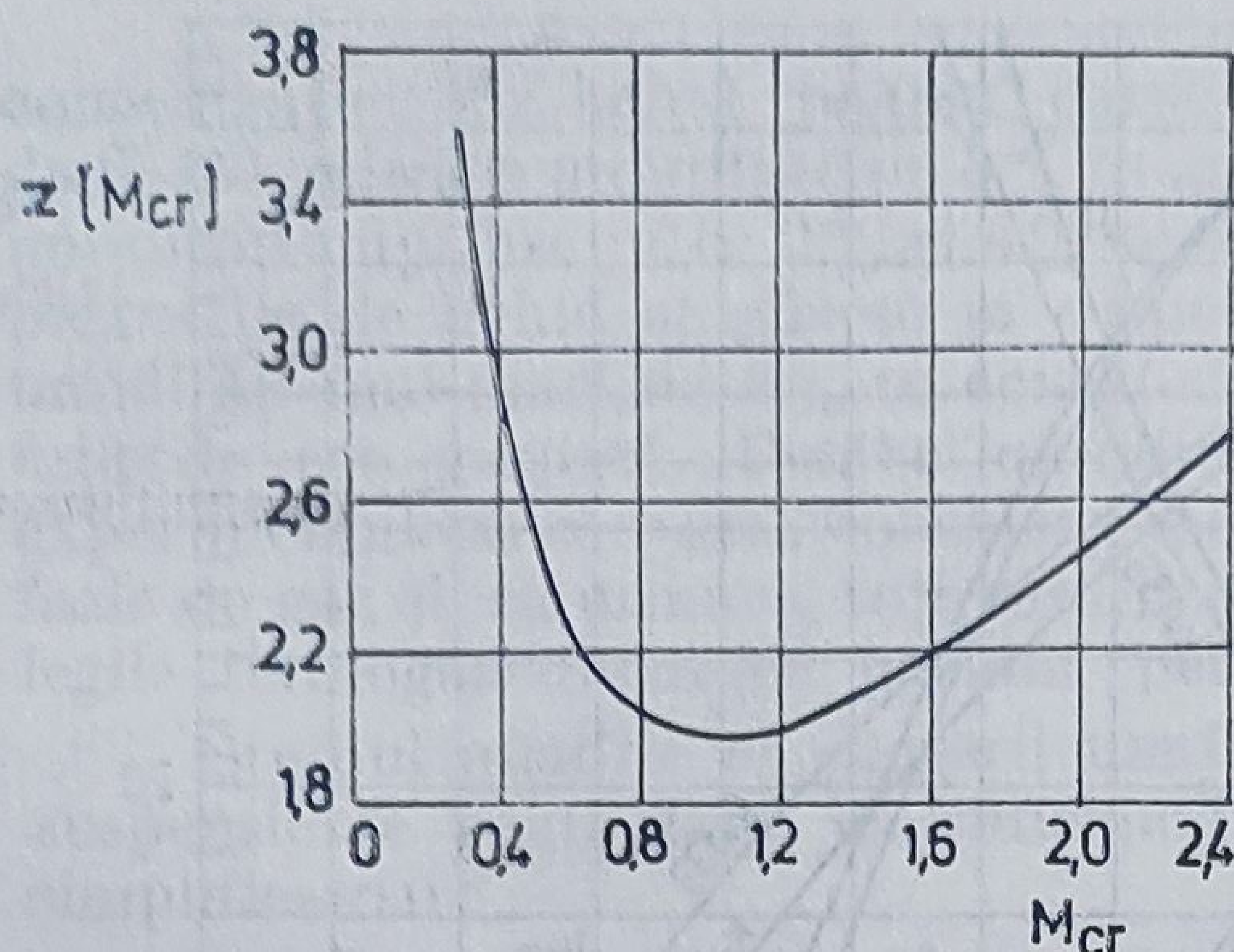


Fig. 6.22. Funcţia gazodinamică $z(M_{cr})$.

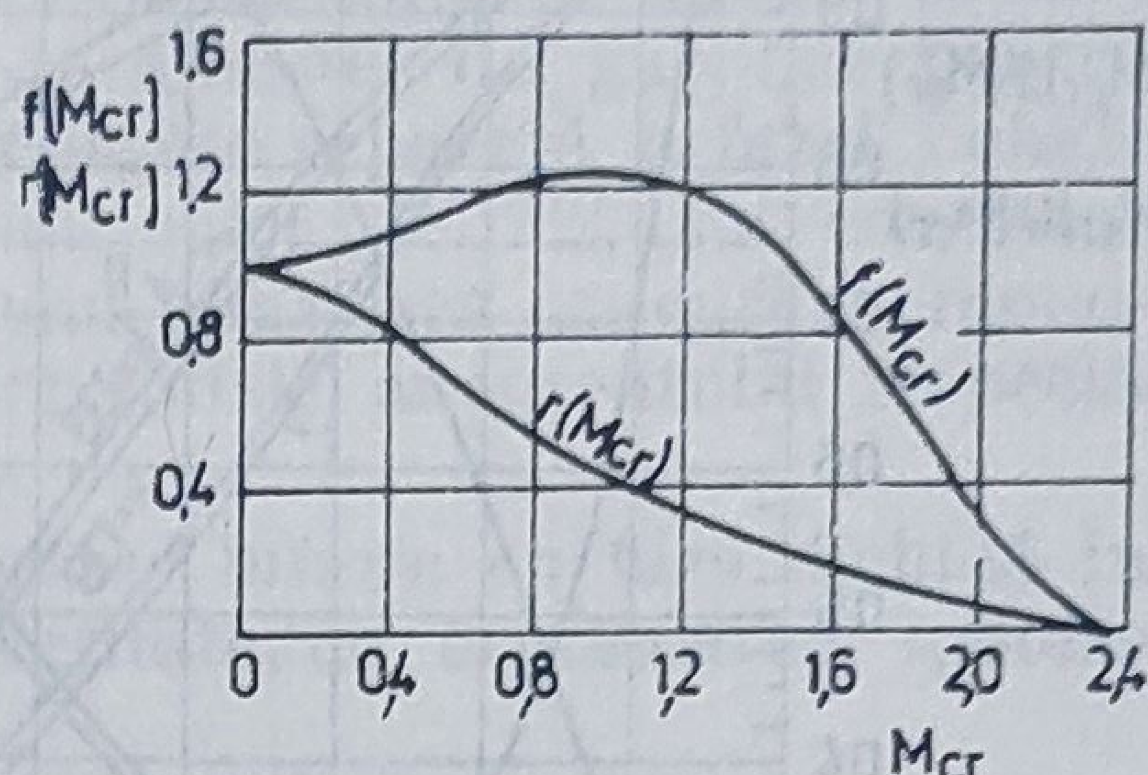


Fig. 6.23. Funcţiile gazodinamice $f(M_{cr})$ şi $r(M_{cr})$.

Relaţia (6.190), exprimată în funcţie de presiunea momentană, are forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{m}w + pA &= pA \frac{M_{cr}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2} z(M_{cr}) \\ \dot{m}w + pA &= \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot pAy(M_{cr})z(M_{cr}) \end{aligned}\right\} \tag{6.191}$$

Se obţin astfel funcţiile $f(M_{cr})$ şi $r(M_{cr})$, denumite funcţii complimentare de impuls ale dinamicii gazelor, şi a căror expresie este

$$f(M_{cr}) = \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{1}{k-1}} \cdot q(M_{cr}) \cdot z(M_{cr}) = (M_{cr}^2 - 1)\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{6.192}$$

$$r(M_{cr}) = \left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{1}{y(M_{cr}) \cdot z(M_{cr})} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr}^2}{M_{cr}^2 + 1} \tag{6.193}$$

Ca urmare, ecuaţia impulsului aplicat unui gaz în curgere poate fi exprimată în funcţie de $f(M_{cr})$ sau $r(M_{cr})$ cu relaţiile (6.194) sau (6.195):

$$\dot{m}w + pA = p_0 A f(M_{cr}) \tag{6.194}$$

$$\dot{m}w + pA = pA \frac{1}{r(M_{cr})} \tag{6.195}$$

În figura 6.23 şi tabelul 6.2 sînt prezentate funcţiile $f(M_{cr})$ şi $r(M_{cr})$ în funcţie de M_{cr} al curgerii într-o secţiune oarecare. În figura 6.24 sînt

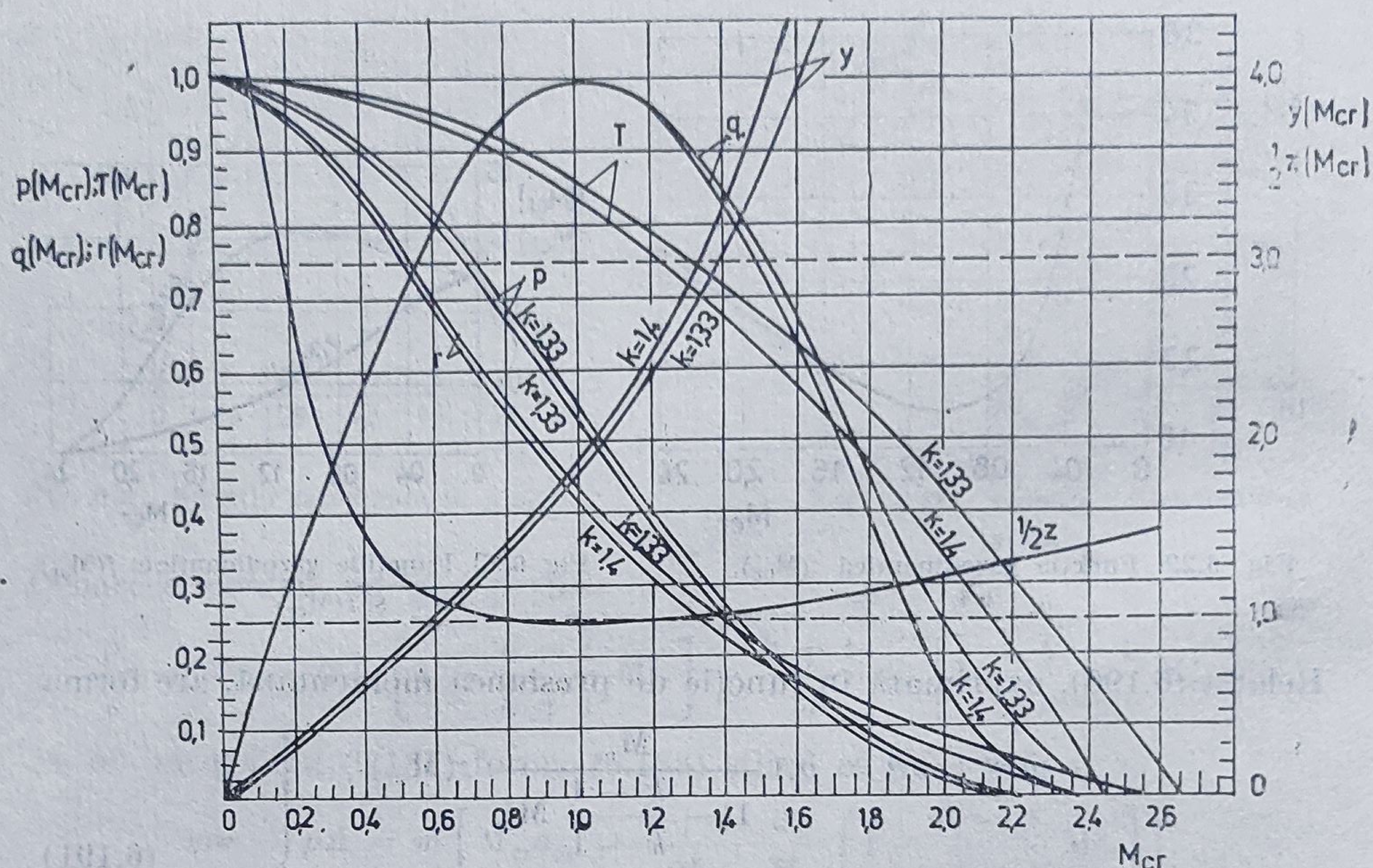


Fig. 6.24. Valorile funcţiilor gazodinamice pentru un gaz perfect ($k = 1{,}4$) în funcţie de M_{cr}.

reprezentate grafic, pentru calcule aproximative, funcţiile gazodinamice pentru $k = 1{,}4$ (gazul perfect) şi $k = 1{,}33$ (pentru vapori de apă supraîncălziţi).

6.8. CURGEREA PRIN CONDUCTE SAU CANALE A MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT CU O UMIDITATE $2\% < y_0 < 6\%$

Procesele termogazodinamice ce au loc în medii bifazice monocomponente diferă fundamental în cazul cînd fazele se găsesc în amestec intim (faza de lichid dispersată în faza de vapori), faţă de cazul cînd ele se găsesc separate. Cazul amestecului intim al celor două faze — lichid şi gazos — corespunde unei concentraţii reduse a masei lichide în amestec (umiditate redusă), pe cînd cel al curgerilor cu faze separate corespunde unei concentraţii mari a fazei lichide (umiditate mare). În general este dificil să se precizeze graniţa care separă cele două situaţii, deoarece procesele de schimb de masă interfazic (de vaporizare sau condensare) ce au loc în timpul curgerii fac ca o curgere de un anumit tip să treacă în timpul curgerii în alt tip. Ca o indicaţie a domeniului de separare a tipului de curgere, se recomandă, (ca urmare a cercetărilor experimentale) valoarea

concentrației de lichid pentru care în stratul limită apare o peliculă de lichid, adică o umiditate de 6% în amestecul de lichid și gaz. Deci pentru umidități cuprinse între 2% și 6% se consideră un amestec bifazic în care picăturile de lichid se găsesc în suspensie în amestec de gaz, iar pentru umidități mai mari de 6% se consideră o curgere separată a fazei lichide față de cea gazoasă. Pentru umidități mai mici de 2% s-a constatat experimental că se poate considera amestecul bifazic ca un curent monofazic de gaz și, ca urmare, toți parametrii termofizici ai curentului respectă legile termogazodinamicii gazului perfect.

Studiul analitic al curgerii unui amestec bifazic cu faza lichidă în suspensie se poate face, cu suficientă exactitate, cu următoarele ipoteze simplificatoare :

— particulele de lichid se consideră nedeformabile, daci ca o fază înghețată ;

— în timpul curgerii nu se modifică numărul de particule lichide din unitatea de cantitate a mediului bifazic.

Prima problemă ce trebuie rezolvată constă în determinarea influenței pe care o are particula lichidă asupra vitezei medii de deplasare a fazei gazoase. Modificările valorii parametrilor termofizici ai mediului bifazic precum și a vitezei de curgere a fazei gazoase sînt determinate de schimbul de căldură interfazic al mediului cu pereții canalului precum și de interacțiunea mecanică între faze. S-a constatat experimental că dacă raza picăturii lichide este foarte mică, viteza de curgere a ei este aproximativ egală cu aceea a fazei gazoase, deci nu are loc o interacțiune mecanică între faze.

Valoarea razei maxime a picăturii de lichid pentru ca interacțiunea interfazică să nu aibă loc se obține pe cale experimentală, ea depinzînd de natura fluidului. În general, ea corespunde acelei dimensiuni pentru care sînt satisfăcute legile de plutire a ei într-un curent de gaz (viteza de cădere a particulei 10,8 ... 27 m/h ; dimensiunea picăturii $d = 10 \ldots$ ... 100 μ).

Pentru a se studia comportarea amestecului bifazic ce curge printr-un canal sau conductă circulară, trebuie determinate relațiile ce caracterizează : transferul de căldură interfazic ; lucrul mecanic de frecare între faza lichidă și cea de vapori ; ecuația de continuitate ; leagea conservării energiei ; căderea de presiune datorată frecării mediului de pereții canalului.

Se consideră un canal prin care curge un amestec de gaz și particule înghețate de lichid (nedeformabile), cu notațiile din figura 6.25. În secțiunea de intrare A, gazul are parametrii notați cu indicele g, iar picăturile de lichid cu indicele l. Mărimile fazei gazoase și lichide la intrare sînt cunoscute și trebue determinate valorile pe care ele le capătă în secțiunea de ieșire $A + \mathrm{d}A$. Se consideră cazul general cînd $T_g \neq T_l$. Ca urmare a diferenței de temperatură, va avea loc un schimb de căldură interfazic. Mărimile termofizice și mecanice luate în calcule sînt valorile medii în secțiunile respective. Se acceptă ipoteza curgerii unidirecționale, iar canalul fiind de lungime mică se neglijează forțele de frecare precum și

schimbul de căldură cu pereții canalului, deci se consideră că are loc un proces adiabat-izentrop. Nu se ia în considerare interacțiunea dintre particulele lichide sau dintre ele și pereții conductei (fără strat limită lichid). Faza gazoasă se consideră că ascultă de legea generală a gazului perfect și se neglijează efectul volumului ocupat de particulele lichide în volumul fazei gazoase. Schimbul de căldură interfazic are loc numai convectiv, ca

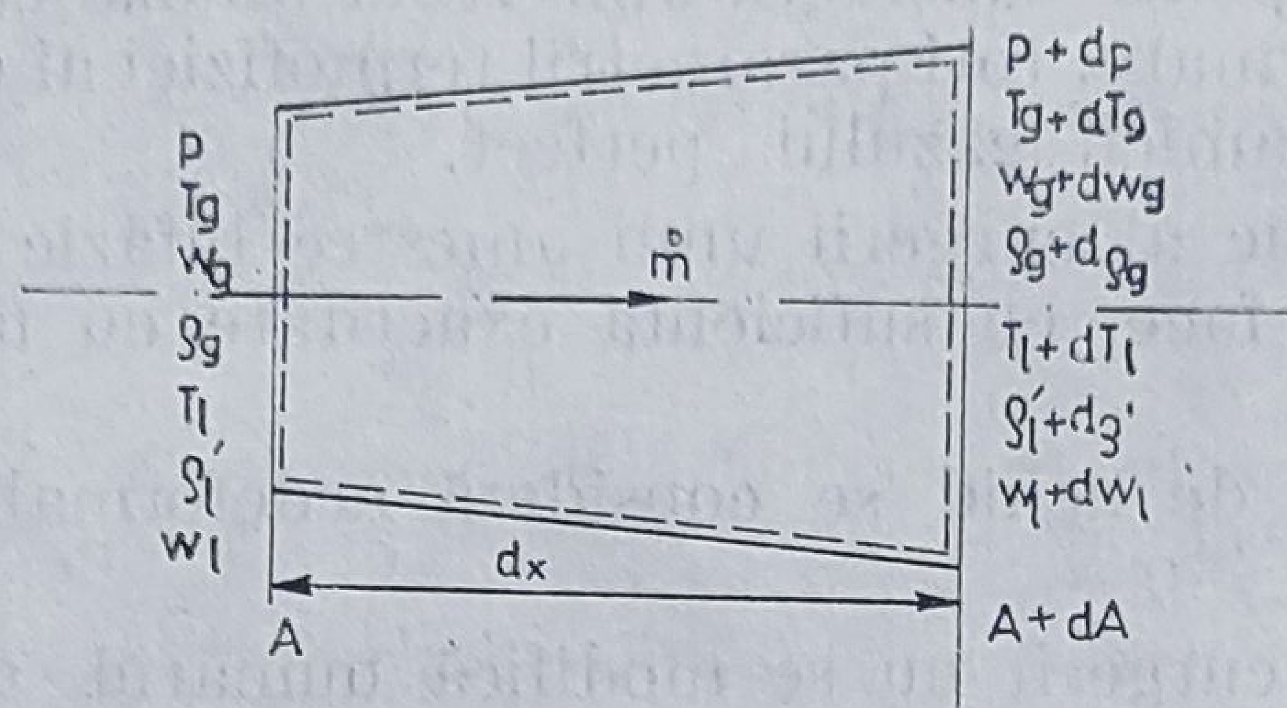


Fig. 6.25. Model fizic de curgere bifazică.

urmare a diferenței dintre temperatura particulei lichide față de a gazului.

Parametrii termofizici și dinamici ai celor două faze vor fi exprimați în funcție de secțiunile respective. Cu notațiile din figura 6.25, ecuația de continuitate pentru cele două faze a căror debit total este $\dot{m}$ este

$$\rho_g w_g A = (1 - x)\dot{m} \tag{6.196}$$

$$\rho_l w_l A = x\dot{m} \tag{6.197}$$

în care ρ_g este densitatea fazei gazoase; ρ_l — masa particulelor de lichid din unitatea de volum a amestecului bifazic; x — participația fazei lichide în unitatea de masă bifazică (titlul amestecului).

Se acceptă ipoteza că faza gazoasă ascultă de legea gazului perfect, și ca urmare presiunea ei în amestecul bifazic este

$$p = \rho_g R_g T_g \quad [\mathrm{N/m^2}] \tag{6.198}$$

Variația de presiune a amestecului bifazic între secțiunea A și $A + dA$ în ipoteza neglijării volumului ocupat de particulele lichide în masa de amestec bifazic este dată de relația cunoscută

$$\mathrm{d}p = R_g(1 - x)\dot{m}\left[\frac{\mathrm{d}T_g}{Aw_g} - \frac{T_g}{A^2}\frac{\mathrm{d}A}{w_g} - \frac{T_g}{A}\frac{\mathrm{d}w_g}{w_g^2}\right] \tag{6.199}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}T_g}{T_g} - \frac{\mathrm{d}w_g}{w} - \frac{\mathrm{d}A}{A} \tag{6.200}$$

Forța de presiune ce generează mișcarea mediului bifazic se obține din ecuația impulsului, aplicată atît fazei lichide cît și celei gazoase, care are forma

$$-\mathrm{d}p = (1 - x)\frac{\dot{m}\,\mathrm{d}w_g}{A} + x\frac{\dot{m}\mathrm{d}w_l}{A} \tag{6.201}$$

Pentru o curgere adiabat-izentropă ($dq = 0$; $dl_{fr} = 0$) la care entalpia frînată este constantă, legea conservării energiei curentului bifazic este

$$(1 - x)\dot{m}\left[c_{p_g} \cdot T_g + \frac{w_g^2}{2}\right] + x\dot{m}\left[c_{p_l} T_l + \frac{w_l^2}{2}\right] = \text{Const.} \quad (6.202)$$

din care se obţine temperatura momentană a fazei gazoase:

$$dT_g = \frac{w_g \cdot dw_g}{c_{p_g}} - \frac{x}{1 - x}\left[\frac{c_{p_l}}{c_{p_g}} dT_l + \frac{w_l\, dw_l}{c_{p_l}}\right] \quad (6.203)$$

unde c_{p_g}, c_{p_l} sînt căldurile specifice la presiune constantă a fazei gazoase, respectiv lichide.

Prin egalarea relaţiilor (6.199) şi (6.200) se obţine:

$$dT_g = \frac{dA}{A} T_g - \frac{x}{1 - x} \frac{w_g \cdot dw_l}{R_g} - w_g\, dw_g\left[\frac{1}{R_g} - \frac{T_g}{w_g^2}\right] \quad (6.204)$$

Deci variaţia temperaturii gazului este o funcţie de forma

$$dT_g = f(dw_g, dw_l, dA)\,|_{R=\text{Const}:\ x=\text{Const.}} \quad (6.205)$$

Din relaţiile (6.203) şi (6.204) se obţine relaţia (6.206), ce exprimă variaţia vitezei de curgere a fazei gazoase:

$$dw = \frac{R_g T_g \dfrac{dA}{A} - \dfrac{x}{1 - x}\left[\dfrac{-c_{p_l}}{c_{p_g}} R_g \cdot dT_t - \dfrac{w_l\, dw_l \cdot R_g}{c_{p_g}} + w_g\, dw_l\right]}{w_g\left[1 - \dfrac{R_g}{c_{p_g}} - \dfrac{R_g T_g}{w_g^2}\right]} \quad (6.206)$$

Deci variaţia vitezei gazului este o funcţie de forma

$$dw_g = f(dw_l, dT_l, dA)\,|_{x=\text{Const};\ R=\text{Const.}} \quad (6.207)$$

Introducînd valoarea lui dw_g din (6.206) în expresia (6.204) se obţine funcţia de variaţie a temperaturii mediului gazos:

$$dT_g = f(dw_l, dT_l, dA)\,|_{x=\text{Const};\ R=\text{Const.}} \quad (6.208)$$

Pe de altă parte, pentru determinarea funcţiei de variaţie a presiunii momentane ţinînd seama de (6.208) şi de (6.201) se obţine

$$dp = f(dw_l, dT_l, dA)\,|_{x=\text{Const};\ R=\text{Const.}} \quad (6.209)$$

Din expresiile de mai sus, se obțin ecuațiile analitice de calcul a variației temperaturii, presiunii și vitezei fazei gazoase pe porțiunea de canal dx (fig. 6.25). Aceste ecuații sînt.

$$\frac{dw_g}{dx} = \frac{\frac{T_g \cdot R_g}{A}\frac{dA}{dx} - \frac{x}{1-x}\left[\frac{-c_{p_l}}{c_{p_g}} R_g \frac{dT_l}{dx} - \frac{w_l R_g}{c_{p_g}}\frac{dw_l}{dx} + w_g \frac{dw_l}{dx}\right]}{w_g\left[1 - \frac{R_g}{c_{p_g}} - \frac{R_g T_g}{w_l^2}\right.} \tag{6.210}$$

$$\frac{dT_g}{dx} = \frac{T_g}{A}\frac{dA}{dx} - \frac{x}{1-x}\frac{w_g}{R_g}\frac{dw_l}{dx} - w_g\frac{dw_g}{dx}\left[\frac{1}{R_g} - \frac{T_g}{w_g^2}\right] \tag{6.211}$$

$$\frac{dp}{dx} = R_g(1-x)\dot{m}\left[\frac{1}{Aw_g}\frac{dT_g}{dx} - \frac{T_g}{A^2 w_g}\frac{dA}{dx} - \frac{T}{w_g^2 A}\frac{dw_g}{dx}\right] \tag{6.212}$$

Pentru a pune în evidență influența picăturilor de lichid din gaz, asupra curgerii amestecului bifazic, indiferent de natura ei (subsonică sau supersonică), se pleacă de la relațiile (6.204) și (6.206), care, așezate sub o formă dependentă de criteriul Mach al curgerii respective, devin (6.213) și (6.214):

$$\frac{dw_g}{w_g} = -\frac{dA}{A}\frac{1}{1-M^2}\frac{dw_l}{w_l}\frac{w_l}{w_g} - \left[\frac{x}{1-x}\frac{k \cdot M^2 - (k-1)M^2 \frac{w_l}{w_g}}{1-M^2}\right] -$$

$$- \frac{c_{p_l}}{c_{p_g}}\frac{T_l}{T_g}\frac{dT_l}{T_l}\left[\frac{x}{1-x}\frac{1}{1-M}\right] \tag{6.213}$$

$$\frac{dT_g}{T_g} = \frac{dA}{A}\frac{(k-1)M^2}{1-M^2} - \frac{w_l}{w_g}\frac{dw_l}{w_l}\left[\frac{x}{1-x}\frac{(k-1)}{1-M^2}\left(M^2 - k M^2 \frac{w_l}{w_g} + \frac{w_l}{w_g}\right)\right] -$$

$$- \frac{c_{p_l}}{c_{p_g}}\frac{T_l}{T_g}\frac{dT_l}{T_l}\left[\frac{x}{1-x}\frac{1-kM^2}{1-M^2}\right] \tag{6.214}$$

Introducînd expresiile (6.213) și (6.214) în (6.200) se obține

$$\frac{dp}{p} = \frac{dA}{A}\frac{kM^2}{1-M^2} - \frac{w_l}{w_g}\frac{dw_l}{w_l}\left[\frac{x}{1-x}\frac{M^2}{1-M^2}\left\{(k-1)\left(kM^2 - kM^2\frac{w_l}{w_g} + k\right)\right\} + \right.$$

$$+ \frac{c_{p_l}}{c_{p_g}}\frac{T_l}{T_g}\frac{dT_l}{T_l}\left[\frac{x}{1-x}\frac{kM^2}{1-M^2}\right] \tag{6.215}$$

În relațiile (6.213) ... (6.215), criteriul Mach se referă la faza gazoasă, deci :

$$M = \frac{w_g}{\sqrt{k \cdot R_g \cdot T_g}} \tag{6.216}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{dw_g}{w_g} - \frac{1}{2}\frac{dT_g}{T_g} \tag{6.217}$$

Substituind în (6.217) relațiile (6.213) și (6.214), se obține variația criteriului Mach pe porțiunea dx de conductă și anume :

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dA}{A}\left[\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2}{1 - M^2}\right] +$$

$$+ \frac{dw_l}{w_l}\frac{w_l}{w_g}\left[\frac{x}{1-x}\frac{M^2}{1-M^2}\left\{kM^2\frac{k-1}{2}\cdot\left(1 - \frac{w_l}{w_g}\right) + k - \frac{k-1}{2}\frac{w_l}{w_g}\right\}\right] -$$

$$- \frac{c_{p_l}}{c_{p_g}}\frac{T_l}{T_g}\frac{dT_l}{T_l}\left[\frac{x}{1-x}\frac{1+kM^2}{2(1-M^2)}\right] \tag{6.218}$$

Forța de antrenare a particulei de lichid prin frecare interfazică de curentul de gaz este

$$\dot{m}_l\frac{d^2l}{d\tau^2} = c_f\frac{1}{2}\rho_g(w_g - w_l)^2A_l \tag{6.219}$$

în care : $\dot{m}_l$ este masa unei particule de lichid ; c_f — coeficientul de frecare gaz-lichid (considerat ca o funcție numai de criteriul Reynolds al curgerii) ; A_l — suprafața exterioară a particulelor lichide. Coeficientul de frecare c_f între gaz și particula lichidă pentru apă și vapori de apă este dat în figura 6.26. Pentru alte lichide se poate folosi și relația aproximativă

$$c_f = f\frac{24}{Re} \tag{6.220}$$

$$f = \frac{28Re^{-0,85} + 0,48}{24Re^{-1}} \tag{6.221}$$

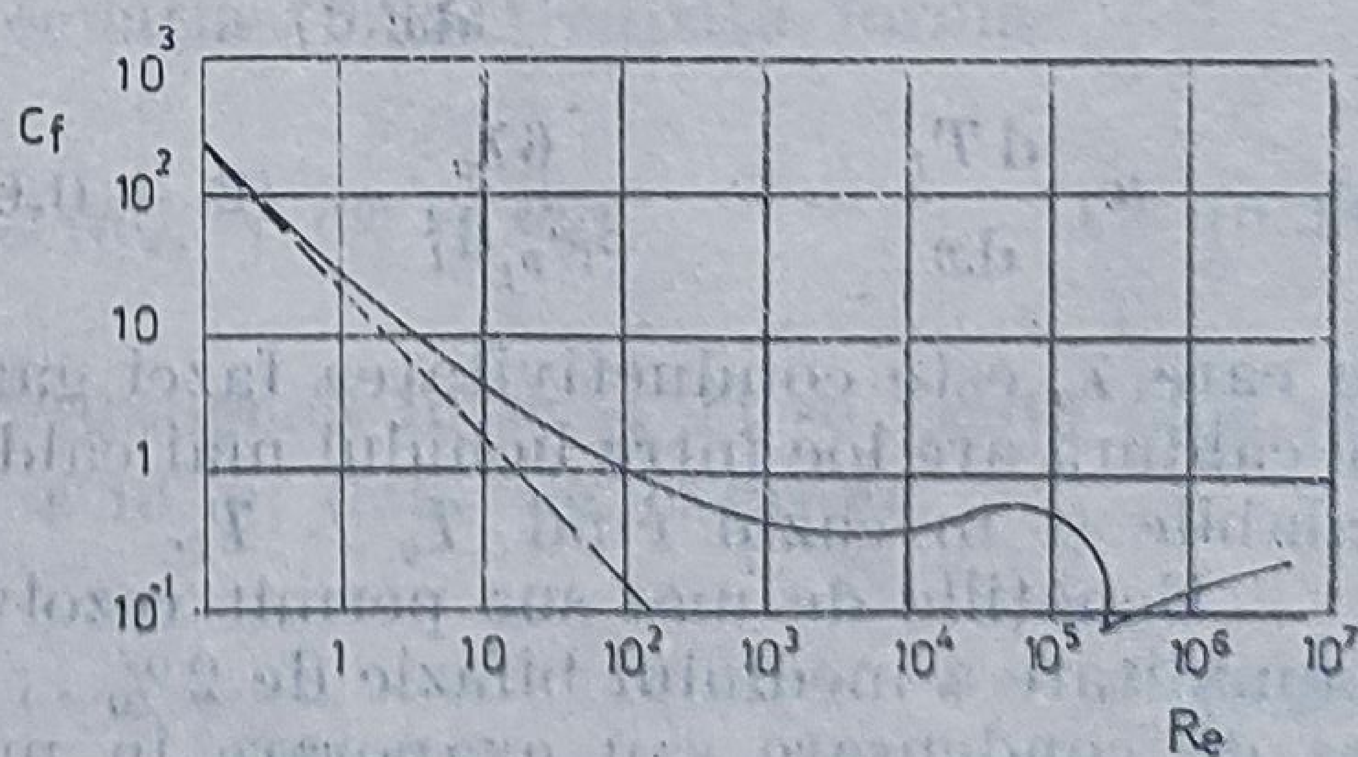


Fig. 6.26. Coeficientul de frecare c_f dintre faza gazoasă și particula lichidă într-un mediu bifazic în curgere.

Pentru o picătură sferică, relația (6.219) capătă forma (6.222) sau (6.223) :

$$\dot{m}_l \cdot w_l \frac{dw_l}{dx} = f \frac{24}{Re} \frac{1}{2} \rho_g (w_g - w_l)^2 A_l = 3\pi \cdot \mu_g \cdot f (w_g - w_l) \quad (6.222)$$

$$w_l \frac{dw_l}{dx} = \alpha_m (w_g - w_l) \quad (6.223)$$

în care :

$$\alpha_m = \alpha f \quad (6.224)$$

$$\alpha = \frac{3\pi \cdot \mu_g d_l}{m_l} = \frac{18 \mu_g}{\rho_l d_l^2} \quad (6.225)$$

unde μ_g este viscozitatea dinamică a gazului ; ρ_g — densitatea lui ; d_l = = diametrul particulei lichide considerată nedeformabilă. Cu relația (6.223) se poate determina variația vitezei de curgere a particulei lichide, curgerea avînd loc fără schimb de căldură interfazic sau cu exteriorul și fără frecare de pereți.

În cazul cînd între faza gazoasă și cea lichidă are loc un schimb de căldură convectiv, mărimea fluxului termic schimbat este dat de valoarea coeficientului convectiv α_c care poate fi cel dat de (6.226) și respectiv (6.227) :

$$Nu_c = 2 + 0{,}6 \cdot Re^{0{,}5} \cdot Pr^{0{,}333} \quad (6.226)$$

$$\alpha_c = \frac{\lambda_g}{d_l} (2 + 0{,}6 \cdot Re^{0{,}5} \cdot Pr^{0{,}333}) \quad (6.227)$$

Fluxul termic schimbat prin convecție în timpul $d\tau$ corespunzător parcurgerii lungimii dx între particulele a căror suprafață exterioară este A_l va fi dat de (6.228) :

$$\alpha_c A_l (T_l - T_g) d\tau = \dot{m}_l c_{p_l} (- d T_l) \quad (6.228)$$

Variația temperaturii fazei lichide, ca urmare a fluxului termic interfazic, este

$$w_l \frac{d T_l}{dx} = - \frac{\alpha_c A_l (T_l - T_g)}{\dot{m}_l c_{p_l}} \quad (6.229)$$

$$w_l \frac{d T_l}{dx} = - \frac{6 \lambda_g}{\rho_l c_{p_l} d_l^2} (2 + 0{,}6 \; Re^{0{,}5} \cdot Pr^{0{,}333})(T_l - T_g) \quad (6.230)$$

în care λ_g este conductivitatea fazei gazoase. S-a considerat că schimbul de căldură are loc între lichidul mai cald și gazul mai rece. Relațiile rămîn valabile și în cazul cînd $T_g > T_l$.

Ecuațiile de mai sus permit rezolvarea problemelor curgerii pentru o umiditate a mediului bifazic de 2% ... 6%, în absența însă a unui proces de condensare sau evaporare în masa lui.

Pentru o conductă cu o secțiune inițială oarecare A pentru care se cunosc parametrii termofizici și mecanici ai mediului bifazic, se pot determina parametrii pe care îi va avea gazul după parcurgerea unei distanțe mici dx cunoscîndu-se geometria conductei dA/dx. Din relațiile (6.223) și (6.230) se obțin dw_l/dx și dT_l/dx. Substituind valorile obținute în (6.210) (6.211) și (6.212) se obțin dw_g/dx, dT_g/dx și dp/dx. Apoi, se consideră ca secțiune inițială $x + dx$ și se reface calculul pentru o nouă distanță dx și așa mai departe.

În cazul cînd între cele două faze, în timpul parcurgerii unei distanțe mici dx, nu are loc schimb de căldură, iar particula lichidă nu afectează energia cinetică a fazei gazoase, curgerea capătă un aspect particular. Această situație poate avea loc într-o conductă sau un canal de secțiune, constantă, sau variabilă în cazul cînd dimensiunile picăturilor sînt foarte mici (aerosoli). În această situație, pentru o secțiune constantă ecuația ce exprimă variația vitezei particulei lichide în funcție de rezistența la înaintare este

$$w_l \frac{dw_l}{dx} = \alpha_m(w_g - w_l) \qquad (6.231)$$

Se notează cu $\Phi = (w_g - w_l)/w_g$. Deoarece prin ipoteză, gazul nu este afectat dinamic de faza lichidă, w_g este constant, la fel ca și α_m. Se notează cu X:

$$X = \frac{w_g}{\alpha_m}\left[\ln \frac{\Phi_0}{\Phi} - (\Phi_0 - \Phi)\right], \qquad (6.232)$$

unde indicele zero indică valoarea lui Φ pentru condițiile inițiale ale curgerii.

Se consideră cazul unei curgeri printr-o conductă sau prin canal cu secțiune variabilă, admițînd o variație lineară a vitezei w_g cu lungimea x, de forma

$$w_g = w_{g_0} + ax \qquad (6.233)$$

unde cu a s-a notat accelerația curentului pe unitatea de lungime a canalului. Ținînd seama de (6.233), ecuația (6.231) capătă forma

$$w_l \frac{dw_l}{dx} = \alpha_m (w_{g_0} + ax - w_l) \qquad (6.234)$$

Omogenizarea ecuației (6.234) (neomogenă în w și x) se poate face prin schimbarea originei coordonatei x în χ, dată de expresia

$$\chi = x + \frac{c}{a} \qquad (6.235)$$

în care $c = -\alpha_m \cdot w_{g_0}$ Pentru noua origine, expresia (6.234), integrată, devine

$$\chi\left[\left(\frac{w_l}{\chi}+Q\right)\left(\frac{w_l}{\chi}+Q'\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{w_l}{\chi}+Q\right]^{\frac{\alpha_m}{4Z^{1/2}}}=$$

$$=\chi_0\left[\left(\frac{w_{l_0}}{\chi_0}+Q\right)\left(\frac{w_{l_0}}{\chi_0}+Q'\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{w_{l_0}}{\chi_0}+Q\right]^{\frac{\alpha_m}{4Z^{1/2}}} \tag{6.236}$$

în care: $Z = \alpha_m\left(a+\frac{1}{4}\alpha_m\right)$; $Q = \frac{1}{2}\alpha_m + Z^{\frac{1}{2}}$; $Q' = \frac{1}{2}\alpha_m - Z^{\frac{1}{2}}$.

6.9. MODELE DE CURGERE A MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT CU O UMIDITATE $y_0 > 6\%$

Curgerea mediilor bifazice monocomponente cu umiditate mai mare de 6% s-a constatat experimental că se diferențiază fenomenologic de curgerea celor cu umiditate mai mică de 6%. Faza lichidă nu se mai găsește dispersată în faza gazoasă (sub forma unor picături mici sau sub formă de aerosoli), ci ca o fază continuă, a cărei masă ocupă un volum finit în amestecul bifazic. Pe de altă parte, de cîte ori curgerea mediului bifazic cu umiditate mai mare de 6% este însoțită de un schimb de căldură cu exteriorul, sau de o încălzire determinată de transformarea lucrului mecanic de frecare în căldură, apare și un schimb de masă interfazic, ceea ce face ca pierderile de presiune, variația densității etc., să fie foarte greu de determinat analitic. Experimental s-a constatat că valoarea reală a unor criterii de similitudine a mediului bifazic cu umiditate mare are alte valori decît cele obținute prin calcul.

O metodă simplă utilizată pentru determinarea mărimilor caracteristice termofizice ale mediului bifazic cu umiditate mai mare de 6% constă în medierea mărimilor respective proporțional cu participația masică a fiecărei faze în amestec, pentru lungimi mici ale canalului prin care are loc curgerea, și apoi medierea lor pentru toată lungimea lui. O altă metodă (cu rezultate aproximative), aplicabilă curgerilor adiabat-izentrope, constă în medierea logairtmică a valorilor obținute pentru secțiunile de intrare și ieșire din canal. Astfel, considerînd că densitatea amestecului bifazic la intrarea și ieșirea din canal are valoarea ρ_1, respectiv ρ_2, valoarea medie este

$$\rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}} \tag{6.237}$$

Pentru calcule exacte, determinarea mărimilor termofizice și mecanice se face în funcție de sistemul fizic al curgerii. În general, curgerea prin canale a mediilor bifazice poate avea loc după cum urmează:

a) curgerea izotermă prin canale orizontale, fără modificarea raportului masic al fazelor;

b) curgerea izotermă prin canale verticale, fără modificarea raportului masic al fazelor;

c) curgerea mediului bifazic prin canale însoțită de un schimb de masă (trecerea unei faze în alta), în prezența unui schimb de căldură cu pereții. În cazul curgerilor cu pierderi mari de presiune apare o vaporizare a fazei lichide, însoțită de o mărire a volumului specific al amestecului bifazic. Ca urmare, are loc o creștere importantă a energiei cinetice a curentului și deci o pierdere de presiune momentană mare.

Curgerea izotermă prin canale orizontale. Această curgere poate avea loc după cum urmează:

1. Curgerea cu faza de vapori sub formă de bule dispersate în faza lichidă).

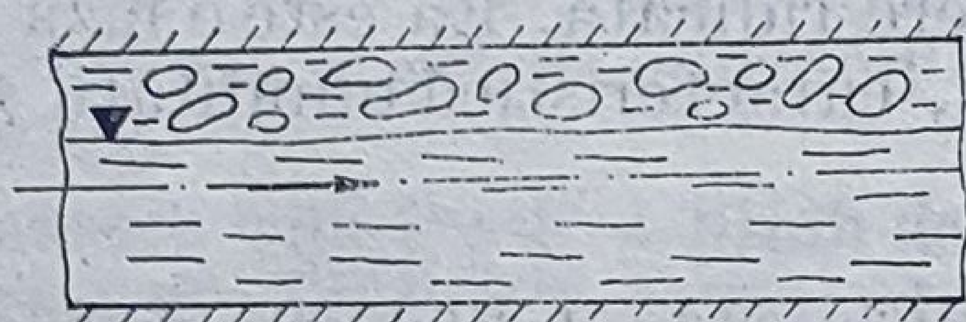


Fig. 6.27. Modelul curgerii separate a fazelor cu bule de vapori dispesrate în faza lichidă.

2. Curgerea separată a fazei lichide în partea inferioară a canalului, iar a celei de vapori sub forma unor bule dispersate în faza lichidă în partea superioară a canalului (fig. 6.27). Vitezade deplasare a bulelor de vapori, constatată experimental, este egală cu aceea a fazei lichide.

3. Curgerea sub formă de dopuri (fig. 6.28). Faza lichidă curge compact în partea inferioară a canalului, iar faza gazoasă sub forma unor bule mari întrerupte de o fază dispersă de bule de vapori în lichid, prezentînd aspectul unor dopuri de vapori.

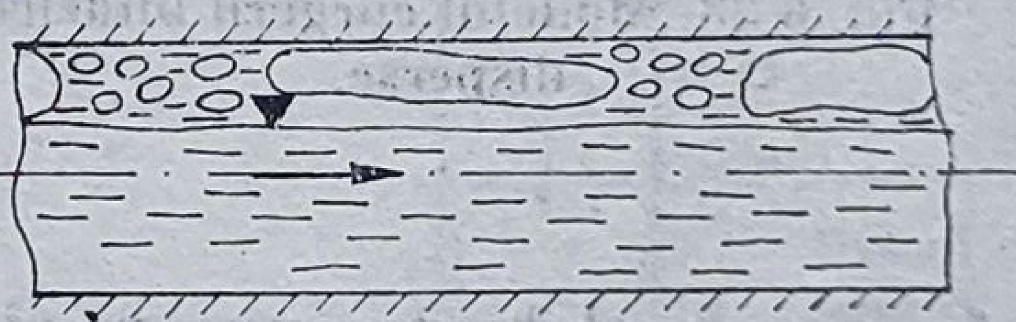


Fig. 6.28. Modelul curgerii bifazice cu dopuri de vapori.

4. Curgerea stratificată (fig. 6.29). Se caracterizează printr-o separare completă a fazei lichide de faza de vapori. Este caracteristică amestecului bifazic cu o umiditate la care volumul specific al fazei gazoase este aproape egal cu cel al fazei lichide ($y > 80\%$).

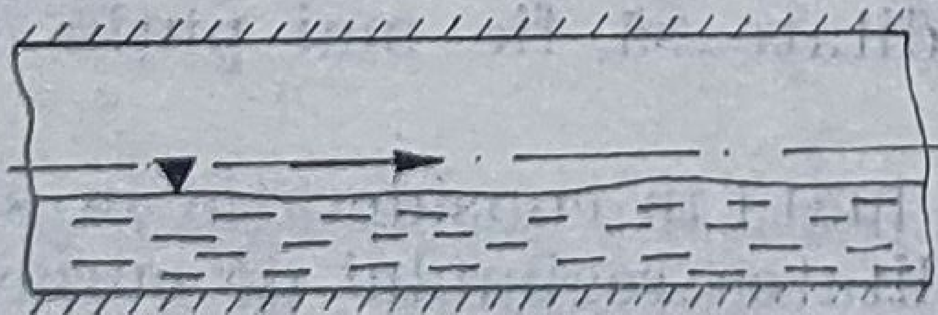


Fig. 6.29. Modelul curgerii bifazice stratificate.

5. Curgerea ondulată (fig. 6.30). este caracterizată prin curgerea complet separată a fazei lichide de cea gazoasă, apărînd la intervale mai

rare sau mai dese unde de amplitudine și perioadă redusă, ca urmare a frecării viscoase interfazice.



Fig. 6.30. Modelul curgerii bifazice ondulate.

6. Curgerea ca valuri (fig. 6.31). Se aseamănă cu modelul ondulat, cu diferența că amplitudinea undelor este mai mare, ceea ce îi dă aspectul de valuri.



Fig. 6.31. Modelul curgerii bifazice cu valuri.

7. Curgerea inelară (fig. 6.32). Acest model este caracteristic unei umidități reduse și unei viteze de curgere ridicată. Ea este o fază a creșterii substratului limită lichid de la pereți, caracteristică umidității $y > 6\%$.

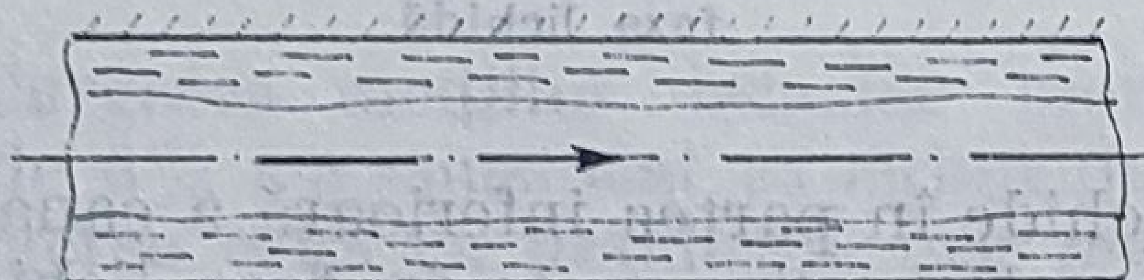


Fig. 6.32. Modelul curgerii bifazice inelare.

8. Curgerea dispersă (fig. 6.33). Este caracteristică unei umidități $y > 6\%$; faza lichidă este dispersată sub formă de picături în faza de vapori.

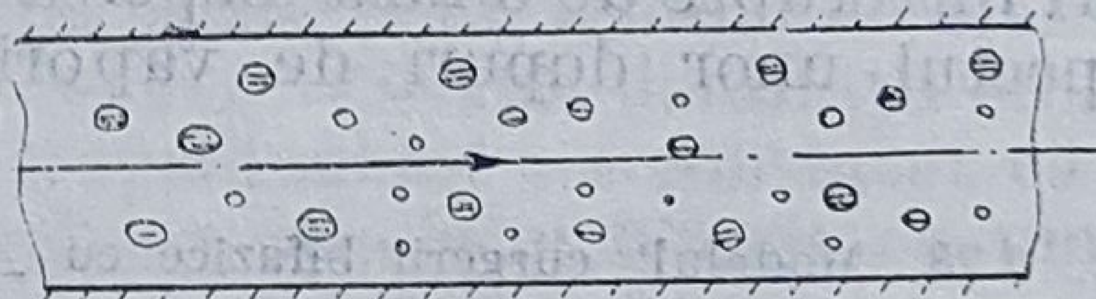


Fig. 6.33. Modelul curgerii bifazice disperse.

Aceste modele de curgere sînt instabile, un model trecînd de la sine în altul, fără o cauză bine determinată, ceea ce are ca urmare o instabilitate a cîmpurilor de forțe gravitaționale, de viscozitate, de inerție, presiune, tensiune superficială etc.

Cele expuse mai sus, la care se adaugă și dificultățile legate de rezolvarea ecuațiilor diferențiale ale curgerii, fac ca studiul analitic al curgerii mediului bifazic cu un grad mare de umiditate să fie mai puțin folosit în favoarea metodelor experimentale.

O problemă importantă ce trebuie luată în considerație în studiile referitoare la curgerile bifazice este stabilitatea regimului de curgere din punct de vedere al modelului geometric al ei prezentat în figurile 6.27 ... ... 6.33. În cazul canalelor scurte, cum este cazul ajutajelor, grătarelor de palete ale turbomașinilor, elementelor de aparate termice industriale

(difuzoare, ejectoare, schimbătoare de căldură etc.), sistemul de curgere se poate considera adiabat avînd în vedere realizarea rapidă a echilibrului termic dintre temperatura masei feroase a pereţilor subţiri ai canalelor şi aceea a mediului bifazic. În cazul conductelor foarte lungi, realizarea echilibrului de temperatură poate dura ore sau chiar zile. Observaţiile experimentale au pus în evidenţă raportul direct dintre timpul de atingere a echilibrului şi diametrul şi lungimea canalului sau conductei, şi raportul invers dintre acest timp şi debitul masic de mediu bifazic.

b) **Curgerea izotermă prin canale verticale.** În cazul curgerii izoterme a unui mediu bifazic prin canale verticale, modelele de curgere uzual întîlnite sînt :

1. Curgerea dispersă. Acest sistem apare în două condiţii limită a umidităţii. În cazul umidităţilor mari $6y_0\% < y_0 < 10y_0\%$ faza gazoasă se găseşte dispersată în faza lichidă compactă, aşa cum este arătat în figura 6.34. În cazul umidităţilor foarte mici $y_0 < 6\%$, curgerea are loc tot sub aceeaşi formă, dar cu faza lichidă dispersată sub formă de picături în masa de vapori. Aspectul fizic este similar cu cel prezentat în figura 6.33.

2. Curgerea inelară fig. 6.35. O parte din faza lichidă aderă parţial la pereţi, iar cea gazoasă, curgînd central, are în ea dispersată mici picături de lichid.

Curgerea însoţită de schimb de căldură cu pereţii (fig. 6.36). În cazul cînd în timpul curgerii, mediul bifazic monocomponent primeşte sau cedează căldură pereţilor canalului orizontal sau vertical prin care are loc curgerea va apărea şi un schimb de masă interfazic intern, adică o vaporizare sau o condensare a fazei lichide. Curgerea îşi va schimba deci mode-

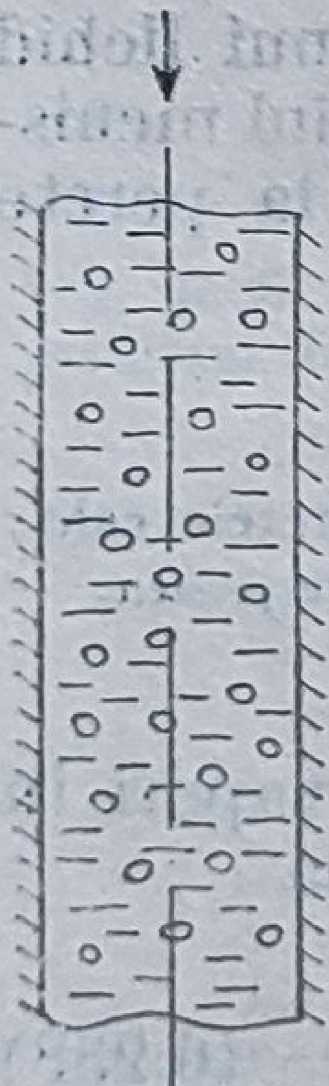


Fig. 6.34. Curgere dispersă a mediului bifazic cu umiditate mare, printr-un canal vertical.

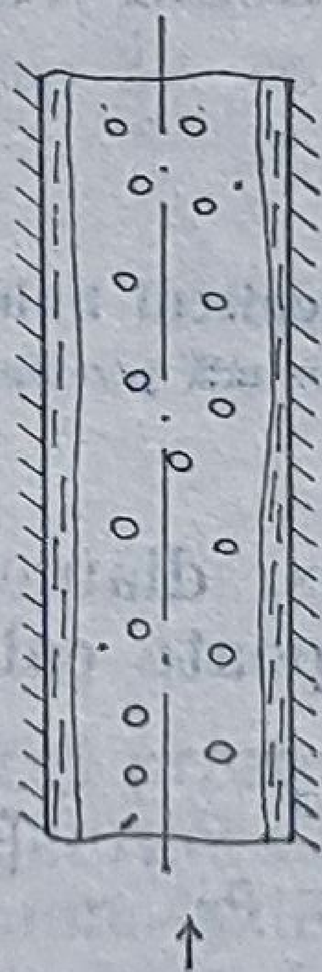


Fig. 6.35. Curgere inelară a mediului bifazic printr-un canal vertical.

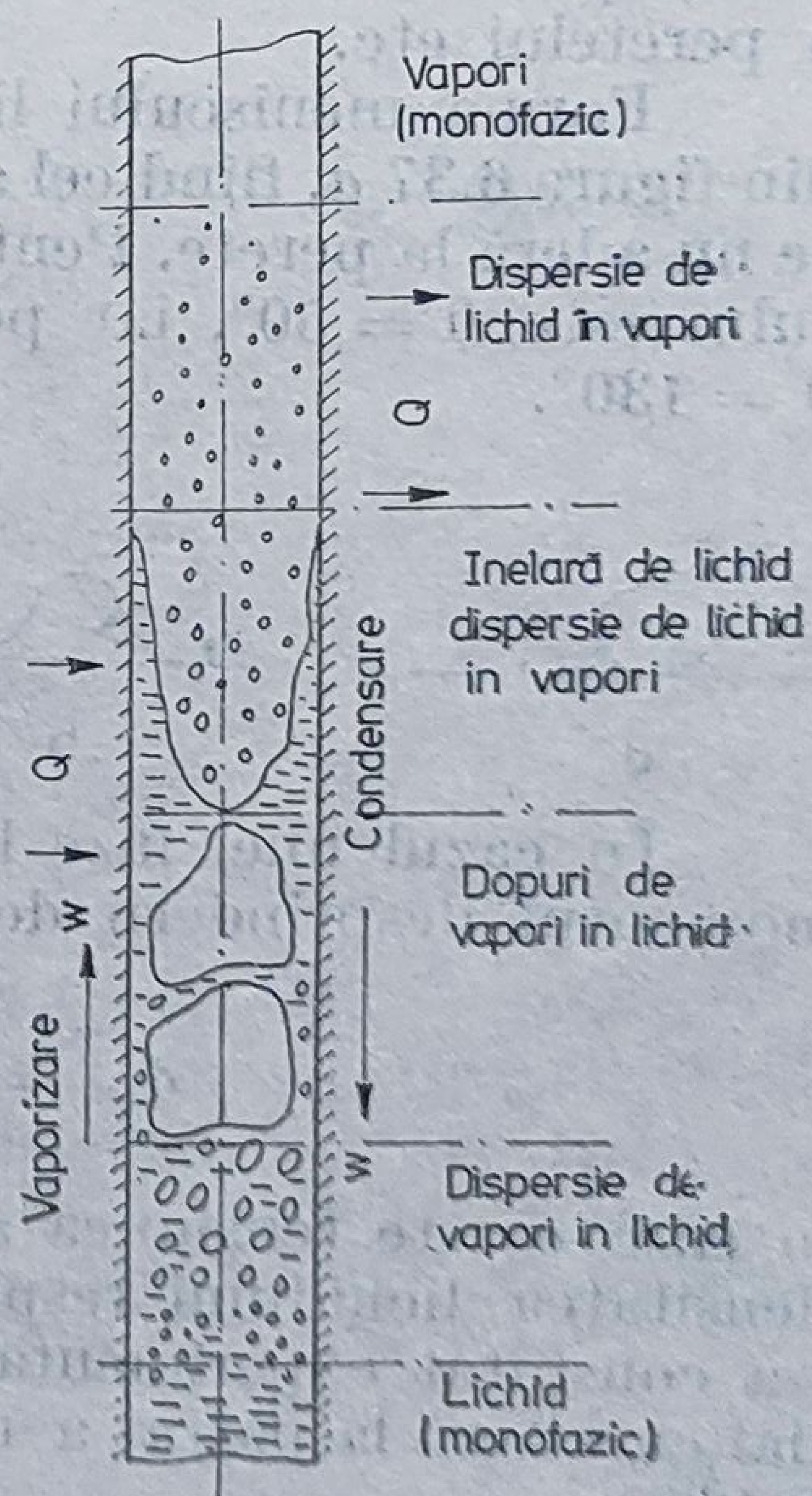


Fig. 6.36. Curgere bifazică cu schimb de căldură cu mediul exterior.

lul în funcţie de raportul dintre masa fazei lichide şi a celei gazoase în lungul curgerii, care, ca urmare a fluxului termic schimbat cu pereţii, este variabilă.

Sistemul de curgere pentru „vaporizare" va fi succesiv : curgere lichidă (monofazic) ; curgere cu bule de vapori dispersate în faza lichidă ; curgere cu dopuri de vapori în lichid ; curgere inelară ; curgere cu dispersie de lichid în faza de vapori, curgere a fazei gazoase (monofazică). Curgerile cu încălzirea fluidului pot avea loc fie în utilaje încălzitoare, special construite pentru acest scop (cazane, distilatoare, fierbătoare, etc.), fie în conducte foarte lungi.

6.10. CURGEREA MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT CU O UMIDITATE MARE ($y_0 > 6\%$) PRIN CONDUCTE SCURTE

Curgerea mediului bifazic monocomponent cu umiditate mare şi şi cu schimb de căldură cu mediul exterior se face cu viteze mici. Cazul este întîlnit : în cazanele de abur ; în schimbătoarele de căldură fierbătoare sau condensatoare lucrînd cu vapori de apă umezi ; în curgerea fluidelor frigorifice şi a produselor petroliere, etc.

Elementul hotărîtor al cantităţii de căldură schimbată de fluid cu peretele este dimensiunea bulei de vapori. Fluxul termic schimbat depinde de o serie de factori, printre care : gradul de prelucrare a suprafeţei peretelui canalului ; mărimea şi sensul fluxului termic schimbat de mediu cu pereţii ; forma bulei de vapori la formarea ei pe perete ; gradul de umezire a peretelui etc.

Forma meniscului lichidului la perete depinde de unghiul θ, cazul din figura 6.37 *a*, fiind cel al apei, iar cazul din figura 6.37 *b* al unui lichid ce nu aderă la perete. Pentru apă, lichid ce aderă la perete, unghiul meniscului este $\theta = 50°$, iar pentru mercur, lichid care nu aderă la perete $\theta = 130°$.

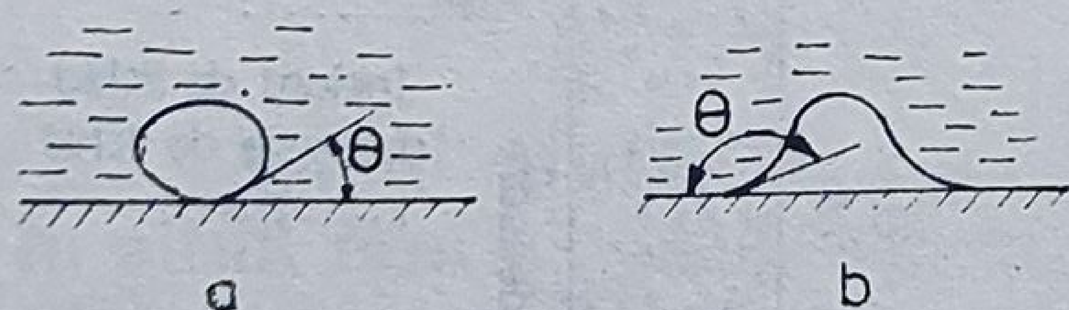


Fig. 6.37. Meniscul bulei de vapori la peretele cald : *a* — lichid ce udă peretele ; *b* — lichid ce nu udă peretele.

În cazul unei faze lichide în repaus, diametrul bulei de vapori în momentul desprinderii de pe perete se poate calcula cu relaţia

$$d_{bul} = 0{,}018 \cdot \theta \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l - \rho_v}} \quad [\mathrm{m}] \qquad (6.238)$$

în care σ este tensiunea superficială ; θ — unghiul meniscului ; ρ_l, ρ_v — densitatea lichidului respectiv a vaporilor. Pentru un lichid în curgere, s-a constatat experimental că diametrul bulei de vapori scade exponenţial cu viteza la pătrat a curentului, faţă de valoarea calculată analitic cu (6.238).

Experimental s-a constatat că pentru viteze de curgere mici şi o umiditate mare, la fluidele ce udă pereţii curgerea are un caracter inelar., La un conţinut de vapori mai mare, sau la viteze de curgere mai mari, începe o curgere cu faze separate, sub formă de bule, de dopuri sau chiar stratificată. Dacă viteza creşte şi mai mult, datorită turbulenţei generate de frecarea interfazică, apar perturbaţii, făcînd să apară sistemul de curgere ondulară sau în valuri. La o umiditate foarte mică, sau foarte mare, curgerea va fi dispersă (a fazei de vapori în lichid sau a fazei lichide în cea de vapori).

Indiferent de modelul curgerii sau de poziţia canalului, calculele analitice acceptă ipoteza egalităţii vitezei de curgere a lichidului cu a vaporilor. În cazul fluidelor ce nu udă pereţii canalului, bulele de vapori, chiar în număr mic, deci la umidităţi foarte mari, formează o zonă continuă lîngă perete, faza lichidă circulînd prin centrul canalului. Pe măsură ce creşte masa de vapori, se măreşte grosimea stratului de vapori aderent la perete, iar faza lichidă capătă aspectul unei emulsii, circulînd axial. La viteze foarte mari, curgerea capătă aspectul unei emulsii ce umple întreaga secţiune a canalului sau conductei prin care curge.

De exemplu, pentru o curgere turbulentă sub formă inelară a unui amestec bifazic de apă şi vapori de apă, se prezintă în figura 6.38 raportul $\Delta p_{bf}/\Delta p_l$ dintre pierderea de presiune a amestecului bifazic faţă de cel al unei faze lichide în greutate egală, în funcţie de raportul $\varphi = (d_v/d_0)^2$ în care d_0 este diametrul conductei, iar d_v diametrul secţiunii prin care curg numai vapori.

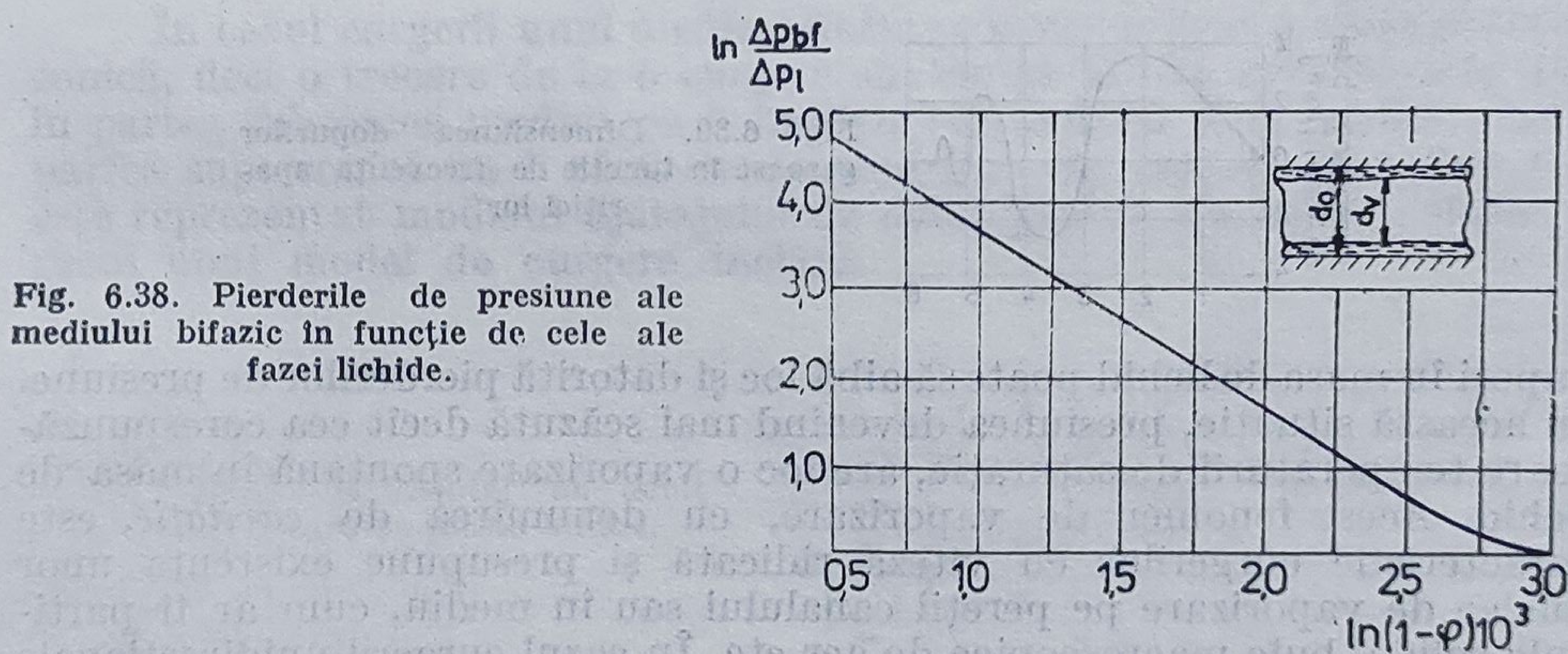


Fig. 6.38. Pierderile de presiune ale mediului bifazic în funcţie de cele ale fazei lichide.

În cazul vitezelor şi presiunilor mari şi o curgere sub formă de emulsie, calculul dinamic al curgerii se recomandă a fi făcut considerînd mediul bifazic ca un mediu monofazic omogen ale cărei mărimi termofizice au valorile medii ale celor două faze. Pierderea de presiune pe unitatea de lungime a canalului se face cu relaţia (6.239) în care indicele m se referă la valorile medii:

$$\frac{\Delta p_{bf}}{\Delta l} = -\xi_m \frac{\rho_m w_m^2}{2 d_0} \tag{6.239}$$

sau în funcţie de mărimile fiecărei faze, cu (6.240):

$$\frac{\Delta p_{bt}}{\Delta l} = - \xi_m \frac{\rho_l w_0}{2d_0}\left[1 + \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)\frac{w_{0v}}{w_0}\right] \quad (6.240)$$

în care w_{0v} este viteza de curgere calculată ca şi cum prin secţiunea canalului ar trece întreaga cantitate de mediu bifazic numai sub formă de vapori, în m/s; w_m — viteza medie reală în secţiune a amestecului, pentru densitatea reală a amestecului $w_m = (w_0 + w_{0l})/2$, în m/s; w_{0l} — viteza medie de curgere calculată ca şi cum prin secţiunea canalului ar trece întreaga cantitate de mediu bifazic numai sub formă lichidă, în m/s;

$$w_0 = w_{0l} + \frac{\rho_v}{\rho_l} w_{0v}$$

ρ_m — densitatea medie în secţiune a amestecului $= (1 - x)\rho_l + x\,\rho_{vr}$ în kg/m²; x — titlul amestecului bifazic (kg vapori/kg amestec bifazic); ξ_m — coeficientul mediu de frecare a mediului bifazic de pereţii canalului determinat experimental.

Un model de curgere instabil este cel sub formă de dopuri denumit şi „curgere cu cavitate ondulată" sau cu „cavitate cu valuri", care însă se amortizează după un timp relativ foarte scurt, revenind la unul din sistemele menţionate mai sus.

În figura 6.39 se prezintă dependenţa dintre dimensiunile dopurilor gazoase şi frecvenţa apariţiei lor, în funcţie de timp. Apariţia bulelor de

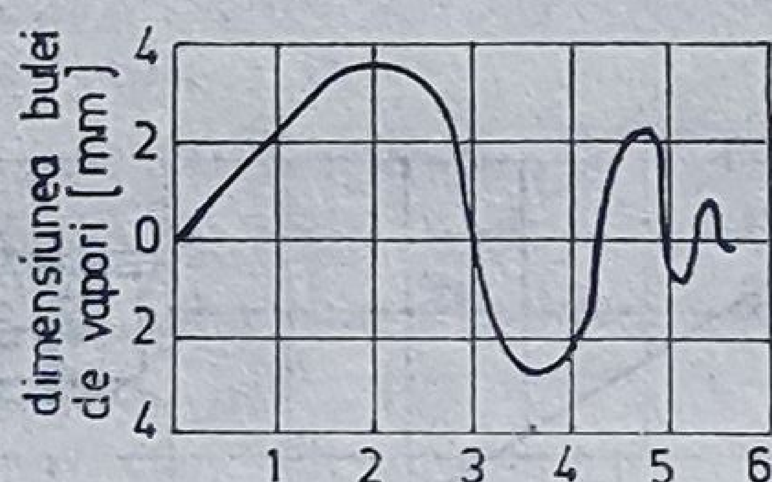


Fig. 6.39. Dimensiunea dopurilor gazoase în funcţie de frecvenţa apariţiei lor.

vapori în masa de lichid poate să aibă loc şi datorită pierderilor de presiune. În această situaţie, presiunea devenind mai scăzută decît cea corespunzătoare temperaturii de saturaţie, are loc o vaporizare spontană în masa de lichid. Acest fenomen de vaporizare, cu denumirea de *cavitaţie*, este caracteristic curgerilor cu viteză ridicată şi presupune existenţa unor nuclee de vaporizare pe pereţii canalului sau în mediu, cum ar fi particule solide, bule macroscopice de aer etc. În cazul curgerii unidirecţionale a gazului perfect, în prezenţa unui schimb de căldură are loc o creştere sau o scădere a presiunii frînate şi o creştere sau scădere a entropiei în funcţie de sensul fluxului termic. În cazul răcirii mediului în curgere, entropia va scădea, iar presiunea frînată va creşte, şi invers.

În cazul curgerii unui mediu bifazic cu cedare de căldură către pereţii canalului, se produce nu o răcire a gazului, ci un proces de condensare, ce conduce la o scădere a vitezei medii de curgere deoarece masa fazei lichide va creşte şi, ca urmare, volumul specific al amestecului va scădea.

Ca urmare, modelul fizic al curgerii unui mediu bifazic însoţit de răcire, deci de o condensare ca urmare a schimbului de căldură cu pereţii va corespunde unui ajutaj de debit. Pentru viteze de curgere subsonice cu $M < 0,2$, neglijînd reducerea secţiunii reale de curgere a vaporilor, ca urmare a măririi cantităţii de fază lichidă aderentă la perete, ecuaţia de continuitate pentru faza de vapori este

$$\frac{d\dot{m}_v}{\dot{m}_v} = \frac{d\rho_v}{\rho_v} + \frac{dw_v}{w_v} + \frac{dA}{A} \tag{6.241}$$

Deoarece secţiunea conductei este constantă ($A = \text{ct}$) se obţine:

$$\frac{dA}{A} = 0 ; \quad \frac{d\rho_v}{\rho_v} = w_v \frac{dw_v}{a_v^2}$$

iar ecuaţia de continuitate are forma

$$\frac{d\dot{m}_v}{\dot{m}_v} = (1 - M_v^2) \frac{dw_v}{w_v} \tag{5.242}$$

Într-un canal de secţiune constantă şi în prezenţa unui schimb de căldură, schimbul de masă interfazic conduce la accelerarea sau decelerarea curentului bifazic ca urmare a schimbării masei de vapori din amestec, deci canalul lucrează ca un ajutaj de debit.

În cazul curgerii unui mediu bifazic se poate obţine o curgere supersonică, deci o trecere de la o curgere subsonică la una supersonică, dacă în partea subsonică mediul va fi încălzit (vaporizînd faza lichidă), iar în partea supersonică va fi răcit condensînd faza de vapori). În figura 6.40 este reprezentat modelul ajutajului de debit pentru un mediu bifazic, în cazul unui model de curgere inelară.

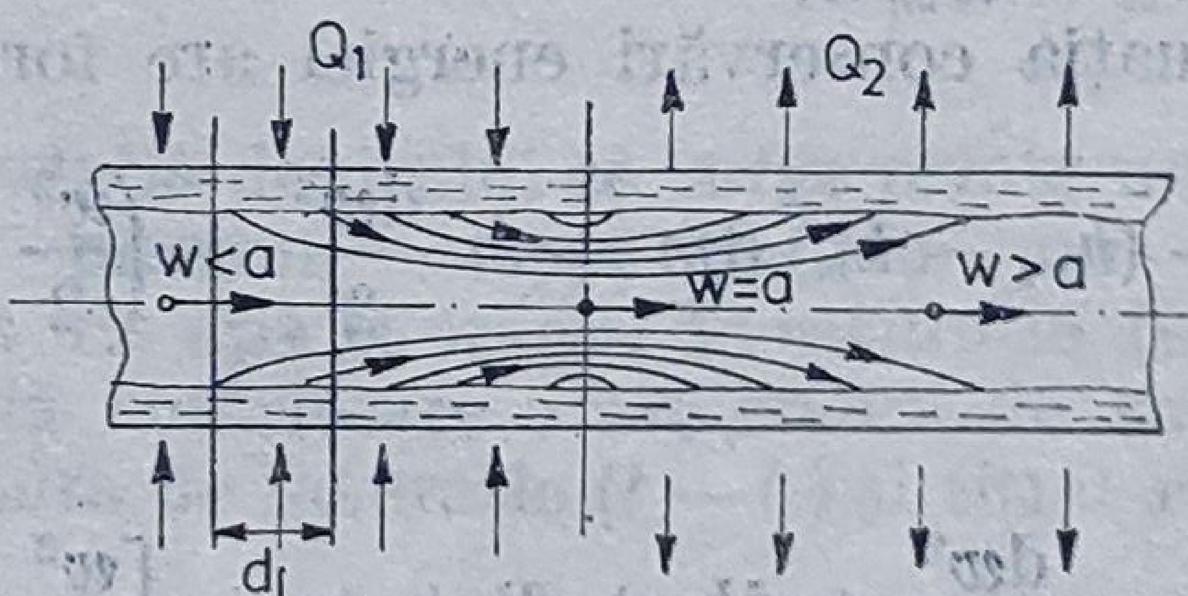


Fig. 6.40. Ajutaj de debit pentru un mediu bifazic.

Temperatura vaporilor în timpul curgerii corepunde stării de saturaţie $T_s = \text{const}$, fluxul termic primit fiind notat cu Q_1, respectiv cedat Q_2. Se consideră segmentul de conductă de lungime dl pe care are loc un schimb interfazic de masă. Ecuaţia continuităţii pentru valorile medii ale mediului bifazic este

$$\dot{m} = \rho w A ; \quad \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} \tag{6.243}$$

Considerînd, pentru simplificare, că fiecare fază ocupă o parte separată din secţiunea conductei, se poate scrie

$$\dot{m} = \dot{m}_v + \dot{m}_l \text{ [kg/s]}; \; A = A_v + A_l \quad [\text{m}^2]$$

$$w = x \cdot w_v + (1 - x) w_l \quad [\text{m/s}]; \quad \rho = \frac{1}{\frac{x}{\rho_v} + \frac{1-x}{\rho_l}} \quad [\text{kg/m}^3]$$

Ca urmare,

$$\frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{\tau_w \cdot dS + dR_w}{pA} + \frac{\rho w dw}{p} + \frac{\rho w(w - w_m) d\dot{m}}{\rho \dot{m}} = 0$$

(6.244)

în care dS este suprafaţa peretelui prin care are loc schimbul de căldură, în m^2; τ_w — forţa tangenţială de frecare la perete; R_w — forţele de rezistenţă mecanică; w_m = viteza transferului masei $d\dot{m}$ dintr-o fază în alta.

Deoarece

$$\tau_w = \zeta_m \frac{\rho w^2}{2} = \zeta_m \frac{kpM^2}{2}; \quad a^2 = k\frac{p}{\rho}; \quad \frac{dS}{A} = 4\frac{dl}{D}$$

unde ζ_m este coeficientul de frecare; D — diametrul conductei, se obţine:

$$\frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{kM^2}{2}\frac{dw^2}{w^2} + \frac{kM^2}{2}\left[4\,\xi_m\frac{dl}{D} + \frac{2dR_w}{kpAM^2}\right] + $$
$$+ kM^2(1 - \nu_m^*)\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (6.245)$$

în care $\nu_m^* = w_m/w$.

Ecuaţia conservări energiei are forma (6.246) sau (6.247)

$$\dot{m}\,dh - (h_{m_0} - h_m)\,d\dot{m} + \dot{m}\frac{dw^2}{2} + \left(\frac{w^2}{2} - \frac{w_m^2}{2}\right)d\dot{m}] + \dot{m}\,dl + \dot{m}\,dq = 0$$

(6.246)

$$\frac{dw^2}{2} + dh + dl + dq + \left[\frac{w^2}{2}(1 - \nu_m^*) - \Delta h_m\right]\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (6.247)$$

în care dl este lucrul mecanic exterior, iar dq fluxul termic schimbat cu peretele.

Cu relaţia (6.246) se poate determina debitul $d\dot{m}$ ce trece dintr-o fază în alta. Un alt caz întîlnit des în tehnică este curgerea unui mediu bifazic cu umiditate foarte mare printr-o conductă scurtă, fără schimb de căldură cu pereţii dar cu o cădere mare de presiune. Această situaţie se întîlneşte în transportul apei supraîncălzite, la curgeri prin canale scurte de

secţiune foarte mică şi cu viteză mare (în aparate de schimb de căldură compacte), în regeneratoare, conducte de condens etc.

Curgerea fazei lichide la temperatura de saturaţie şi schimb de masă interfazic cu pierderi mari de presiune are loc în condiţii de dezechilibru termodinamic, care depinde de:

a) lungimea relativă a conductei l/d;
b) forma geometrică a secţiunii canalului şi rugozitatea pereţilor;
c) valoarea parametrilor termofizici iniţiali (presiune, temperatură, umiditate, subrăcire etc.).

Debitul de fluid ce curge într-o conductă cu secţiune foarte mică este dat de (6.248):

$$\dot{m} = B\varphi A\sqrt{\rho_0 \Delta p} \tag{6.248}$$

în care: B este coeficientul de adaptare $\approx 0{,}95$; φ = coeficientul de contracţie (0,90 ... 0,95); A — secţiunea canalului; Δp — diferenţa de presiune totală $p_0 - p_2$.

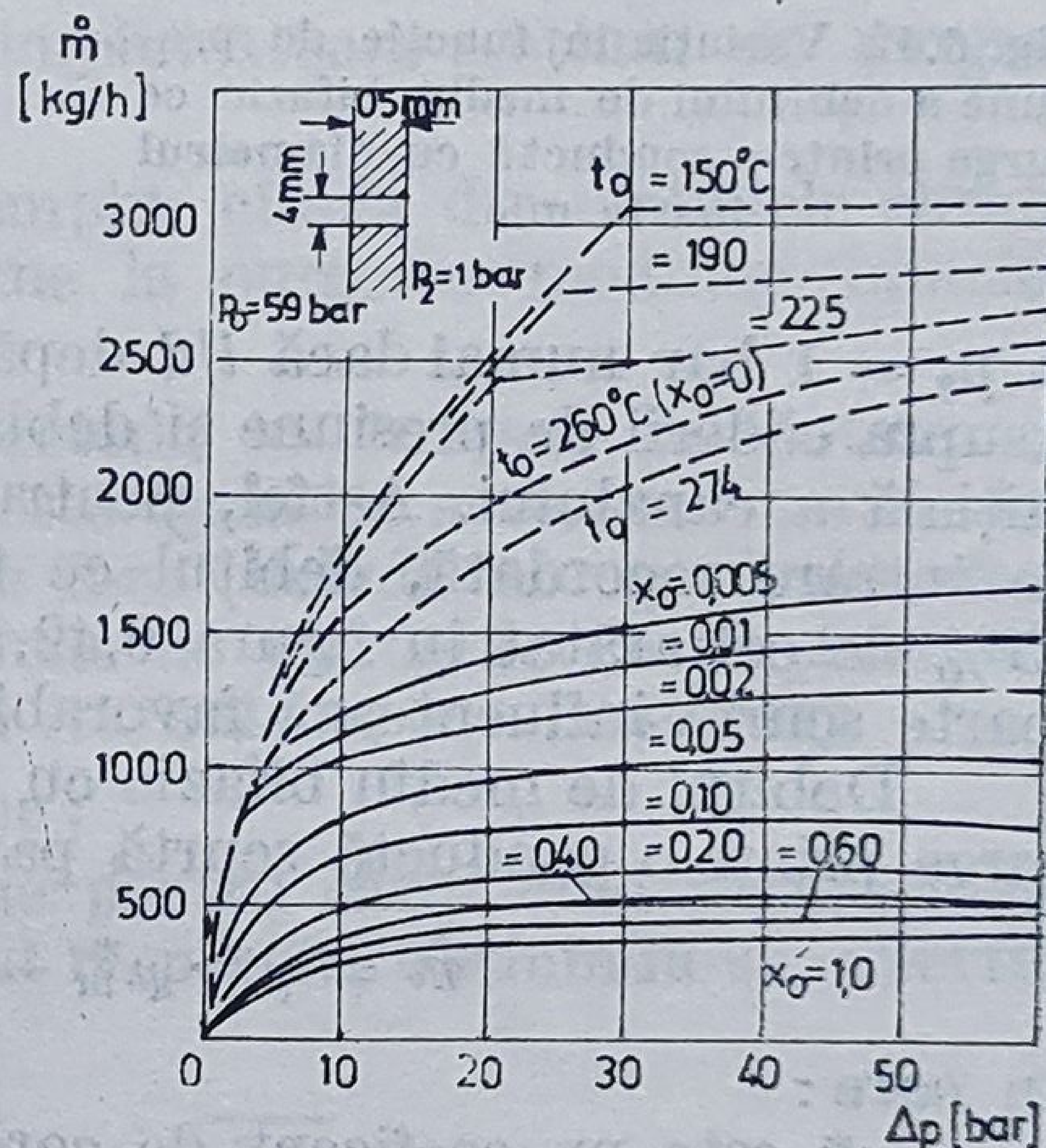


Fig. 6.41. Debitul de mediu bifazic ce poate curge printr-o conductă cu diametrul foarte mic.

În figura 6.41 se prezintă variaţia debitului ce curge printr-un orificiu în funcţie de diferenţa de presiune Δp_0; pentru un canal cu dimensiunile din figură, parcurs de apă la starea de saturaţie (sau amestec bifazic cu titlul x), o influenţă hotărîtoare o are gradul de supraîncălzire a lichidului faţă de temperatura de saturaţie $(t - t_s)$ şi titlul x al amestecului bifazic .

Pentru conducte cu o lungime finită l, debitul ce trece prin canal depinde de presiunea iniţială p_0 şi lungimea relativă l/d. În figura 6.42 se prezintă raportul dintre debitul masic de lichid $\dot{m}$ la o temperatură iniţială de saturaţie corespunzătoare presiunii iniţiale şi debitul aceluiaşi lichid $\dot{m}_{20}$ la tmperatura de 20°C. După cum se vede din figura 6.42 scăderea de presiune de la valoarea iniţială p_0 la cea finală, considerată egală cu 1 bar, are loc mai accentuat în partea finală a conductei Petru o conductă cu diametrul $d = 2{,}2$ mm s-a obţinut căderea de presiune de la p_0

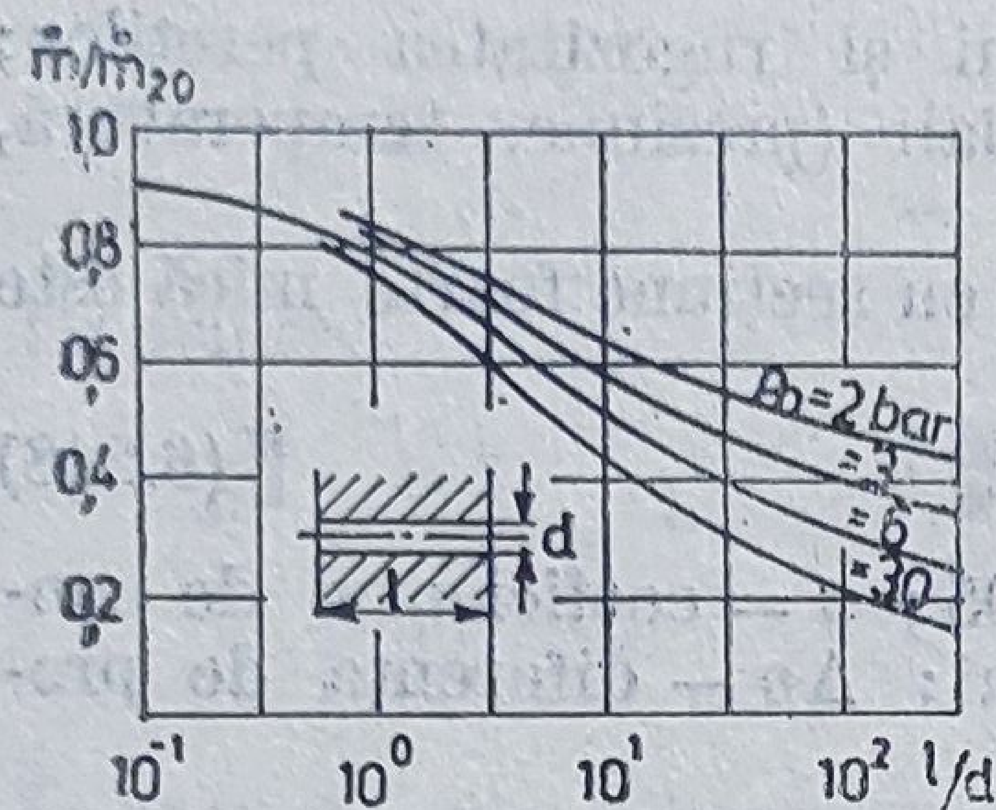


Fig. 6.42. Variația în funcție de presiune a debitului de mediu bifazic ce curge printr-o conductă cu diametrul foarte mic.

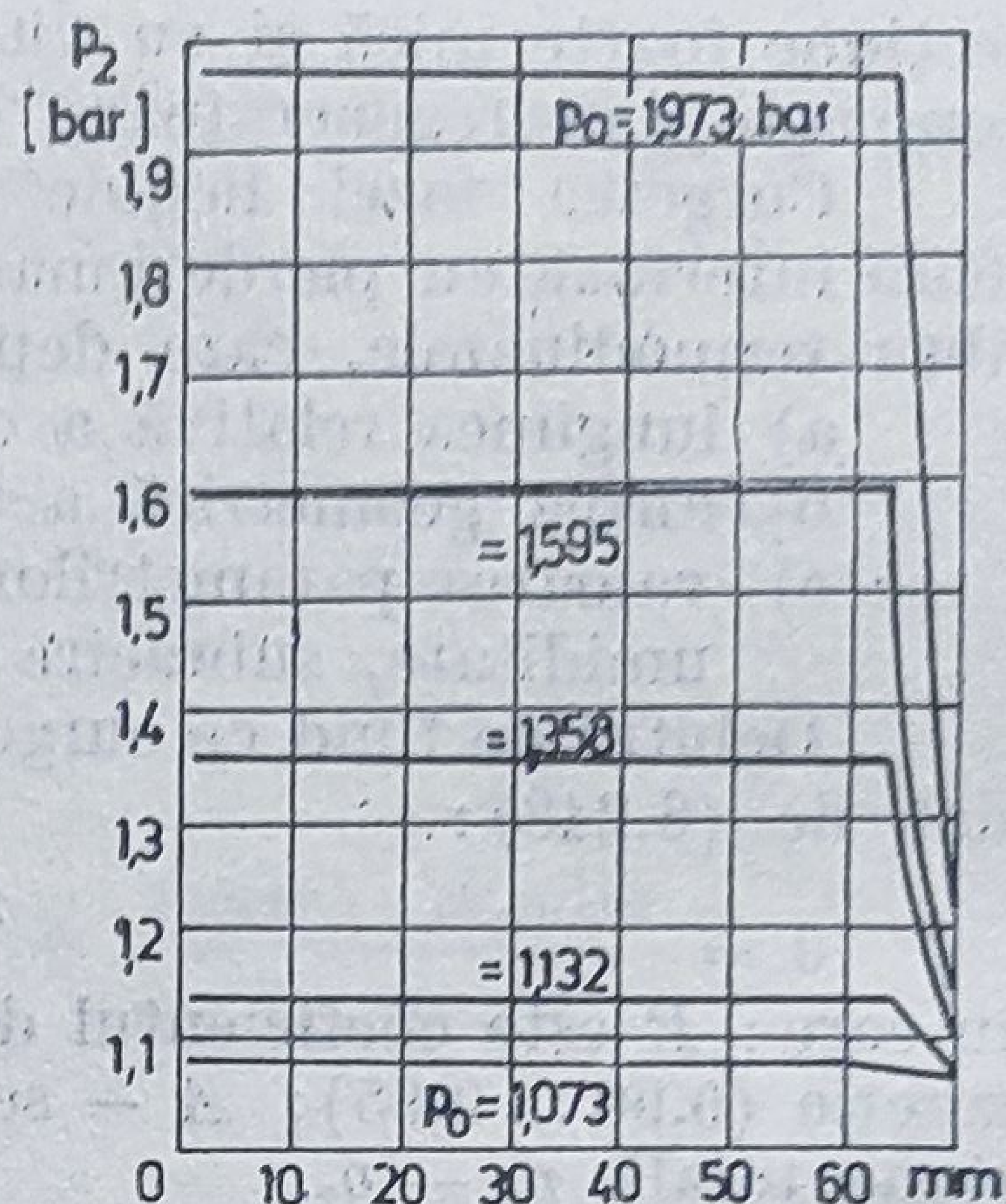


Fig. 6.43. Căderea de presiune la curgerea mediului bifazic prin conducte cu diametrul foarte mic.

la $p_2 = 1$ bar numai dacă l/d depășește 60, așa cum se vede în figura 6.43 Asupra căderii de presiune și debitului influențează în mare măsură forma inițială a canalului. Astfel, pentru o conductă foarte scurtă și o secțiune de intrare racordată, debitul ce trece prin canal va fi majorat cu circa 15% de cel arătat în figura 6.42. O rugozitate mare a pereților conductei foarte scurte influențează favorabil procesul de vaporizare a fazei lichide.

Debitul de mediu bifazic cu umiditate foarte mare ($x > 0{,}2$) ce poate curge printr-o conductă scurtă pate fi calculat cu relația

$$\dot{m} = \mu^* \cdot \mu^*_{bf} - \mu^*_{l/d} \cdot \mu^*_{\Delta t} \dot{m}_{20} \tag{6.249}$$

în care :

μ^* este un coeficent de corecție pentru asimilarea curgerii bifazice cu aceea a fazei lichide (0,88 ... 0,95) ;

μ^*_{bf} — coeficient de corecție ce ține seama de trecerea fazei lichide în faza de vapori în timpul curgerii dat de relația :

$$\mu^*_{bf} = 1 - 0{,}39 \left[1 - \frac{p_2}{p_0}\right]^{0{,}63}$$

$\mu^*_{l/d}$ — coeficient de corecție ce ținea seama de lungimea relativă a conductei, dat de relația :

$$\mu^*_{l/d} = 1{,}1\,(l/d)^{-0{,}25}$$

$\mu^*_{\Delta t}$ — coeficient de corecție ce ține seama de apariția fenomenului de subrăcire a lichidului, dat de relația :

$$\mu^*_{\Delta t} = 1 - 0{,}034(1 - 0{,}024\, p_{0s})\Delta t_{s0}$$

în care:
p_{0s} este presiunea de saturaţie la temperatura iniţială a lichidului;
Δt_{s0} — diferenţa de temperatură $t_0 - t_{s0}$ (în care t_0 = temperatura iniţială; t_{s0} — temperatura de saturaţie în secţiunea iniţială, corespunzătoare presiunii iniţiale p_{0s}).

6.11. CURGEREA MEDIULUI BIFAZIC MONOCOMPONENT CU O UMIDITATE MARE ($y_0 > 6\%$) PRIN CONDUCTE FOARTE LUNGI

În studiul curgerii mediului bifazic cu umiditate mare prin conducte foarte lungi trebuie să se determine în primul rînd pierderile de presiune în funcţie de proprietăţile fluidului şi geometria secţiiunii de curgere. Metodele uzuale de calculare a pierderilor de presiune la curgerea mediilor bifazice prin conducte admit ca ipoteză simplificatoare secţiuni de curgere constante.

Se prezintă mai jos cu titlu de exemplu cîteva din metodele curent folosite la calculul pierderilor de presiune la curgerea mediilor bifazice prin canale circulare orizontale.

Metoda curgerilor independente. Metoda se bazează pe ipoteza că pierderea de presiune a mediului bifazic este egală cu aceea ce ar avea loc la curgerea prin conductă a unei singure faze (lichidă sau gazoasă) afectată de un coeficient de corecţie ce depinde de pierderile de presiune ale fiecărei faze în parte şi de natura curgerii (turbulente sau laminare).

Calculul se face în următoarea ordine:

1. Se determină căderea de presiune pentru cazul cînd fiecare fază ar curge singură prin conducta sau canalul respectiv, obţinîndu-se raportul X dat de relaţia:

$$X = \sqrt{\frac{|\Delta p/\Delta l|_l}{|\Delta p/\Delta l|_g}} = \sqrt{\frac{\Delta p_l}{\Delta p_g}} \tag{6.250}$$

Pierderea de presiune pentru faza gazoasă poate fi determinată cu relaţiile obişnuite ale hidrodinamicii, ca de exemplu relaţia (6.251), aplicabilă conductelor lungi:

$$p_1^2 - p_2^2 = 1614 \cdot \rho_g \cdot \lambda \cdot \beta \frac{T_g}{T_0} \dot{V}^2 l d^{-5} \tag{6.251}$$

în care p_1, p_2 reprezintă presiunea, în daN/cm², la cele două extremităţi ale conductei; $\dot{V}$ — debitul de gaz în m_N^3/h; ρ_g = densitatea relativă a gazului (raportată la densitatea aerului); β — coeficientul de compresibilitate al gazului; T_g, T_0 — temperatura reală a gazului, respectiv temperatura de referinţă = 288 K; l, d — lungimea, în m, respectiv diametrul conductei în mm; λ — coeficientul de frecare.

Căderea de presiune, considerînd că prin conductă curge numai faza lichidă, se determină cu oricare din formulele cunoscute sau cu realația

$$\Delta p = \frac{w_l^2}{2} \rho_l \frac{l}{d} \lambda \qquad (6.252)$$

în care, de exemplu, pentru regimul de curgere laminar $\lambda = 64/Re$, iar pentru cel turbulent :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\ln\left[\frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{2,51}{Re_l\sqrt{\lambda}}\right] \qquad (6.252)$$

în care ε este rugozitatea pereţilor conductei.

2. Se determină apoi valoarea criteriului Rexynolds pentru faza lichidă şi respectiv gazoasă, ca şi cum fiecare fază ar curge separat. În funcţie de valorile obţinute pentru $Re_{l\,cr}$ şi $Re_{g\,cr}$ se determină din tabelul 6.3 natura curgerii mediului bifazic.

Tabelul 6.3.

Valoarea criteriului Re_{lcr} şi Re_{gcr} de separaţie a regimului de curgere laminar de cel turbulent

Natura curgerii fazelor	Valoarea criteriului Reynolds critic pentru	
	Re_{lcr}	Re_{gcr}
Lichidul turbulent — gazul turbulent	2000	2000
Lichidul laminar — gazul turbulent	1000	2000
Lichidul turbulent — gazul laminar	2000	1000
Lichidul laminar — gazul laminar	1000	1000

3. Se determină apoi valoarea lui X din relaţia (6.250) şi din figura 6.44 se determină factorii Φ_g şi Φ_l. Pierderile de presiune ale mediului bifazic se calculează cu relaţia

$$\Delta p_{bf} = \Phi_g^2 \Delta p_g \quad \text{sau} \quad \Delta p_{bf} = \Phi_l^2 \Delta p_l \qquad (6.253)$$

Metoda curgerilor independente descrisă mai sus nu este însă aplicabilă curgerilor cu emulsie de vapori în lichid şi invers ; celor însoţite de un schimb de căldură activ între mediu bifazic şi pereţii canalului ; curgeri lor ce au loc cu accelerarea sau decelerarea curentului.

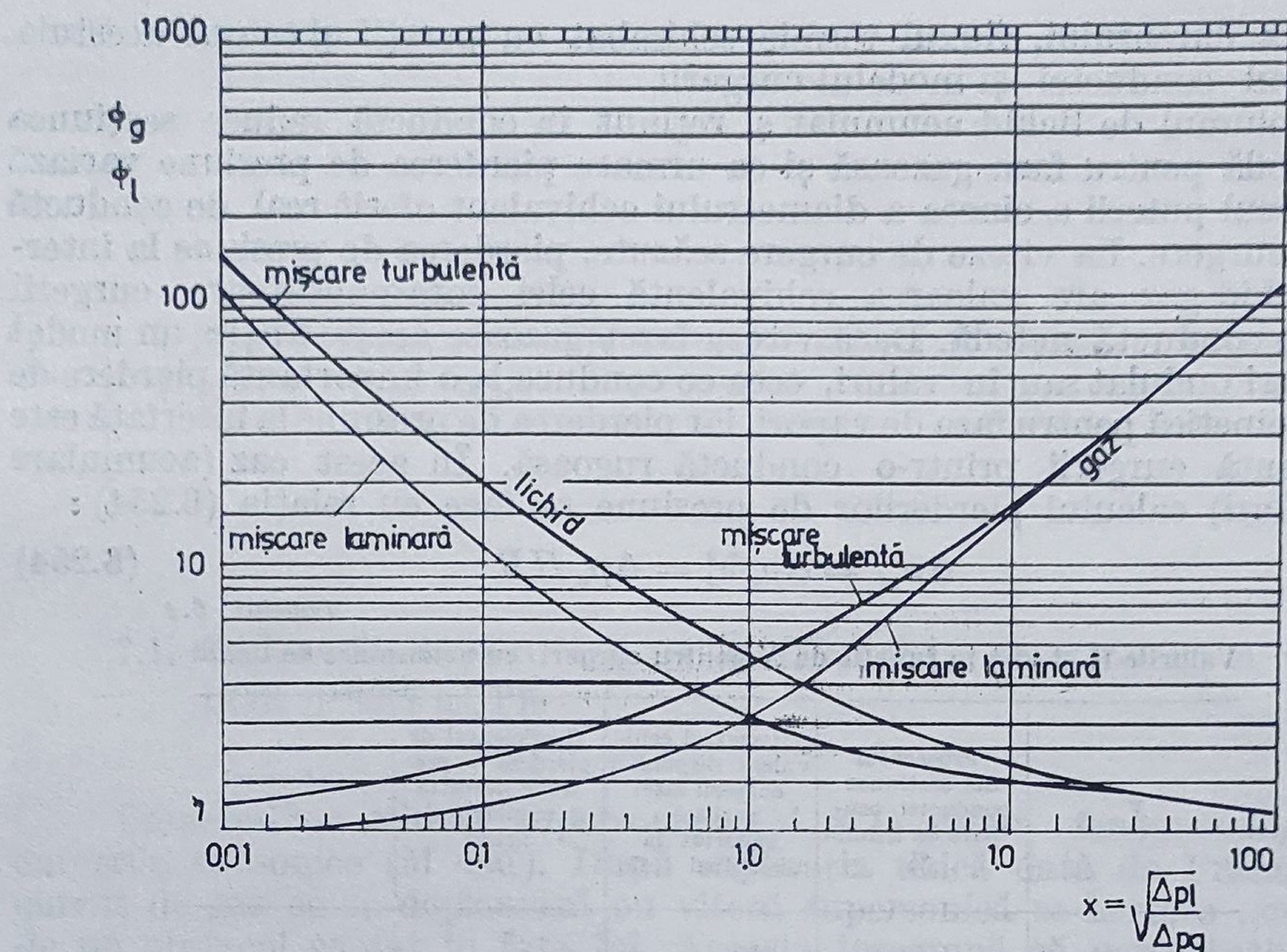


Fig. 6.44. Coeficienţii Φ_g şi Φ_l pentru mediul bifazic.

Metoda curgerilor cu viteză diferită a gazelor. Aşa cum este şi denumită, metoda se aplică atunci cînd fazele curg separat în secţiunea canalului şi cu viteze diferite de curgere. În general curgerea fazei gazoase are loc cu viteze de 2 pînă la 10 ori mai mari decît a fazei lichide, existînd tendinţa ca la început lichidul să se acumuleze în conducta sau canalul respectiv. Pentru mediile bifazice cu umiditate mare, o parte importantă din secţiunea canalului va fi ocupată de lichid. În figura 6.45 se reprezintă cota parte din volumul unei conducte circulare ocupat de faza lichidă, în funcţie de valoarea lui X dată de relaţia (6.250). Asupra fenomenului de acumulare a fazei lichide pe conductă, ce apare ca urmare a frecării interfazice, influenţează natura curgerii (laminară sau turbulentă), presiunea

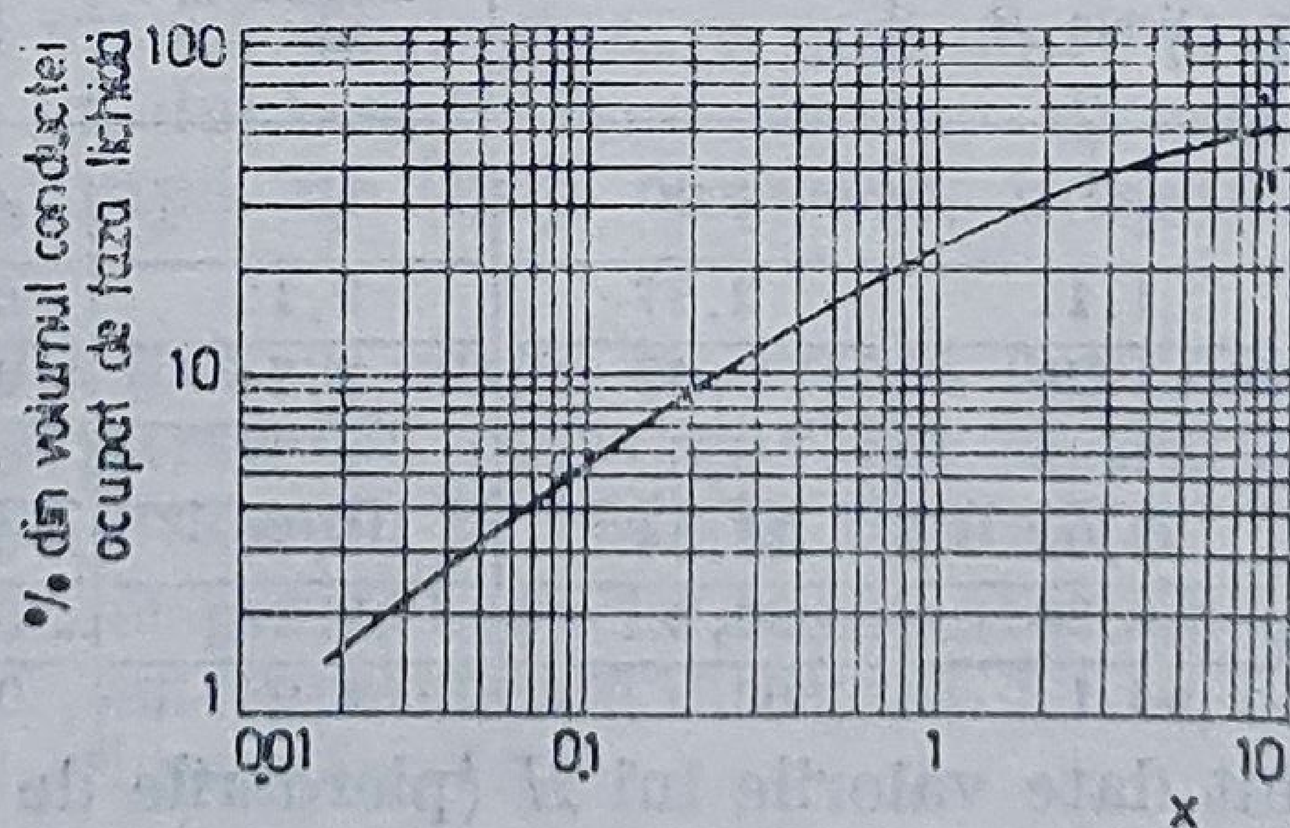


Fig. 6.45. Procentul de volum ocupat de faza lichidă într-o conductă.

frînată a curentului, fluxul termic schimbat cu pereţii şi sensul acestuia, diametrul conductei şi modelul curgerii

Volumul de lichid acumulat şi reţinut în conductă reduce secţiunea disponibilă pentru faza gazoasă şi ca urmare pierderea de presiune variază cu inversul puterii a cincea a diametrului echivalent oferit real de conductă pentru curgere. La viteze de curgere scăzute, pierderea de presiune la interfaţa lichid-gaz are valoarea echivalentă celei corespunzătoare curgerii printr-o conductă netedă. Dacă viteza fazei gazoase creşte apare un model de curgeri ondulat sau în valuri, ceea ce conduce la o importantă pierdere de energie cinetică pentru faza de vapori, iar pierderea de presiune la interfaţă este echivalentă curgerii printr-o conductă rugoasă. În acest caz (acumulare fără valuri) calculul pierderilor de presiune se face cu relaţia (6.254):

$$\Delta p_{bf} = \Delta p_g \Phi_g^2 = \Delta p_g HR \tag{6.254}$$

Tabelul 6.4

Valorile H şi Φ_g^2 în funcţie de X pentru curgeri cu acumulare de lichid

X	Proceentul din secţiunea conductei ocupate de lichid %	Diametrul echivalent disponibil curgerii fazei gazoase, raportat la diametrul total	Coeficientul de pierdere de presiune datorită acumulării de lichid H	Coeficientul Φ_g^2
0	0	1	1	1
0,04	4,1	0,979	1,11	2,37
0,1	8,4	0,956	1,25	3,42
0,4	22	0,884	1,85	8,0
1	36	0,800	3,06	17,64
4	60	0,633	9,80	90,2
10	78	0,469	44,1	306

Tabelul 6.5

Valorile Φ_g^2 şi R în funcţie de X pentru curgerea cu valuri

X	Coeficientul de pierdere de presiune datorate acumulării de lichid H	Φ_g^2	Coeficientul de pierdere de presiune datorat rugozităţii curgerii în valuri, R	Înălţimea relativă a valurilor (raportată la diametrul d al conductei)
0	1	1	1	0
0,04	1,11	2,37	2,13	0,0068 $\cdot d$
0,1	1,25	3,42	2,74	0,00145 $\cdot d$
0,4	1,85	8,0	4,32	0,046 $\cdot d$
1	3,06	17,64	5,76	0,08 $\cdot d$
4	9,80	90,2	9,20	0,18 $\cdot d$
10	44,1	306	6,94	0,12 $\cdot d$

În tabelul 6.4 sînt date valorile lui H (pierderile de presiune ale fazei gazoase şi coeficientul Φ_g^2 (în condiţii de acumulare a fazei lichide) în funcţie de X. În tabelul 6.5 sînt date valorile lui Φ_g^2 şi R pentru curgerea cu valuri.

7. PERTURBAŢII ÎN PROCESELE DE CURGERE. UNDA DE ŞOC

7.1. CARACTERISTICILE CURGERII SUPERSONICE A GAZELOR PERFECTE

Curgerea cu viteză supersonică ($M > 1$) diferă fenomenologic de curgerile subsonice ($M < 1$). După explicaţia fizică dată de Prandtl, un curent de gaz ce se deplasează cu viteză supersonică se loveşte „orbeşte" de un obstacol aşezat în faţa lui. Aceasta înseamnă că perturbaţiile produse de un obstacol întîlnit nu au timp să se propage înapoi, deci nu au timp să informeze particulele ce vin către el în prezenţa lui. Pentru exemplificare se consideră că într-un curent de gaz, începînd de la un anumit timp τ, se produce periodic, într-un anumit punct, o mică perturbaţie. Dacă gazul s-ar fi găsit în repaus, perturbaţia s-ar fi propagat în masa lui sub forma unor unde sferice cu o viteză egală cu viteza sunetului. Într-un gaz în mişcare, însă, peste mişcarea undei sonice sferice se suprapune mişcarea curentului şi ca urmare suprafeţele sferice de perturbaţie vor fi antrenate de curentul de gaz.

Desigur că viteza sonică de propagare a perturbaţiei se va compune cu viteza de curgere a fluidului dînd o viteză rezultantă.

Dacă viteza de curgere a fluidului este mai mică decît viteza sonică, perturbaţia avînd viteză de deplasare mai mare şi de sens contrar (egală cu cea sonoră), se va deplasa în sens contrar direcţiei de mişcare a gazului şi, ca urmare, după un timp oarecare, întreaga masă de gaz va fi perturbată.

În cazul unui gaz ce curge cu viteză supersonică, perturbaţia va cuprinde numai o parte din masa gazului şi anume aceea cuprinsă în interiorul unui con, aşa cum se vede în figura 7.1

Deplasarea unei perturbaţii la o mişcare subsonică a curentului de gaz, deci cu $M < 1$, este prezentată în figura 7.1 *a*, iar la o mişcare supersonică, cu $M > 1$, figura în 7.1 *b*.

În cazul unei curgeri supersonice, perturbaţia cuprinde un spaţiu format dintr-un con cu unghiul α la vîrf, a cărui valoare este $\sin \alpha = w/a$.

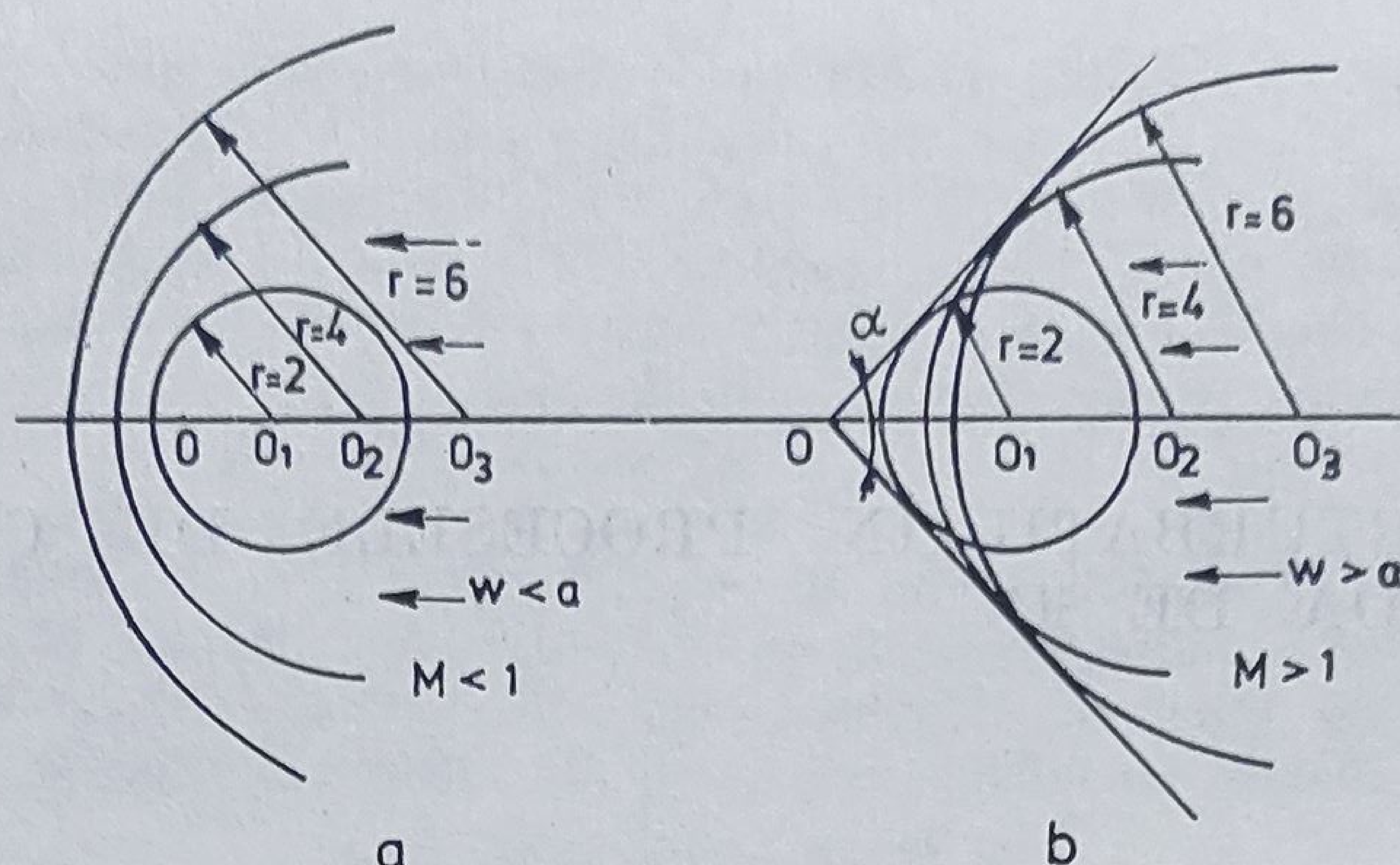


Fig. 7.1. Generarea unei unde de şoc: *a*—viteză de curgere subsonică; *b*—viteză de curgere supersonică.

În consecinţă, la zona de întîlnire a undei de perturbaţie cu curentul supersonic, deci pe suprafaţa laterală a conului, se va produce o frînare a curentului, şi ca urmare a frînării va apărea o discontinuitate în presiunea gazului, denumită *salt de compresiune* sau *undă de şoc*.

7.2. APARIŢIA UNDEI DE ŞOC. VITEZA DE DEPLASARE A UNDEI DE ŞOC

În cazul curgerii unui gaz prin turbomaşini sau maşini reactoare cu viteză supersonică, gazul întîlneşte pereţi şi muchii ale organelor acestora, care determină apariţia unei perturbaţii ce va genera o undă de şoc.

Deoarece în unda de şoc apare o frînare a curentului de gaz, ca un corolar va apărea şi o undă de compresiune. Undele slabe de compresiune se deplasează cu viteza cu care se propagă sunetul în mediul respectiv, iar cele puternice cu viteze mai mari decît acestea.

Unda de compresie datorată unei perturbaţii puternice denumită *undă de compresiune puternică* se caracterizează prin aceea că odată cu apariţia saltului de presiune în masa gazului va apărea şi un salt de densitate şi de temperatură. Aceste salturi au loc într-un strat foarte subţire de gaz, ce poartă denumirea de „frontul undei de compresiune". Deci unda de compresiune (unda de şoc) este însoţită întotdeauna de o undă de şoc termică şi de una de densitate. Grosimea aproximativă a frontului undei de şoc puternice este de ordinul drumului liber mijlociu molecular.

În figura 7.2 se prezintă viteza de deplasare a frontului unei unde de şoc ce a apărut la un moment dat într-un curent de gaz.

Unda de şoc apare iniţial de forma profilului ce a produs pertur- şi este reprezentată prin curba *1—2*. Datorită saltului de compresiune ce are loc în ea, apare şi un salt de temperatură. Desigur că cu cît saltul de presiune va fi mai puternic cu atît mai mare va fi saltul de temperatură între amontele şi avalul frontului undei de şoc. Cu linie punctată este

redat în figura 7.2 saltul de temperatură. Deoarece odată cu creşterea temperaturii creşte şi viteza de propagare a sunetului, care este totodată şi viteza de deplasare a undei de şoc, înseamnă că aceasta se va deplasa mai repede spre partea cu temperatură mai ridicată (zonele $1'$, $1''$, etc.) şi mai încet în partea unde temperatura este scăzută (zonele $2'$, $2''$, etc.), adică se va deforma pînă se va stabiliza şi va ajunge de exemplu în $1^{IV} - 2^{IV}$, cînd devine o dreaptă.

Odată stabilizată poziţia şi forma undei de compresiune se stabilizează şi salturile de temperatură, densitate, viteză etc., care vor coincide cu ea. Ele se numesc tot unde de şoc, dar cu referire la mărimea ce prezintă discontinuitatea, deci unda de şoc de viteză, undă de şoc de temperatură etc. Ele mai sînt numite şi salt de viteză, salt de temperatură etc.

Fig. 7.2. Deplasarea undei de şoc.

Experimental s-a constatat că în unele cazuri speciale, ca de exemplu într-un front de flacără la apariţia detonaţiei, în unda de şoc apare, în locul unei compresiuni, o depresiune. Această depresiune apare şi în cazul cînd în frontul undei de şoc are loc un aport de căldură în masa gazului de la pereţi sau din interior. Apariţiei acestui salt de depresiune în loc de salt de presiune contravine teoriei aplatizării undei de şoc prezentată mai sus, deoarece în aceste cazuri avînd loc un aport de căldură din exterior în zona 2 va creşte temperatura gazului în această zonă, crescînd totodată şi viteza de propagare a sunetului, ceea ce va avea ca urmare o mărire a pantei frontului undei. În cazul unei curgeri adiabate, frontul undei de şoc poartă numele de *adiabata lui Huguenot* şi în ea nu pot apare salturi de depresiune.

Fig. 7.3. Modelul fizic al generării unei unde de şoc într-un gaz perfect.

Pentru prezentarea fenomenologică a undei de şoc se face apel la următorul model. Se consideră o conductă în care se deplasează brusc un piston, aşa cum se vede în figura 7.3. Ca urmare a acestei perturbaţii, în curent apare o undă de şoc în secţiunea 1, care se deplasează în timpul $d\tau$ din 1 în H, deci parcurge distanţa dx. Presiunea gazului înainte de

frontul undei de şoc din secţiunea *1*, este p_1, iar în zona din spatele ei este p_2. Ca urmare a saltului de presiune, în zona $1-H$ va avea loc o creştere a densităţii gazului de la ρ_1 la ρ_2. Însemnînd cu A secţiunea conductei se obţine

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 \ [\mathrm{kg/m^3}]; \ A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \ [\mathrm{m^2}]$$

Creşterea densităţii gazului presupune că în volumul cuprins între secţiunile *1* şi *H* va pătrunde din volumul cuprins între secţiunile *1* şi *2* o cantitate de gaz a cărei valoare este dată de relaţia

$$\mathrm{d}m = (\rho_2 - \rho_1) A \cdot \mathrm{d}x \ [\mathrm{kg}] \tag{7.1}$$

Deci în timpul propagării unei unde de şoc puternice, gazul din spatele frontului undei se pune în mişcare în direcţia de deplasare a undei de şoc cu viteza w_c.

Cantitatea masică de gaz ce pătrunde în $1 - H$ cu viteza w_c, în timpul $\mathrm{d}\tau$, prin conducta de diametrul D, este exprimată de ecuaţia de continuitate :

$$\mathrm{d}m = \rho_2 \frac{\pi \cdot D^2}{4} w_c \cdot \mathrm{d}\tau = \rho_2 \cdot A w_c \cdot \mathrm{d}\tau \tag{7.2}$$

Din egalarea lui (7.1) cu (7.2) se obţine viteza de curgere a gazului :

$$w_c = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \ [\mathrm{m/s}] \tag{7.3}$$

Cum viteza de deplasare a undei de şoc este $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = w_u$ relaţia (7.3) capătă forma

$$w_u = w_c \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \tag{7.4}$$

Pentru determinarea vitezei de deplasare a undei de şoc se aplică ecuaţia cantităţii de mişcare masei de gaz ce umple domeniul $1-H$, a cărei valoare este $\rho_1 A \mathrm{d}x$ şi care după timpul $\mathrm{d}\tau$ trece din stare de repaos la o mişcare cu viteza w_c. Variaţia contităţii de mişcare a acestei mase de gaz va fi egală cu impulsul forţelor de presiune ce acţionează asupra secţiunilor *1* şi *H*, dată de relaţia

$$(p_2 - p_1) A \cdot \mathrm{d}\tau = \rho_1 \cdot A(w_c - 0) \, \mathrm{d}x \tag{7.5}$$

Din relaţia (7.5) se determină w_u ştiind că $w_u = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$.

Deci :

$$w_u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 \cdot w_c} \tag{7.6}$$

Prin înlocuirea vitezei w_e dată de (7.4) în (7.6) se obține viteza de deplasare a undei de șoc în funcție de saltul de presiune și saltul de densitate:

$$w_u = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 \cdot w_u \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}}; \; w_u = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \; [\text{m/s}] \tag{7.7}$$

În cazul unei unde de șoc de mică intensitate (undă de perturbație slabă) se poate considera că $\rho_1 \approx \rho_2$ și $p_2 \approx p_1$. Ca urmare, viteza de propagare a undei de șoc pentru un salt de presiune infinit mic $\mathrm{d}p$ și de densitate $\mathrm{d}\rho$ va fi dată de (7.8)

$$w_u = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} = a \; [\text{m/s}] \tag{7.8}$$

Deci pentru unde slabe de perturbație și pentru curgeri cu viteze ce corespund la M = 1, viteza de propagare a undei este chiar viteza sonică. Pentru undele puternice de perturbație, ce presupun curgeri cu $M \gg 1$, viteza de propagare a undei de șoc este mai mare ca viteza sunetului, deoarece $\rho_2 \neq \rho_1$ și $p_2 \neq p_1$.

În cazul undei de șoc ce se propagă cu viteza sunetului se poate considera că saltul de presiune și densitate este mic și are loc adiabat, deci fără variația de entropie; ca urmare, din ecuația izentropiei (p/ρ^k = const.) ecuația (7.8) devine

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = k\frac{p}{\rho} = RTk; \; \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} = \sqrt{RTk} = a \; [\text{m/s}] \tag{7.9}$$

Prin egalarea relației (7.7) cu (7.4) se obține relația ce exprimă viteza de deplasare a gazului în spatele frontului undei de șoc:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = w_c \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$w_c = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}} \; [\text{m/s}] \tag{7.10}$$

Din relația (7.10) se observă că pentru o undă de compresiune slabă la care $\rho_2 \approx \rho_1$ și $p_2 \approx p_1$, viteza de deplasare a gazului w_c devine nulă. În realitate însă, unda sonică fiind formată din zone alternante regulate de compresie și destindere, gazul în spatele undei de șoc are o mișcare vibratorie slabă și numai mișcarea de translație a particulelor gazoase este nulă. Din relația (7.10) se constată că viteza de deplasare a gazului scade odată cu scăderea saltului de densitate.

În cazul unei perturbații puternice, w_c nu va mai fi nulă ci va avea o valoare din ce în ce mai mare cu cît saltul de presiune și de densitate este mai puternic. Ca urmare, gazul din secțiunea *1—2* (figura 7.3), anume

20 — c. 666

din spatele frontului unei unde de şoc puternice, se va deplasa în timpul $d\tau$ spre secţiunea $I-H$, dînd naştere unei depresiuni.

Deci formarea unei unde de şoc, ca urmare a unei perturbaţii unice, ca de exemplu o explozie, o deplasare bruscă a pistonului, o detonaţie, o vaporizare bruscă etc. într-un mediu imobil se va amortiza destul de repede. Numai în cazul cînd sursa de perturbaţie îşi manifestă continuu prezenţa, unda de şoc este întreţinută şi nu se va amortiza.

Deoarece unda de şoc puternică se propagă cu o viteză mai mare ca viteza sonică şi în sens contrar direcţiei de curgere a gazului, undele de şoc ce se formează în faţa unui obstacol generator de perturbaţii pot rămîne neamortizate numai dacă gazul se deplasează şi el cu o viteză supersonică. Ca urmare poziţia spaţială a frontului undei de şoc va depinde de raportul dintre viteza de curgere a gazului şi aceea de deplasare a undei de şoc.

Deci dacă viteza de curgere a gazului este mai mică decît viteza de deplasare a undei de şoc, ea se va amortiza (se va pierde în masa de gaz).

7.3. UNDA DE ŞOC DREAPTĂ

Prin undă de şoc se înţelege unda a cărui front este perpendicular pe direcţia de curgere a gazului.

Se consideră o undă de şoc dreaptă şi cu poziţie spaţială staţionară, într-un curent de gaz a cărui viteză medie de curgere este supersonică. Pentru exemplificare se consideră că viteza de curgere a gazului notată cu w_1 este egală cu aceea de deplasare a undei de şoc notată cu w_u, aşa cum se arată în figura 7.4. Deci:

$$w_1 = -w_u$$

Ca urmate a egalităţii vitezelor w_1 şi w_u, unda de şoc are o poziţie spaţială fixă în curentul de gaz, deci toate liniile de curent vor suferi salturile de densitate, de viteză, presiune şi temperatură în acelaşi plan.

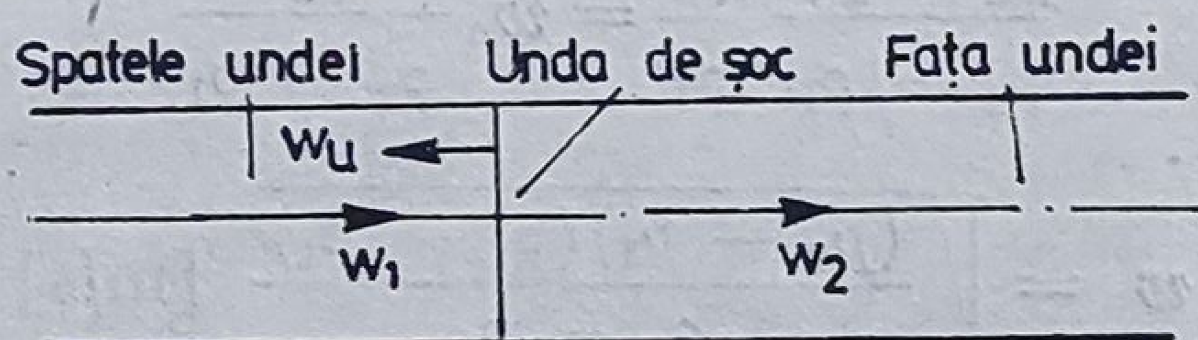


Fig. 7.4. Undă de şoc dreaptă staţionară.

Pentru reprezentarea modelului fizic, se consideră curgerea unui gaz într-un tunel aerodinamic cu viteza supersonică, peste un profil ce constituie sursa de perturbaţie.

Pentru determinarea raportului dintre viteza de deplasare a gazului înaintea frontului undei de şoc, notată cu w_1, şi în spatele ei, notată cu w_2, se scriu ecuaţiile curgerii unidirecţionale considerînd secţiunea canalului egală cu unitatea ($A = 1$ m^2). Se obţin:

— ecuaţia de continuitate:

$$\rho_1 \cdot w_1 = \rho_2 \cdot w_2 \tag{7.11}$$

— ecuaţia cantităţii de mişcare:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_1(w_1 - w_2) \tag{7.12}$$

Din (7.11) şi (7.12) se obţine:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot w_1(w_1 - w_2) = \rho_1 \cdot w_1^2 - \rho_1 \cdot w_1 \cdot w_2 = \rho_1 w_1^2 = \rho_1 \cdot w_2^2 \tag{7.13}$$

Folosind ecuaţia de continuitate rezultă

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_1(w_1 - w_2) = \rho_2 w_1 w_2 - \rho_1 w_1 w_2 = w_1 w_2(\rho_2 - \rho_1) \tag{7.14}$$

de unde

$$w_1 \cdot w_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \ [\mathrm{m^2/s^2}] \tag{7.15}$$

Deoarece grosimea frontului undei de şoc este foarte mică, iar curgerea este adiabată, se poate considera că procesul are loc pe adiabata lui Huguenot şi ca urmare este satisfăcută condiţia egalităţii temperaturii frînate în faţa şi în spatele undei de şoc:

$$T_0 = T_{01} = T_{02} = \frac{h_{01}}{c_p} = \frac{h_{02}}{c_p} = \mathrm{const};$$

$$T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{w_2}{2c_p} = \mathrm{const.} \tag{7.16}$$

Deci temperatura momentană a gazului în faţa undei de şoc este dată de relaţiile

$$T_1 = T_0 - \frac{w_1^2}{2c_p}; \quad T_0 = \frac{p_{01}}{\rho_{01} R} = \frac{p_{02}}{\rho_{02} R} = \mathrm{const} \tag{7.17}$$

în care T_0, p_0 şi ρ_0 sînt valorile frînate ale temperaturii presiunii şi densităţii gazului notate cu indicele 1 în faţa şi cu 2 în spatele frontului undei de şoc.

Din ecuaţia de stare a gazului se obţin constanta generală a gazului:

$$R = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \mathrm{const.} \tag{7.18}$$

Din relaţiile (7.17) şi (7.18) se obţin presiunile momentane p_1 şi p_2 în faţa şi în spatele frontului undei de şoc:

$$p_1 = \rho_1 R T_1 = \rho_1 R \left[T_0 - \frac{w_1^2}{2c_p} \right] \rho_1 = R \left[\frac{p_{01}}{R \rho_{01}} - \frac{w_1^2}{2c_p} \right]$$

$$p_1 = \rho_1 \left[\frac{p_{01}}{\rho_{01}} - \frac{R w_1^2}{2c_p} \right] [\mathrm{N/m^2}] \tag{7.19}$$

Deoarece pentru gazul perfect, constanta generală se poate scrie sub forma

$$R = c_p \frac{k-1}{k}$$

relația (7.19) capătă forma (7.20)

$$p_1 = \rho_1\left[\frac{p_{01}}{\rho_{01}} - \frac{k-1}{2k} w_1^2\right] \text{ [N/m}^2\text{]} \tag{7.20}$$

și analog :

$$p_1 = \rho_2\left[\frac{p_{02}}{\rho_{02}} - \frac{k-1}{2k} w_2^2\right] \text{ [N/m}^2\text{]} \tag{7.21}$$

Și din (7.14), (7.20) și (7.21) se obține valoarea saltului de presiune în unda de șoc :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2k}{k+1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \tag{7.23}$$

Ținînd seama de relația care exprimă viteza critică, și anume

$$a_{cr}^2 = \frac{2 \cdot k}{k+1} R \cdot T_0 = \frac{2 \cdot k}{k+1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}}, \tag{7.24}$$

expresia (7.23) capătă forma

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2k}{k+1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} = a_{cr}^2 \tag{7.25}$$

Ținînd seama de (7.15), se obține raportul dintre viteza de curgere a gazului înainte și după frontul undei de șoc drepte :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = w_1 w_2 = a_{cr}^2 \tag{7.26}$$

Știind că $M_{cr} = w/a_{cr}$, relația (7.26) poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{w_1}{a_{cr}} \frac{w_2}{a_{cr}} = 1; \; M_{cr} \cdot M_{cr_2} = 1 \tag{7.27}$$

Analizînd relația (7.27) se constată că la apariția unei unde de șoc drepte, viteza supersonică a gazului din fața undei trece în viteza subsonică în spatele ei, deoarece pentru satisfacerea relației (7.26) dacă $w_1 > a_{cr}$ este obligatoriu ca $w_2 < a_{cr}$. Deci cu cît raportul w_1/a_{cr} este mai mare, cu atît w_2/a_{cr} va fi mai mic. Se observă că pentru $w_1 = a_{cr}$ se obține $w_2 = w_1 = a_{cr}$.

Pentru determinarea creșterii presiunii și a densității gazului ca urmare a apariției unui front de undă de șoc se face apel la relațiile (7.20) și (7.21). Se obține relația (7.28) :

$$p_2 - p_1(\rho_2 - \rho_1) \frac{p_{01}}{\rho_{01}} - \frac{k-1}{2k}(\rho_1 w_1^2 + \rho_2 w_2^2) \text{ [N/m}^2\text{]} \tag{7.28}$$

Ținînd seama că ecuația continuității permite înlocuirea ultimului termen al ecuației (7.28) cu expresia (7.29), adică

$$\rho_1 w_1^2 + \rho_2 w_2^2 = w_1 w_2(\rho_2 + \rho_1) \tag{7.29}$$

se obține pentru (7.28) forma

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{p_{01}}{\rho_{01}} - \frac{k-1}{2k} w_1 w_2 \tag{7.30}$$

Cu ajutorul relațiilor (7.15) și (7.23) se obține în final

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = k\,\frac{p_2 + p_1}{\rho_2 + \rho_1} \tag{7.31}$$

După cum se vede din (7.31) creșterea presiunii și a densității în frontul undei de șoc este proporțională cu raportul dintre presiunea lui înainte și după undă și densitata medie. Deci pentru un salt de densitate infinit mică, cînd $p_1 \approx p_2$ și $\rho_1 \approx \rho_2$ se obține $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho = kp/\rho$. Ca urmare, unei unde sonice de mică intensitate îi corespunde un proces adiabat-izenotrop.

7.4. MĂRIMILE TERMOFIZICE ALE GAZULUI PERFECT ÎN ADIABATA DE ȘOC DREAPTĂ. ADIABATA LUI HUGUENOT

Ecuația (7.31) se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = k\,\frac{p^2 + p_1}{p_2 - p_1}; \quad \frac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + 1}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - 1} = k\,\frac{1 + \dfrac{p_1}{p_2}}{1 - \dfrac{p_1}{p_2}} \tag{7.32}$$

Din relația (7.32) se obține creșterea de densitate în funcție de saltul de presiune :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\dfrac{k+1}{k-1} + \dfrac{p_1}{p_2}}{1 + \dfrac{k+1}{k-1}\,\dfrac{p_1}{p_2}} \tag{7.33}$$

Expresia (7.33) este ecuația ce leagă între ele presiunea și densitatea în frontul unei unde de șoc pentru o curgere adiabată, denumită și „undă de

şoc adiabată" sau „adiabata lui Huguenot". Pentru o transformare termodinamică adiabată, aceiaşi parametri sînt legaţi prin relaţia cunoscută

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{7.34}$$

Deci există o diferenţă între ecuaţia undei de şoc adiabate (7.33) şi ecuaţia transformării adiabate (7.34); această diferenţă însă nu este prea mare.

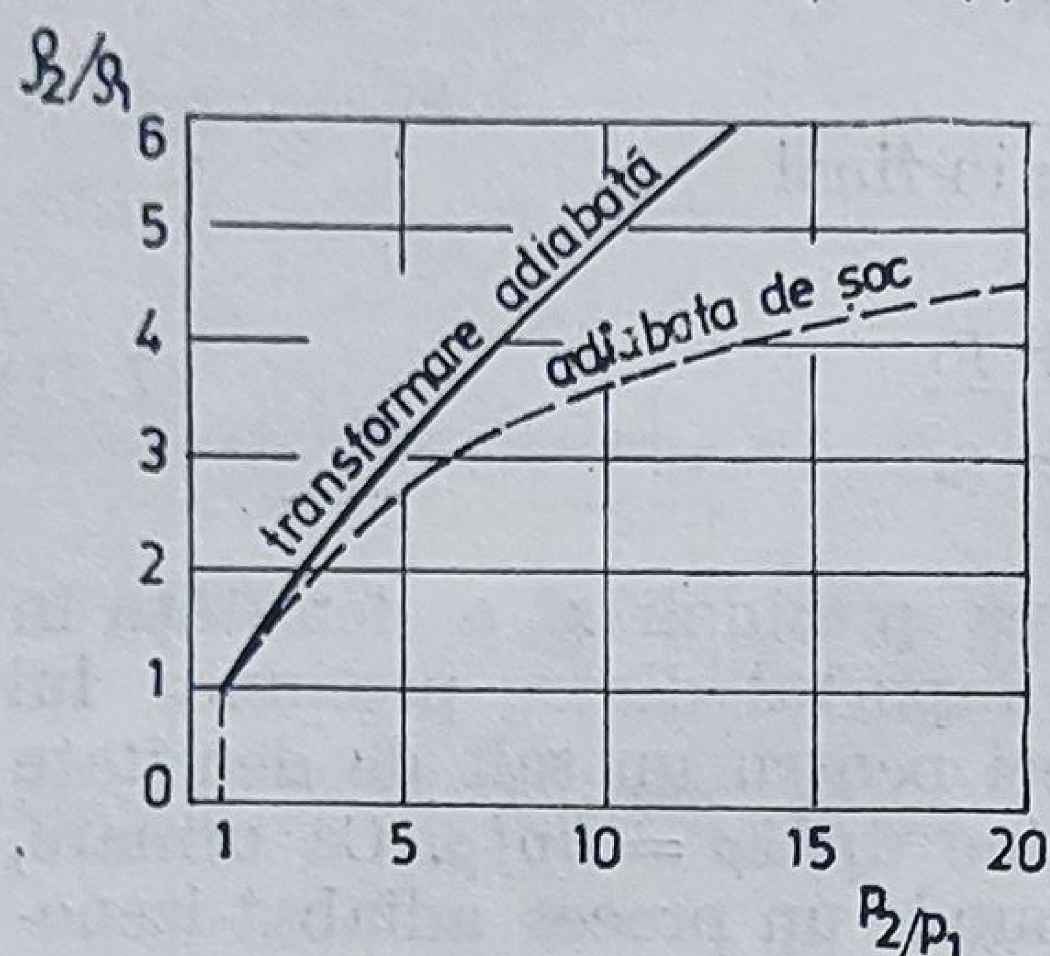


Fig. 7.5. Ecuaţiile adiabatei în termodinamică şi în unda de şoc.

În figura 7.5 este prezentată curba de variaţie a lui $\rho_2/\rho_1 = f(p_2/p_1)$ într-un proces adiabat termodinamic şi în unda de şoc adiabată, denumită şi adiabata de şoc.

Saltul maxim de densitate $|\rho_2/\rho_1|_{max}$ va corespunde saltului maxim de presiune $|p_1/p_2|_{max}$, adică valorii lui $p_2 \to \infty$. În cazul acesta, din relaţia (7.33) se obţine valoarea maximă a saltului de densitate:

$$\left.\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|_{max} = \left.\frac{\dfrac{k+1}{k-1} + \dfrac{p_1}{p_2}}{1 + \dfrac{k+1}{k-1}\,\dfrac{p_1}{p_2}}\right|_{p_2 \to \infty} = \frac{k+1}{k-1} \tag{7.35}$$

Pentru un gaz perfect cu $k = 1{,}4$:

$$\left.\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|_{max} = \frac{k+1}{k-1} = 6; \quad \rho_2 = 6\,\rho_1.$$

Pentru o curgere adiabată, relaţia cunoscută dintre presiune şi densitate permite calculul saltului de presiune în funcţie de saltul de densitate. Din relaţia

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = kM_1^2\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \tag{7.36}$$

în care: $M_1 = w_1/a_1$ (unde w_1 este viteza gazului înainte de frontul undei de şoc; iar a_1 — viteza sunetului înaintea frontului undei de şoc). Înlocuid

pe ρ_2/ρ_1 din (7.33) în (7.36) se obține relația de calcul a saltului de presiune statică (7.37), ce are loc în frontul undei pentru o curgere cu $M_1 > 1$:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{7.37}$$

Ținînd seama de expresia ce leagă pe M de M_{cr}, relația (7.37) poate căpăta și forma

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_{cr_1}^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2} \tag{7.38}$$

După cum se vede din (7.38), odată cu micșorarea vitezei supersonice deci cînd $M_{cr_1} \to 1$, saltul de compresie tinde să dispară, deoarece $p_2 \to p_1 |_{M_{cr} \to 1}$.

Deci într-un curent de gaz cu viteză subsonică nu este posibilă apariția unei unde de șoc drepte.

După cum se vede din relațiile (7.37) și (7.38), apariția saltului de presiune în curentul de gaz, ca urmare a undei de șoc, este posibilă numai dacă viteza de curgere a gazului corespunde lui $M_1 > 1$. Pentru $M_1 \leqslant 1$, $p_2 \leqslant p_1$, deci unda de șoc dreaptă apare numai în curgerea supersonică, iar mărimea saltului de presiune, pentru un gaz oarecare, depinde numai de valoarea criteriului M_1.

Pentru determinarea relației de calcul a saltului de densitate în funcție de valoarea criteriului Mach a curentului incident M_1 se introduc relația (7.37) și relația (7.33) obținîndu-se

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{k+1}{k-1}}{1 + \frac{1}{M_1^2} \cdot \frac{2}{k-1}} \tag{7.39}$$

Unda de șoc este un proces ireversibil și, ca urmare, aduce după sine pierderi energetice. Aceste pierderi vor aduce după sine pierderi de presiune totală.

În cazul apariției unei unde de șoc, datorită ireversibilității lui, presiunea frînată a curentului după frontul undei de șoc, notată cu p_{02}, va fi mai mică decît cea din față p_{01}, deci

$$\Delta p_0 = p_{01} - p_{02} = p_{01}\left(1 - \frac{p_{02}}{p_{01}}\right) = p_{01}\sigma_p$$

unde cu σ_p s-a notat coeficientul de pierdere de presiune totală.

Pentru o curgerea diabată printr-o conductă cu secțiune constantă este satisfăcută relația

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = M_{cr_1}^2 \tag{7.40}$$

Presiunea frînată din spatele undei de şoc, notată cu p_{02} sau din faţă notată cu p_{01} se determină cu relaţiile (2.115). Se obţine

$$p_{02} = \frac{p_2}{\left[1 + \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{p_2}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{M_{cr_1}^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}} \tag{7.41}$$

$$p_{01} = \frac{p_1}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} \quad [\mathrm{N/m^2}] \tag{7.42}$$

Din relaţiile (7.41) ş (7.42) se determină coeficientul de salt al presiunii totale în frontul undei de şoc :

$$\sigma_p = \frac{p_{02}}{p_{01}} = M_{cr_1}^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{M_{cr_1}^2}}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{7.43}$$

Relaţia (7.43) este valabilă numai pentru $M_{cr} > 1$.

Pentru o viteză $w_1 \to \infty$, deci pentru $M_{cr_{max}}^2 = (k+1)/(k-1)$ se obţine $\sigma_p = 0$. În figura 7.6 se prezintă variaţia lui σ_p în funcţie de M_{cr_1} pentru o valoare a exponentului adiabat $k = 1,4$.

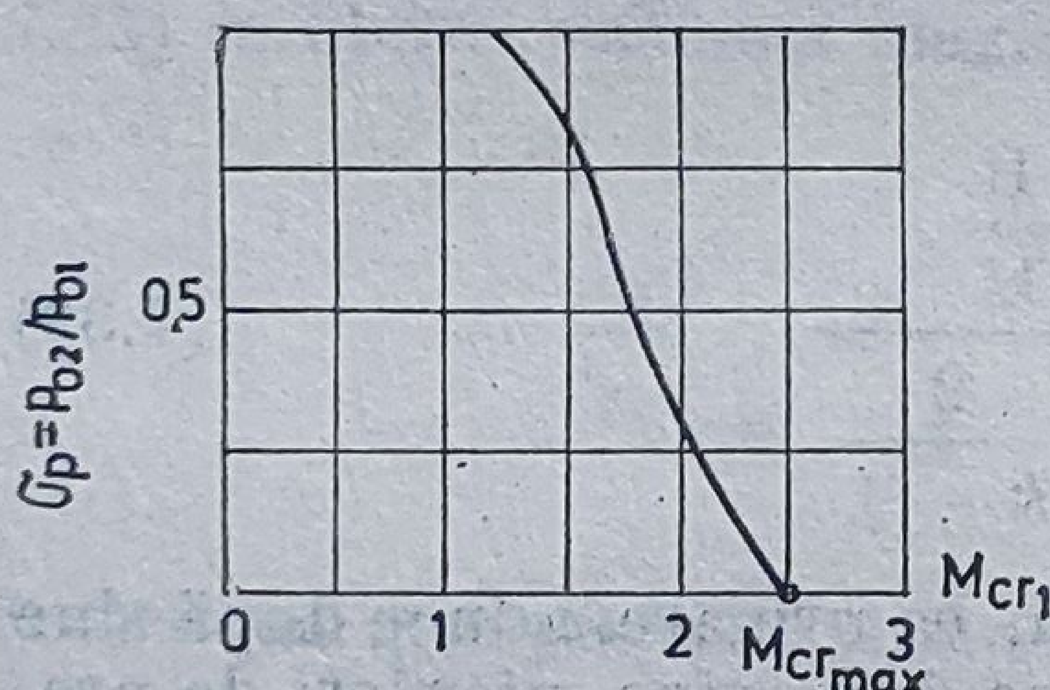


Fig. 7.6. Saltul de presiune σ_p în unda de şoc.

Densitatea gazului la presiunea şi temperatura frînată a lui după unda de şoc dreaptă se obţine din (7.39) şi este

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_1} = \frac{M_{cr_1}^2}{\left[1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{M_{cr_1}^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}} \tag{7.44}$$

Viteza gazului în spatele undei de şoc este dată de (7.45) obţinută cu ajutorul relaţiilor (7.39) şi 7.26) :

$$w_2 = a_{cr} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{7.45}$$

Valoarea minimă a criteriului Mach critic al curgerii pentru care poate apare o undă de şoc este dată de relaţia (7.46)

$$M_{cr1min} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2,449; \quad M_{cr2min} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = 0,408 \qquad (7.46)$$

pentru $k = 1,4$

7.5. UNDA DE ŞOC OBLICĂ

Unda de şoc oblică apare atunci cînd în frontul unei unde de şoc gazul îşi modifică direcţia de curgere. În figura 7.7 se prezintă un salt de compresiune ce apare la întîlnirea unui curent de gaz cu viteză de curgere supersonică w_1 cu un con. Ca urmare a formei conului, are loc o deviaţie a direcţiei de curgere a curentului. Viteza de curgere în spatele frontului undei de şoc este w_2. În figura 7.8 se prezintă schema şi mărimile caracteristice ale undei de şoc oblice.

Din figura 7.7 se vede că unda de şoc oblică apare la întîlnirea unui curent de gaz supersonic cu un corp oarecare şi are ca punct de discontinuitate generatorul de perturbaţie al acestuia, care în cazul de faţă este vîrful conului. Deci frontul undei de şoc oblice prezintă două ramuri ce se întîlnesc în vîrful conului. De asemenea, după cum se vede din figura 7.8, unda de şoc ce a apărut în curentul de gaz supersonic face cu direcţia de curgere a vitezei w_1 un unghi α. Viteza w_2 subsonică, din spatele frontului undei de şoc, face ca frontul undei de şoc un unghi $\beta = \alpha - \omega$, în care α este unghiul făcut de curentul de gaz iniţial cu frontul undei de şoc. După cum se vede din figura 7.9 vectorii vitezelor w_1 şi w_2 se pot descompune în

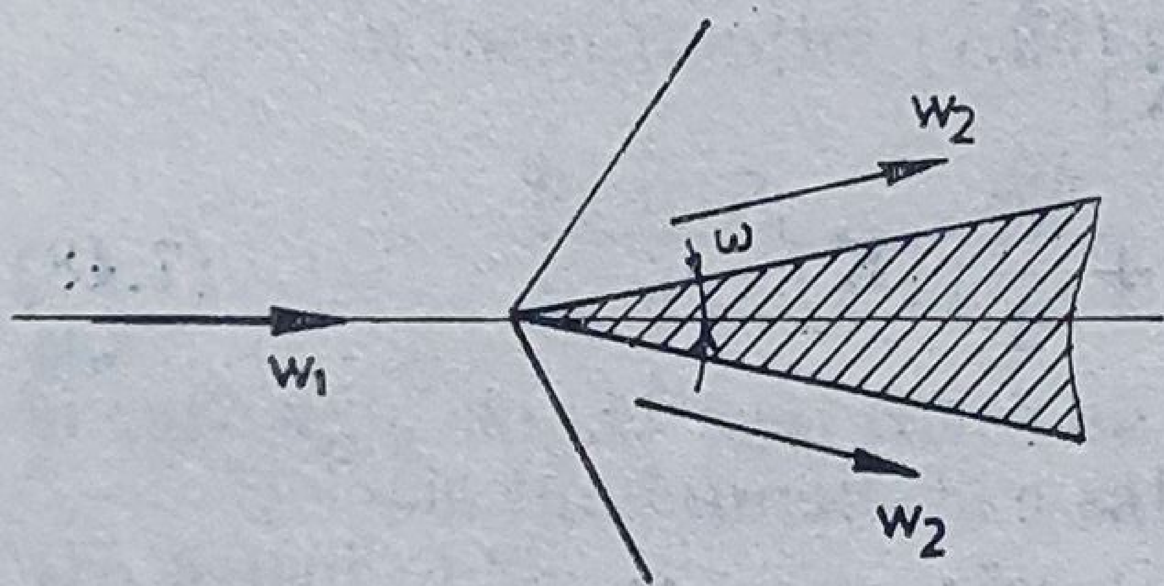


Fig. 7.7. Undă de şoc oblică.

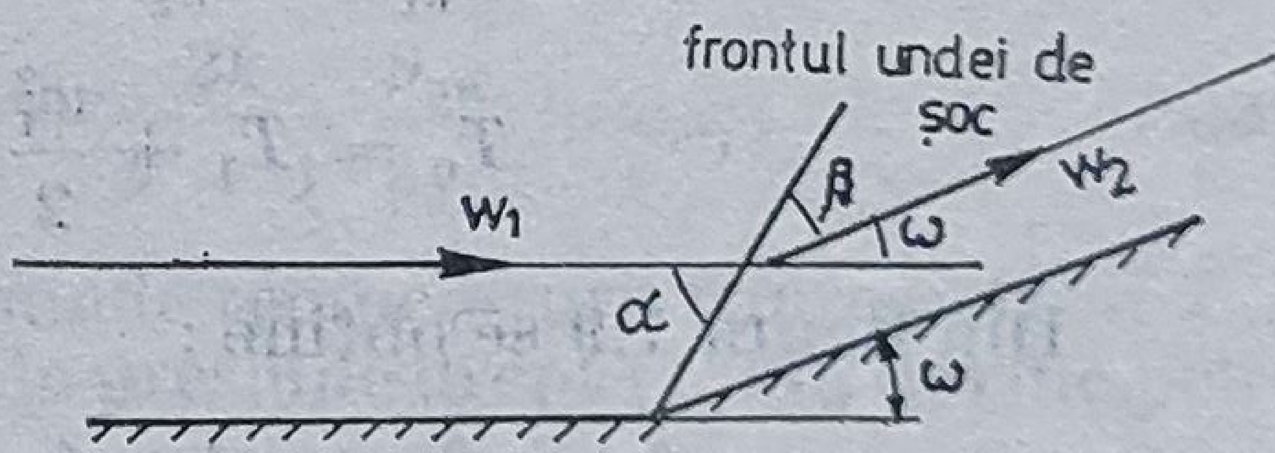


Fig. 7.8. Mărimile caracteristice ale unei unde de şoc oblică.

componente după direcţia normală pe frontul undei de şoc (n) şi paralelă cu el (t) notate cu w_n şi w_t. Componenta paralelă w_t cu frontul undei rămîne la valoarea constantă, deci $w_{1t} = w_{2t}$, în timp ce componenta perpendiculară pe front scade, deci $w_{2n} < w_{1n}$.

Ecuaţia cantităţii de mişcare pe direcţia $H - 1$ perpendiculară pe frontul undei de şoc, aşa cum se vede în figura 7.10, este

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_{1n}(w_{1n} - w_{2n}) \ [\mathrm{N/m^2}] \qquad (7.47)$$

Deci unda de şoc oblică se reduce în ultimă analiză la o undă de şoc dreaptă, care se deplasează în direcţia t cu viteza constantă w_t. Deosebirea faţă de unda dreaptă constă în aceea că în ea nu are loc o discontinuitate a

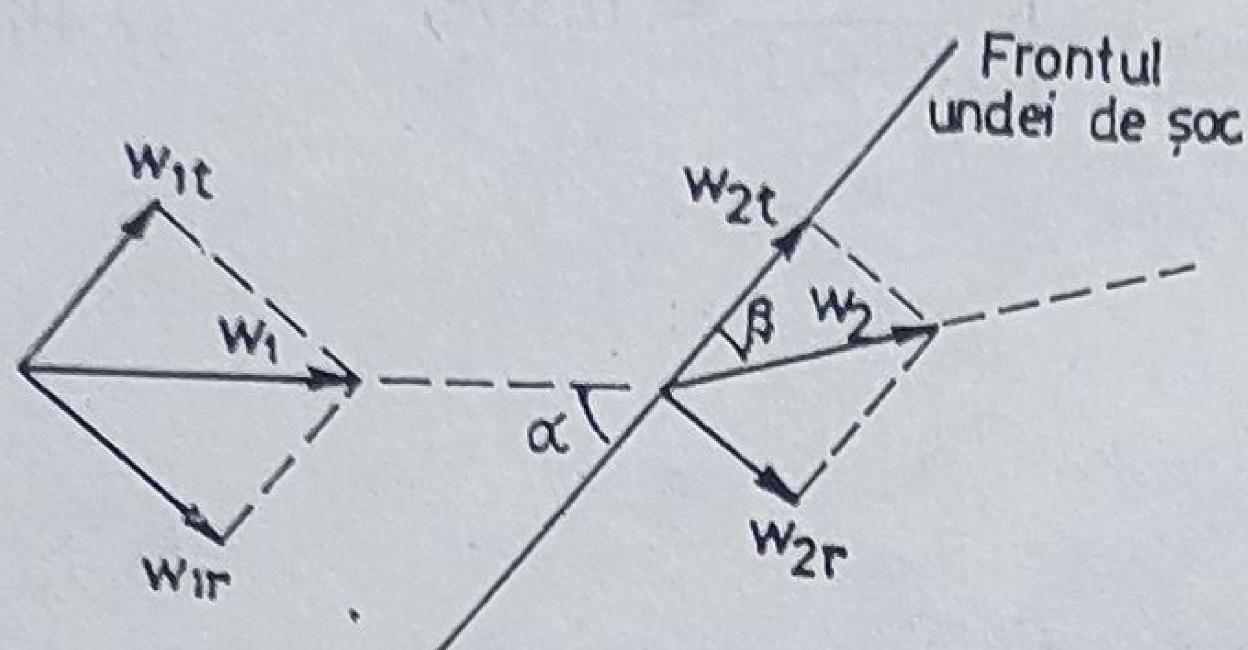


Fig. 7.9. Componentele vitezei de curgere a gazului în unda de şoc oblică.

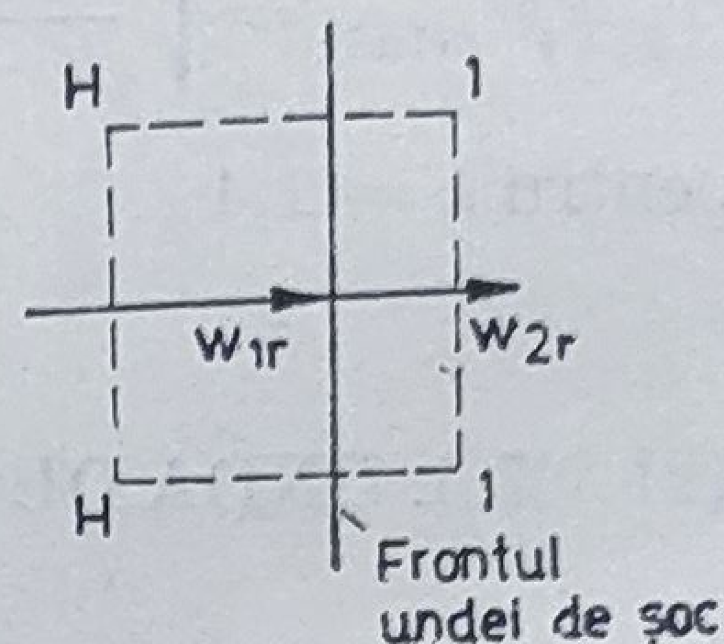


Fig. 7.10. Undă de şoc.

vitezei medii de curgere (ca în cazul undei de şoc drepte), ci numai a componentei acesteia pe direcţia perpendiculară pe unda de şoc.

7.6. MĂRIMILE TERMOFIZICE ALE GAZULUI PERFECT ÎN UNDA DE ŞOC OBLICĂ

Pentru o curgere adiabată în regim permanent printr-o conductă cu secţiunea constantă, ecuaţia continuităţii pentru componenta vitezei pe direcţia n are expresia

$$\rho_2 \cdot w_{2n} = \rho_1 \cdot w_{1n} \tag{7.48}$$

Pentru o undă de şoc oblică izentropă este respectată condiţia de egalitate a temperaturii frînate a gazului înainte şi după frontul undei deci :

$$T_{01} = T_{02} = T_0 \quad [\mathrm{K}]$$

$$T_0 = T_1 + \frac{w_1^2}{2} = T_2 + \frac{w_2^2}{2} \quad [\mathrm{K}] \tag{7.48}$$

Din figura 7.9 se obţine :

$$w_1^2 = w_{1n}^2 + w_t^2 ;\; w_2^2 = w_{2n}^2 + w_t^2 ;\; w_{1t} = w_{2t}.$$

Din (7.49), considerînd $c_{pT_1} = c_{pT_2} = c_p$, pentru direcţia n :

$$c_p \cdot T_1 + \frac{w_{1n}^2}{2} = c_p \cdot T_2 + \frac{w_{2n}^2}{2} \tag{7.50}$$

Prin analogie cu noţiunea de temperatură frînată a unui gaz de curgere, se introduce noţiunea de *temperatură parţial frînată*. Ea se referă la temperatura frînată a unui gaz în curgere luînd în considerare numai o componentă a vitezei de curgere şi anume pe o direcţie oarecare. De exem-

plu, temperatura parțial frînată a unui gaz pentru direcția normală este

$$T_{0n} = T_1 + \frac{w_{1n}^2}{2c_p} = T_2 + \frac{w_{2n}^2}{2c_p} \quad [K] \tag{7.51}$$

iar pentru direcția t:

$$T_{0t} = T_1 + \frac{w_{1t}^2}{2c_p} = T_2 + \frac{w_{2t}^2}{2c_p} \quad [K]$$

Deoarece $w_{1t} = w_{2t}$, desigur că $T_1 = T_2$, ceea ce ar însemna că temperatura momentană în fața și în spatele undei de șoc pe direcția t este aceeași, ceea ce nu este adevărat.

O undă de șoc oblică are aceeași definiție și sens fizic ca și una dreaptă, singurele deosebiri neesențiale din punct de vedere fenomenologic fiind :

1. Pentru calculul analitic al proceselor ce au loc în frontul undei de șoc se ia în considerare, în locul vitezei medii a curentului de gaz, numai componenta perpendiculară pe front, notată cu w_n.

2. În locul temperaturii frînate a curentului, exprimată în funcție de viteza medie de curgere a gazului, se folosește temperatura parțial frînată, dată de o expresie analoagă, dar în care se introduce componenta vitezei de curgere pe direcție perpendiculară pe frontul undei de șoc w_{1n}, respectiv w_{2n}.

Ca urmare, relațiile analitice obținute la studiul undei de șoc drepte sînt valabile și în cazul celei oblice, ele avînd formele de mai jos :

— în locul relației (7.26) se folosește (7.52) :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = w_{2n} w_{1n} \tag{7.52}$$

— în locul relației (7.25) se folosește (7.53) :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2k}{k+1} R T_{0n} = \frac{2k}{k+1} \frac{p_{0n}}{\rho_{0n}} = a_{cr,\,n} \tag{7.53}$$

în care $a_{cr,\,n}$ este viteza critică ce corespunde temperaturii frînte parțial T_{0n}

Relația fundamentală a saltului de presiune drept (7.26), devine pentru saltul oblic

$$w_{2n} w_{1n} = a_{cr,\,n}^2 \tag{7.54}$$

Relația dintre viteza critică $a_{cr,\,n}$ și a_{cr} se obține din relația

$$a_{cr}^2 = a_{cr,\,t}^2 + a_{cr,\,n}^2$$

Deci viteza critică, dată pentru unda dreaptă de (7.24), devine (7.55) :

$$a_{cr}^2 = \frac{2k}{k+1} R T_0 = a_{cr,\,n}^2 + \frac{k-1}{k+1} w_t^2 \tag{7.55}$$

Ținînd seama de (7.54), relația (7.55) poate căpăta următoarea formă, mai comodă :

$$w_{2n}w_{1n} + \frac{k-1}{k+1} w_t^2 = a_{cr}^2 \tag{7.56}$$

În cazul cînd unghiul α al frontului undei de șoc oblice cu direcția curentului incident devine 90°, unda de șoc a devenit o undă dreaptă și ca urmare $w_t = 0$, $w_{1n} = w_1$ și $w_{2n} = w_2$, iar relațiile de mai sus capătă formele prezentate la unda de șoc dreaptă :

Notînd cu

$$M_{cr1n} = \frac{w_{1n}}{a_{cr,n}}; \quad M_{cr2n} = \frac{w_{2n}}{a_{cr,n}}$$

Din (7.54) se obține o relație analoagă cu (7.27) și anume :

$$M_{cr1n} \cdot M_{cr2n} = 1 \tag{7.57}$$

Relația (7.31) este valabilă și pentru unda de șoc oblică, fără nici o modificare, deci sub forma

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = k\frac{p_2 + p_1}{\rho_2 - \rho_1}, \tag{7.58}$$

iar relația (7.33), valabilă și pentru unda de șoc oblică, are forma

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{k+1}{k-1}\frac{p_1}{p_2}} \tag{7.59}$$

Valorile presiunilor momentane (statice) p și frînate (totale) p_0 sînt date, pentru saltul drept, de relațiile (7.39) și (7.41), iar saltul de presiune totală de (7.43). Pentru unda de șoc oblică, în relațiile respective se înlocuiește M_{cr_1} și M_{cr_2} cu M_{cr1n} și M_{cr2n} ele căpătînd formele (7.60) ... ... (7.62) :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_{cr1n}^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr1n}^2} \tag{7.60}$$

$$p_{02} = \frac{p_2}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr2n}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{p_2}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{M_{cr1n}^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}} \tag{7.61}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \sigma_p = M^2_{cr1n}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr1n}}{1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{M^2_{cr1n}}}\right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (7.62)$$

Pentru exprimarea saltului de presiune statică în frontul unei unde de şoc oblice sub unghiul α în funcţie de viteza medie de curgere a gazului w_1, se recurge la legea impulsului exprimată de relaţia (7.47) :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot w_{1n}(w_{1n} - w_{2n}) = \rho_1 \cdot w^2_{1n} - \rho_1 \cdot w^2_{1n} \cdot w_{2n}$$

Ţinînd seama de relaţia (7.56), expresia (7.47) devine

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot w^2_{1n} - \rho_1\left[a^2_{cr} - \frac{k-1}{k+1}w^2_{1t}\right] \; [N/m^2]$$

Prin împărţire şi înmulţire cu a^2_{cr} se obţine :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot M^2_{cr1n} \cdot a_{cr} - \rho_1 \cdot a^2_{cr}\left[1 - \frac{k-1}{k+1}M^2_{cr1t}\right]$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot a^2_{cr}\left(M^2_{cr1n} - 1 + \frac{k-1}{k+1}M^2_{cr1t}\right)$$

Din figura 7.8 se obţine

$$M^2_{cr1n} = M^2_{cr_1} \cdot \sin^2\alpha ; \quad M^2_{cr1t} = M_{cr_1} \cdot \cos^2\alpha \; [m^2/s^2]$$

Ca urmare :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 a^2_{cr}\left(M^2_{cr_1}\sin^2\alpha - 1 + \frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_1}\cos^2\alpha\right) \; [N/m^2] \quad (7.63)$$

şi deci :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{2k}{k+1}}{1-\frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_1}}\frac{1}{a^2_{cr}} \quad (7.64)$$

care, introdusă în relaţia (7.63) permite determinarea saltului de presiune statică în frontul undei de şoc :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M^2_{cr_1}\left[1 - \frac{4 \cdot k^2}{(k+1)^2}\cos^2\alpha\right] - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}M^2_{cr_1}} \quad (7.65)$$

Desigur că pentru $\alpha = 90°$ (front drept), relaţia (7.65) capătă forma cunoscută de la saltul drept şi anume (7.38). Ca exemplu, pentru un gaz perfect

($k=1,4$) relația (7.65) capătă forma (7.66) pentru un front oblic cu un unghi oarecare α:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_{cr_1}^2(1 - 0,972 \cdot \cos^2\alpha) - 0,167}{1 - 0,167 \cdot M_{cr_1}^2} \tag{7.66}$$

Iar în cazul cînd $\alpha = 90°$ (front drept) și pentru $k = 1,4$ se obține expresia (7.67) în funcție de M_1 sau M_{cr_1}:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1,167 \cdot M_1^2 - 0,167 = \frac{M_{cr_1}^2 - 0,167}{1 - 0,167 \cdot M_{cr_1}^2} \tag{7.67}$$

Saltul de presiune totală în frontul undei de șoc, în funcție de vitezele medii de curgere w_1 și w_2 este

$$\sigma_p = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_1} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} \tag{7.68}$$

Din relația (7.61) se obține

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \frac{1}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_{2n}}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_2}^2 \cdot \sin^2\alpha\right]^{\frac{k}{k-1}}} \tag{7.69}$$

Prin analogie

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \frac{1}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_{1n}}^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2 \sin^2\alpha\right]^{\frac{k}{k-1}}} \tag{7.70}$$

iar p_2/p_1 este dată de relația (7.65). Deoarece $M_{cr_1} \cdot M_{cr_2} = 1$ se obține

$$\sigma_p = \frac{1}{\left[1 + \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{M_{cr_1}^2 \cdot \sin^2\alpha}\right]^{\frac{k}{k-1}}} \cdot \frac{M_{cr_1}^2\left[1 - \frac{4k^2}{(k+1)^2}\cos^2\alpha\right] - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2} \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2 \cdot \sin^2\alpha\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{7.71}$$

Pentru determinarea criteriului M_{cr_2} (în spatele frontului undei de șoc) se folosește relația

$$M_{cr_2}^2 = \frac{w_2^2}{a_{cr}^2} = \frac{w_{2n}^2}{a_{cr}^2} + \frac{w_{2t}^2}{a_{cr}^2} \tag{7.72}$$

Din relaţia (7.55) se obţin relaţiile de calcul al componenelor vitezei medii de curgere w_{2n} şi w_{2t} :

$$w_{2n} = \frac{a_{cr}^2 - \frac{k-1}{k+1} w_l^2}{w_{1n}} = \frac{a_{cr}^2 - \frac{k-1}{k+1} w_1^2 \cos^2\alpha}{w_1 \cdot \sin\alpha} \tag{7.73}$$

$$w_{2t} = w_1 \cdot \cos \alpha \tag{7.74}$$

Se introduc relaţiile (7.73) şi (7.74) în (7.72) şi se obţine

$$M_{cr_2}^2 = M_{cr_1}^2 \cdot \cos^2\alpha + \frac{\left[1 - \frac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2 \cdot \cos^2\alpha\right]^2}{M_{cr_1}^2(1 - \cos^2\alpha)} \tag{7.75}$$

După cum se vede, pentru $\alpha = 90°$ relaţia (7.75) devine $M_{cr_1} M_{cr_2} = 1$, relaţie găsită şi pentru unda de şoc dreaptă.

Pentru determinarea gradului de creştere a presiunii statice în unda de şoc oblică se face apel la : notaţiile din figura 7.9 ; relaţia (7.37) găsită pentru unda de şoc dreaptă ; analogia găsită pînă în prezent între relaţiile undei de şoc drepte şi oblice. Se cunoaşte :

$$w_{1n} = w_1 \cdot \sin \alpha \tag{7.76}$$

Atunci, prin analogie cu relaţia (7.37), pentru unda de şoc oblică se obţine

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_{1n}^2 - \frac{k-1}{k+1}, \tag{7.77}$$

iar în funcţie de M_1 :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2\alpha - \frac{k-1}{k+1} \tag{7.78}$$

După cum se vede din (7.78), saltul de presiune statică în unda de şoc oblică este de intensitate mai mică decît în unda de şoc dreaptă dată de (7.37) pentru acelaşi M_1.

Pentru un salt de presiune statică infinit mic, cînd $p_2/p_1 \to 1$ ($p_2 = p_1$) unghiul α făcut de unda de şoc oblică cu direcţia de curgere w_1 capătă valoarea minimă şi este notat cu $\alpha_{min} = \alpha_0$, dat de relaţia

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M_1} \tag{7.79}$$

Se consideră că în punctul O din figura 7.11 apare o perturbaţie slabă într-un curent de gaz cu viteză supersonică, perturbaţie care se deplasează în toate direcţiile cu viteza sunetului $= a$. După o secundă ($\tau = 1s$), perturbaţia va cuprinde o sferă cu raza $r = a$.

Deoarece curentul de gaz se deplasează cu o viteză medie mai mare ca viteza sunetului ($w_1 > a$), undele de şoc slabe nu vor putea ieşi dincolo de limitele conului a cărui suprafaţă este înfăşurătoare undelor sferice şi al cărui unghi este $2\alpha_0$. Generatoarea acestui con cu unghi la vîrf $= 2\alpha_0$ poartă denumirea de „caracteristică" sau „linia Mach" iar unghiul de propagare a perturbaţiilor slabe, notat cu α_0, se numeşte „unghiul Mach"

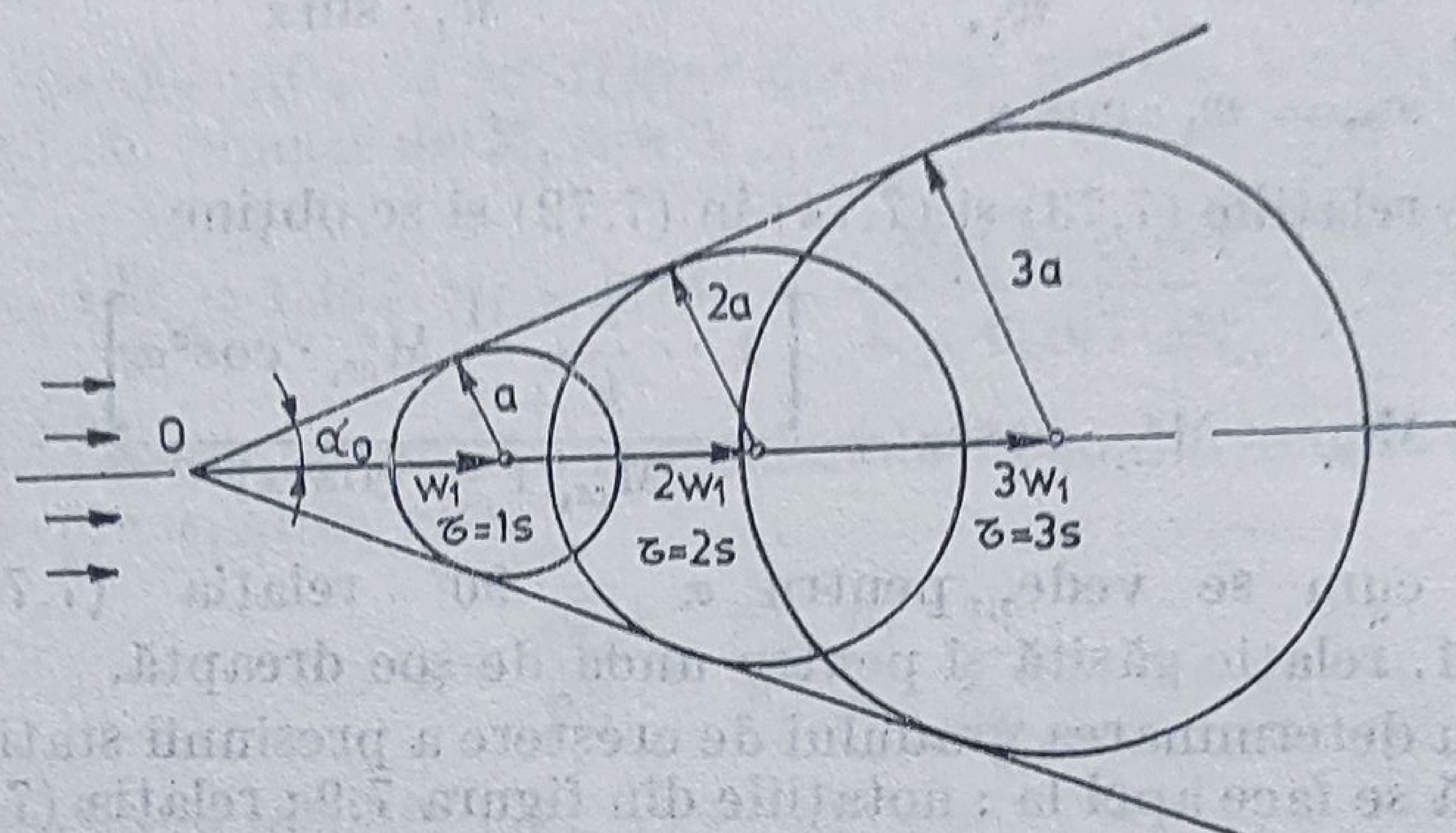


Fig. 7.11. Caracteristica undei de şoc (linia Mach).

Valoarea lui α_0 se determină ţinînd seama de notaţiile din figura 7.11, şi relaţia (7.79):

$$\sin \alpha_0 = \frac{a}{w_1} = \frac{1}{M_1}$$

Deci frontul undei de şoc oblice (slabe) care face un unghi α_0 faţă de curentul de gaz incident se propagă în spaţiu cu viteza sunetului.

În cazul unei perturbaţii puternice, frontul acestei unde de şoc va face cu curentul de gaz un unghi $\alpha > \alpha_0$.

Pentru determinarea saltului maxim de densitate ce are loc în frontul unei unde de şoc puternice, cînd $p_2 \to \infty$ se face apel la relaţia (7.39), înlocuindu-se cu M_1 cu $M_1 \cdot \sin \alpha$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\dfrac{k+1}{k-1}}{1 + \dfrac{1}{M_1^2 \sin^2 \alpha} \dfrac{2}{k-1}}$$

După cum se vede, saltul de densitate pentru valorile extreme ale lui α devine

$$\text{pentru } \alpha_{min} = \alpha_0 \to \quad M_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \to \rho_2 = \rho_1$$

$$\text{pentru } \alpha = 90° \to \text{ relaţia (7.39).}$$

Pentru a se determina unghiul de abatere ω, care reprezintă unghiul cu care este deviat curentul de gaz (figura 7.8), se face apel la ecuația continuității ($\rho_1 \cdot w_{1n} = \rho_2 \cdot w_{2n}$) și, ținînd seama de notațiile din figura 7.10, se obține

$$\frac{w_{2n}}{w_{1n}} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}\ ; \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Ținînd seama și de relația (7.80) se obține valoarea unghiului β:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{M}^2_{cr_1} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\dfrac{k+1}{2}\mathrm{M}_1^2 \cdot \sin^2\alpha}{1 - \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2 \cdot \sin^2\alpha}\,\mathrm{tg}\alpha$$

sau
$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{k-1}{k+1}\left[1 + \frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_1^2 \cdot \sin^2\alpha}\right]\mathrm{tg}\alpha \qquad (7.80)$$

Unghiul β se mai poate determina și din relația $\beta = \alpha - \omega$. Bineînțeles dacă se cunoaște valoarea lui ω, care este unghiul făcut de suprafața exterioară a obstacolului cu direcția curentului de gaz, se determină valoarea unghiului α, făcut de frontul undei de șoc cu direcția curentului de gaz în funcție de M_1. Pe diagrama din figura 7.12 se reprezintă variația lui α în funcție de ω pentru diferite criterii M_1 ale vitezei de curgere incidente și pentru $k = 1{,}4$. Unghiul ω este pus în evidență în figurie 7.7 și 7.8. Analizînd curbele din figura 7.12, se observă că fiecărei valori a criteriului M_1 al curgerii incidente îi corespunde un unghi ω_{max} peste care nu mai poate apărea un front de undă de șoc. În figura 7.12 este prezentat ca exemplu ω_{max} pentru un gaz ce curge cu $\mathrm{M}_1 = 3$.

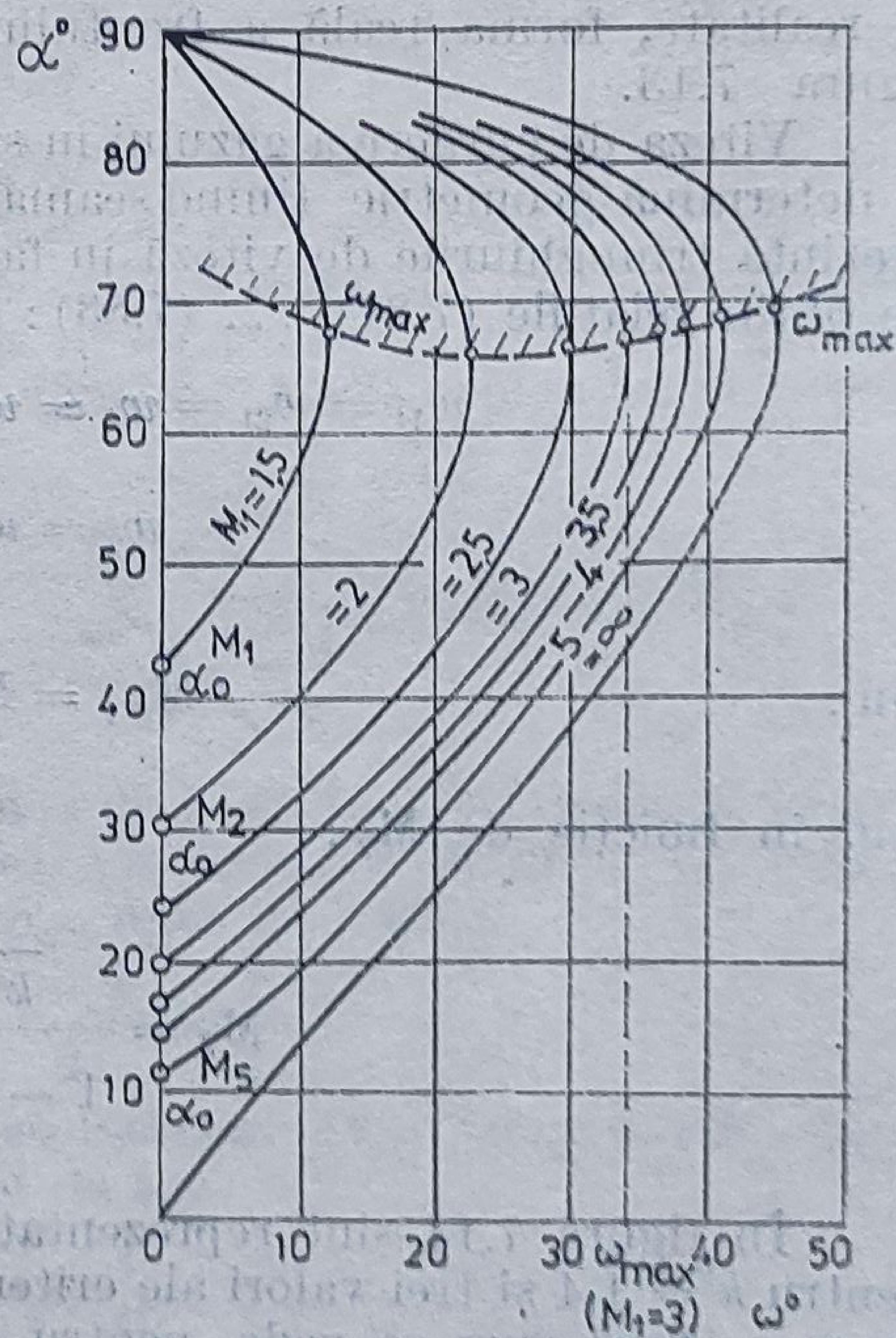


Fig. 7.12. Unghiul α al unei unde de șoc oblică.

Pentru un unghi $\omega > \omega_{max}$ și $\mathrm{M}_1 = 3$ nu mai poate apărea unda de șoc. Deci evitarea apariției undei de șoc oblice într-un curent de gaz se poate face mărind unghiul de deviație al curentului datorat geometriei obstacolului peste valoarea lui ω_{max} corespunzător criteriului M_1 al curgerii incidente.

Se vede că pentru unghiuri de derivație $\omega < \omega_{max}$ apar două posibilități de înclinare α a frontului undei de șoc. Experiențele au arătat că probabilitatea cea mai mare este pentru

α_{min}. Deci apariția undei de șoc cu o valoare a unghiului de înclinare α de deasupra liniei punctate ce definește valorile lui ω_{max} este mai puțin probabilă, dar totuși posibilă.

Intersecția ramurilor inferioare ale curbelor din figura 7.12 cu axa ordonatelor corspunde valorii minime a lui α, adică lui α_0, denumit și *unghiul de degenerare a undei de șoc*. Sub valoarea lui α_0 care crespunde unghiului făcut de frontul undei de șoc la o perturbație slabă, corespunzătoare unei curgeri incidente cu M_1, nu mai pot apărea unde de șoc.

Există totuși posibilitatea apariției unui front de undă de șoc și în cazul cînd unghiul făcut de învăluitoarea corpului ce produce perturbația cu direcția de curgere a gazului ω este mai mare decît ω_{max} al curgerii respective. În acest caz, însă, se formează așa-numitul *front oblic-drept*. În fața bordului de atac al obstacolului el este un front drept, iar spre exterior se curbează devenind un front oblic. Deci forma frontului oblic-drept este curbilinie și nu atinge vîrful generator de perturbații. Schematic, forma acestui front este prezentat în figura 7.13. Suprafața frontului curbiliniu se deplasează în fața obstacolului și, la distanțe mari de el, degenerează într-o undă de șoc slabă.

Teoretic, frontul drept-oblic este format dintr-un front drept în fața bordului de atac al corpului generator de perturbații, și dintr-un front oblic spre exterior. Ținînd seama de ireversibilitatea procesului ce are loc în realitate, forma reală a frontului este curbilinie, așa cum se vede în figura 7.13.

Viteza de curgere a gazului în spatele frontului unei unde de șoc oblice se determină geometric ținînd seama de notațiile din figura 7.9, care reprezintă triunghiurile de viteză în față și în spatele frontului undei de șoc. Se obțin relațiile (7.81) ... (7.83):

$$w_{1t} = w_{2t} = w_t = w_2 \cdot \cos\beta = w_1 \cos\alpha$$

$$w_2 = w_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \tag{7.81}$$

sau:

$$M_{cr_2} = M_{cr_1} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \tag{7.82}$$

sau, în funcție de M_2:

$$M_2 = \frac{\dfrac{2}{k+1} M_{cr_2}^2}{1 - \dfrac{k-1}{k+1} M_{cr_1}^2} \tag{7.83}$$

În figura 7.14 sînt reprezentate curbele de variație a lui $M_2 = f(\alpha)$ pentru $k = 1,4$ și trei valori ale criteriului M_1 ale curentului incident în unda de șoc. După cum se vede, pentru $\alpha < 60°$ viteza w_2 în spatele frontului undei de șoc este supersonică. Punctele notate cu A corespund valorilor lui α_0, deci unui front de perturbație slab.

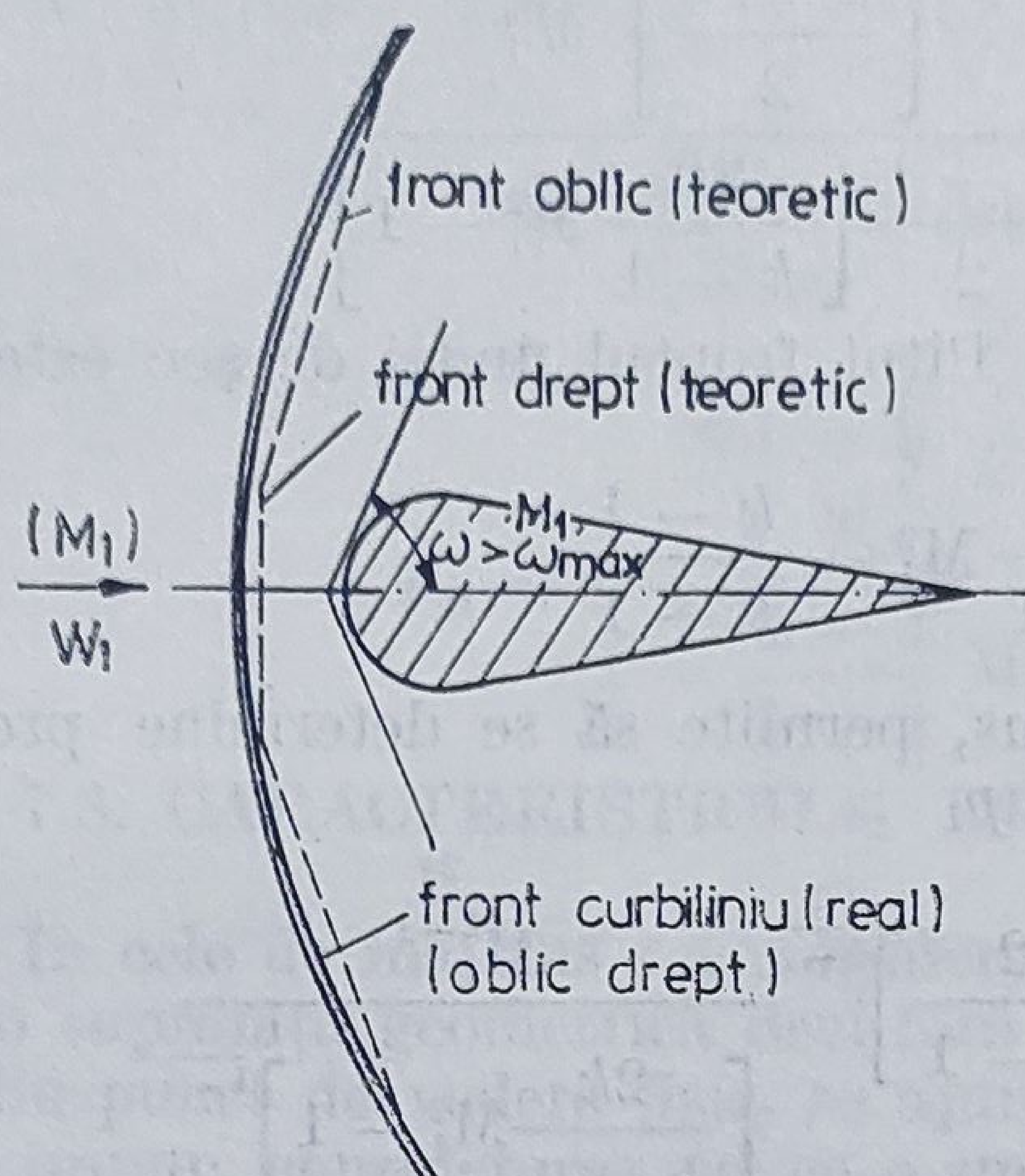


Fig. 7.13. Frontul unei unde de șoc oblică.

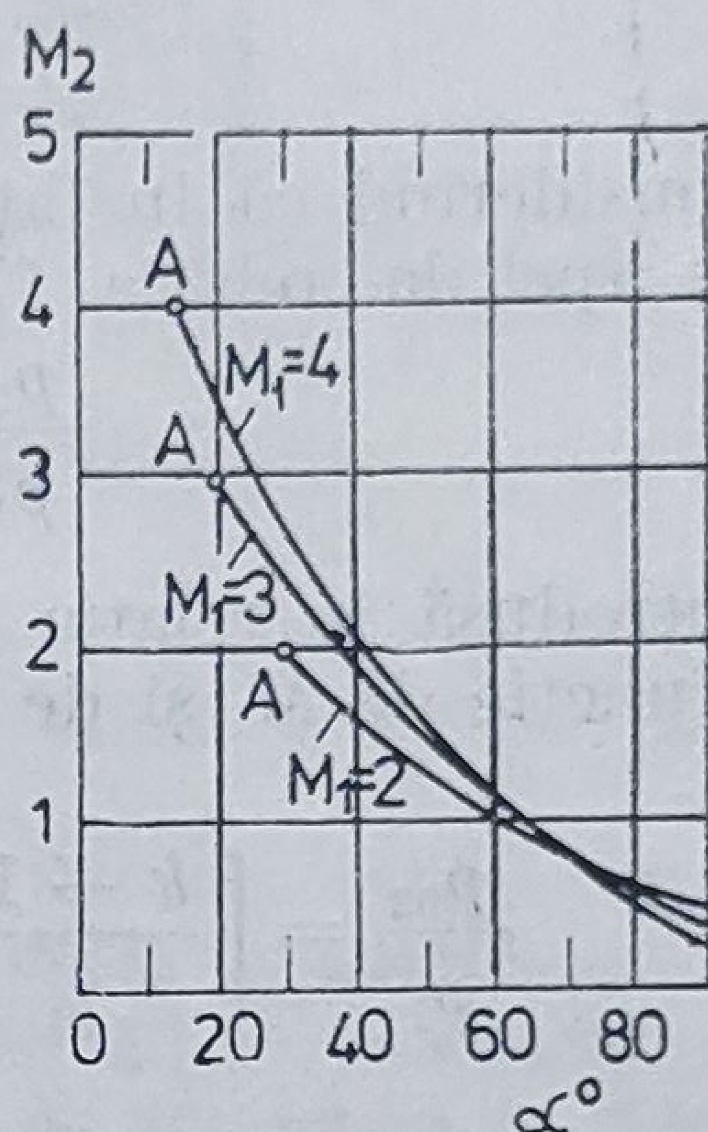


Fig. 7.14. Curbele de variație $M_2(f(\alpha))$ pentru un gaz perfect ($k = 1{,}4$).

7.7. UTILIZAREA TUBULUI PITOT LA MĂSURAREA VITEZELOR SUPERSONICE

După cum s-a arătat în capitolul 3, viteza de curgere subsonică a unui gaz se poate măsura corect și direct cu ajutorul unui tub Pitot.

În cazul unei curgeri supersonice, în fața tubului Pitot apare o undă de șoc dreaptă, în frontul căreia viteza va scădea de la w_1 înainte de front la $w_2 < w_1$. Apoi, așa cum se vede și din figura 7.15, în orificiul *1* al tubului

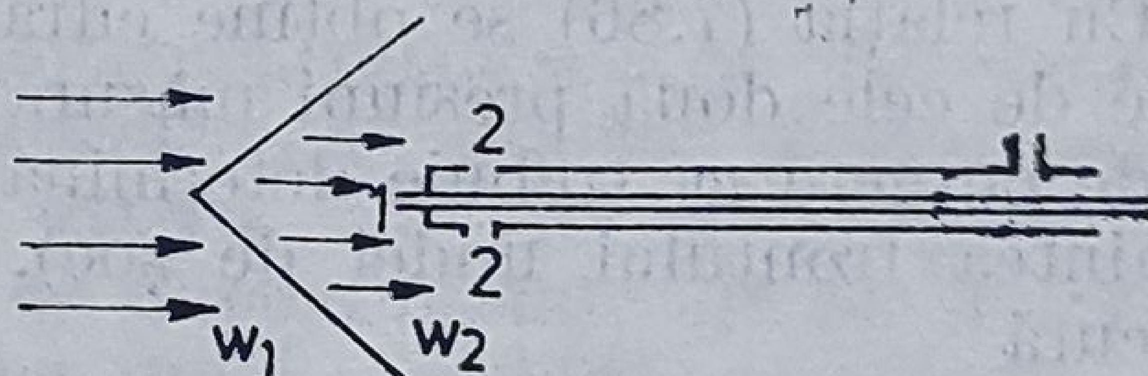


Fig. 7.15. Frontul unei unde de șoc oblică în fața unei sonde Pitot.

Pitot viteza de curgere va scădea din nou de la w_2 la 0, deoarece în canalul orificiului curentul se frînează complet. Ca urmare, sonda *1* va măsura presiunea frînată a curentului, adică p_{02}, dată de relația

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_2^2\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

în care cu p_2 și M_2 s-au notat presiunea momentană (statică) și cifra Mach a curentului în spatele frontului undei de șoc

$$\mathrm{M}_2^2 = \frac{\frac{2}{k+1}\mathrm{M}_{cr_2}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_{cr_2}^2} = \frac{\frac{2}{k+1}\frac{1}{\mathrm{M}_{cr_1}^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\mathrm{M}_{cr_1}^2}} = \frac{1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2}{k \cdot \mathrm{M}_1^2 - \frac{k-1}{2}} \tag{7.84}$$

$$1+\frac{k-1}{2}M_2^2=\frac{\left[\frac{k+1}{2}\right]^2 M_1^2}{\frac{k-1}{2}\left[\frac{2k}{k-1}M_1^2-1\right]} \tag{7.85}$$

Considerînd că în fața tubului Pitot frontul undei de şoc este drept se face apel la relația (7.37):

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}M_1^2-\frac{k-1}{k+1}$$

care, introdusă în relația de mai sus, permite să se determine presiunea p_{02} în funcție de M_1 şi de presiunea p_1

$$\frac{p_{02}}{p_1}=\left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{k+1}{k-1}}\left[\frac{2}{k-1}\right]^{\frac{1}{k-1}}\frac{M_1^{\frac{2k}{k-1}}}{\left[\frac{2k}{k-1}M_1^2-1\right]^{\frac{1}{k-1}}} \tag{7.86}$$

Presiunea p_{02} fiind cunoscută prin măsurare cu sonda *1*, iar p_1 fiind cunoscută pentru curentul incident (măsurată la peretele conductei), se determină cu relația (7.86) valoarea lui M_1.

Ca exemplu se prezintă relația (7.86) pentru aer ($k=1{,}4$)

$$\frac{p_{02}}{p_1}=\frac{166{,}7M_1^7}{(7M_1^2-1)^{2,5}} \tag{7.87}$$

Presiunea momentană p_2 se măsoară la sondă cu orificiile *2*. Aceste orificii trebuie să fie aşezate (aşa cum s-a stabilit experimental) la o distanță de orificiul *1*, de minimum 4—5 diametre ale ansambului tubului Pitot.

Cu relația (7.86) se obține cifra M_1 a curentului de gaz incident în funcție de cele două presiuni măsurate p_{02} şi p_1. Pentru determinarea vitezei de curgere w_1 trebuie determinată viteza sunetului în gazul de stare 1 (înaintea frontului undei de şoc). Pentru aceasta se foloseşte relația cunoscută

$$w_1=M_1\cdot a_1;\quad a_1=\sqrt{kRT_1}$$

După cum se vede este necesară numai determinarea temperaturii T_1, care se măsoară.

Pentru determinarea vitezei de curgere, în locul criteriului M se poate folosi criteriul Mach critic (M_{cr}). În acest caz, relația de calcul al vitezei de curgere w_2 în funcție de M_{cr_1} şi de presiunile p_{02} şi p_1 măsurate cu sondele tubului Pitot, sînt

$$\frac{p_{02}}{p_1}=\frac{1}{\left[\frac{1}{M_{cr_1}^2}-\frac{k-1}{k+1}\right]\left[1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{M_{cr_1}^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}} \tag{7.88}$$

care, de exemplu, pentru $k = 1,4$ capătă forma simplă

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{M^2_{cr_1}} - 0,167\right]\left[1 - \frac{0,167}{M^2_{cr_2}}\right]^{2,5}} \tag{7.89}$$

iar

$$a_{cr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_{01}} \tag{7.90}$$

$$T_{01} = \frac{T_1}{1 - \frac{k-1}{k+1} M^2_{cr_1}} ; \quad w_1 = M_{cr_1} \cdot a_{cr}.$$

7.8. CARACTERISTICILE DINAMICE ALE UNDEI DE ŞOC

În cele de mai sus s-a considerat că unda de şoc, oblică sau dreaptă, este o suprafaţă geometrică deci fără grosime. Dacă se analizează unda de şoc din punct de vedere fizic, se ajunge la concluzia că procesele ce au loc în ea impun considerarea ei ca o suprapunere de suprafeţe de discontinuitate a mărimilor termofizice ale gazului respectiv. Deci frontul unei unde de şoc trebuie să fie considerat ca o succesiune de straturi de grosime finită, în care au loc salturile de densitate, viteză, presiune etc. Grosimea acestor straturi este, bineînţeles, invers proporţională cu criteriul M_1. Ca urmare, pentru valori mari ale vitezei medii de curgere a curentului de gaz înaintea frontului undei de şoc, discontinuităţile în strat sînt atît de mari şi deci grosimea stratului atît de mică încît se poate accepta ipoteza că ea este o suprafaţă şi deci grosimea frontului undei este egală cu zero.

Structura şi grosimea frontului undei de şoc se pot determina ţinînd seama de condiţiile acceptate ca ipoteze pînă acum şi anume cele exprimate de respectarea legii continuităţii, a constanţei impulsului, a egalităţii presiunilor frînate înainte şi după undă şi a egalităţii entalpie frînate, valabile pentru gazodinamica izotermă, precum şi de inexistenţa celor două procese specfice termogazodinamicii şi anume termoconducţia şi lucrul mecanic de frecare intern şi extern.

Considerînd această suprafaţă de discontinuitate din frontul undei de şoc ca un strat de fluid de grosime finită, condiţiile exprimate de premisele acceptate pînă acum nu pot fi considerate valabile şi pentru stările din faţa şi spatele frontului, ci numai pe grosimea unui astfel de strat.

Ecuaţia continuităţii rămîne desigur valabilă şi în cazul unui front de o grosime finită, dar ipoteza egalităţii presiunii şi entalpiei frînate din curent, înainte şi după front, nu mai poate fi valabilă avînd în vedere că unui front de grosime finită i se va asocia un flux suplimentar de impuls şi de energie, datorat frecării vîscoase interne şi termoconducţiei dintre straturi.

Densitatea impulsului suplimentar primit de gaz în frontul undei de şoc după direcţia de curgere a lui datorită forţelor de viscozitate depinde de forţa tangenţială τ_{xx} şi este dată de relaţia

$$\tau_{xx} = -\frac{4}{3} \eta \frac{dw}{dx} \tag{7.91}$$

Introducînd pe (7.91) în ecuaţia lui Bernoulli, se obţine

$$p + \frac{\rho \cdot w^2}{2} - \frac{4}{3}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \text{const.} \tag{7.92}$$

Deoarece $w_1\rho_1 = \rho_2 w_2 = \text{const.}$, se obţine $w = \text{const.}$, $v = Cv$ (în care v este volumul specific al gazului). Ca urmare

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{7.93}$$

Ţinînd seama de (7.93), relaţia (7.92) devine:

$$p + C^2 \cdot v - \frac{4}{3} C \cdot \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \text{const.} \tag{7.94}$$

Ca urmare, la o distanţă mare de frontul undei de şoc, mărimile caracteristice termofizice ale curentului de gaz nu mai depind de poziţia lor. Notînd cu indicele (1) starea gazului în faţa undei de şoc şi fără indice aceleaşi mărimi într-un strat din undă, se obţine relaţia (7.95) ce exprimă saltul de presiune datorat vîscozităţii gazului:

$$(p - p_1) + C^2(v - v_1) - \frac{4}{3} C \cdot \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{7.95}$$

Densitatea fluxului de energie primit în frontul undei de şoc ca urmare a termoconducţiei este dată de legea lui Fourier şi anume $q = -\lambda\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$, iar fluxul de căldură primit datorită frecării vîscoase $-\tau_{xx} \cdot w$ (considerînd vectorul vitezei dirijat în direcţia x). Deci, pentru un proces adiabat

$$-\tau_{xx} \cdot w = \frac{4}{3}\eta \cdot w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \tag{7.96}$$

În această situaţie, entalpia frînată, considerată pînă acum ca avînd forma egalităţii

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h + \frac{w^2}{2}, \tag{7.97}$$

va căpăta acum forma

$$\rho w\left(h + \frac{w^2}{2}\right) - \frac{4}{3}\eta w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \lambda\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \tag{7.98}$$

Relaţia (7.98) poate fi exprimată şi în funcţie de volumul specific, dacă se ţinea seamă că $w = C \cdot v$, ea devenind în acest caz

$$h + \frac{C^2v^2}{2} - \frac{4}{3}C\eta v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{\lambda}{C}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = h_1 + \frac{C^2 \cdot v_1^2}{2} \tag{7.99}$$

Deoarece s-a admis că frontul undei de șoc este compus dintr-o serie de straturi infinit mici ca grosime, în care au loc salturi infinit mici de presiune și densitate și deci și de volum specific, valorile diferențelor $v - v_1$ și $p - p_1$ vor fi de asemena, infinități mici. Dezvoltînd în serie pe $v - v_1$ în funcție de $p - p_1$ și de diferența de entropie $s - s_1$ se obține

$$v - v_1 = \frac{\partial v}{\partial p}\bigg|_s (p - p_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s (p - p_1)^2 + \frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_p (s - s_1) + \ldots \tag{7.100}$$

Introducînd relația (7.100) în (7.95) se obține :

$$\left[1 + \frac{\partial v}{\partial p}\bigg|_s \cdot C^2\right](p - p_1) + \frac{C^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s (p - p_1)^2 + \\ + \frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_p (s - s_1)\, C^2 = \frac{4}{3}\eta \cdot C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{7.101}$$

Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v}{\partial p}\bigg|_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}, \tag{7.102}$$

în care $\frac{\partial v}{\partial p}\Big|_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ se poate neglija în raport cu $\frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ prin înlocuirea lui $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ în relația (7.101) se obține

$$\left[1 + \frac{\partial v}{\partial p}\bigg|_s C^2\right](p - p_1) + \frac{C^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s (p - p_1)^2 + \frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_p (s - s_1) = \\ = \frac{4}{3}\eta\frac{\partial v}{\partial p}\bigg|_s C\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{7.103}$$

Înmulțind relația (7.95) cu $(v + v_1)/2$ și scăzînd-o din (7.99) se obține

$$(h - h_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(v + v_1) - \frac{C}{2}\frac{4}{3}\eta(v - v_1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{\lambda}{C}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{7.104}$$

Cel de-al treilea termen al ecuației (7.104) fiind infinit mic se poate neglija, astfel că ea capătă forma

$$(h - h_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(v + v_1) - \frac{\lambda}{C}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{7.105}$$

Deoarece,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial t}{\partial p}\bigg|_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial t}{\partial s}\bigg|_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\partial t}{\partial p}\bigg|_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{7.106}$$

Se obține $$T(s - s_1) = \frac{\lambda}{C} \frac{\partial t}{\partial p}\bigg|_s \frac{dp}{dx} \tag{7.107}$$

Introducînd expresia lui $(s - s_1)$ din (7.107) în relația (7.103) se obține

$$\frac{C^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s (p - p_1)^2 + \left[1 + \frac{\partial v}{\partial p}\bigg|_s C^2\right](p - p_1) =$$

$$= \left[-\frac{\lambda}{T} \frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_p \frac{\partial t}{\partial p}\bigg|_s + \frac{4}{3}\eta \frac{\partial v}{\partial p}\bigg|_s\right] C \frac{dp}{dx} \tag{7.108}$$

Pentru o undă de perturbație slabă, viteza medie de curgere w_1 este apropiată de viteza sunetului a, deci există egalitatea

$$C = \frac{w}{v} \approx \frac{a}{v}$$

La o distanță oarecare de o parte și de alta a unui strat de discontinuitate din frontul undei de șoc considerat, termenul al doilea din partea stîngă a ecuației (7.108) precum și termenul dp/dx din partea dreaptă se anulează, iar presiunile devin p_1 în fața frontului și p_2 în spatele frontului. Ca urmare ecuația (7.108) admite ca rădăcini $p = p_1$ și $p = p_2$.

Scriind ecuația (7.108) în funcție de $(p - p_1)(p - p_2)$ și aranjînd convenabil termenii, se obține ecuația diferențială a funcției $p(x)$ sub forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s (p - p_1)(p - p_2) = -\frac{v^3}{a^3}\left[\frac{4}{3}\eta + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial t}{\partial p}\bigg|_s \frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_p a^2 \cdot \rho^2\right] \frac{dp}{dx} \tag{7.109}$$

Din termodinamică se obține

$$\frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_p = \frac{\partial t}{\partial p}\bigg|_s ; \quad -\frac{dp}{dx} = 2v^2 \cdot a ; \quad \gamma = a\omega^2$$

în care γ este coeficientul de absorbție (amortizare) al undei sonore, iar ω — frecvența perturbației. Deci se poate scrie :

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{4v^2 a} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s (p - p_1)(p - p_2) \tag{7.110}$$

Integrînd (7.110) se obține :

$$x = -\frac{4v^2 a}{\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s} \int \frac{dp}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$x = -\frac{4av^2}{\frac{p_2 - p_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\bigg|_s} \text{arc th} \frac{p - \frac{p_1 + p_2}{2}}{\frac{p_2 - p_1}{2}} + \text{const} \tag{7.111}$$

Şi deoarece constanta de integrare este nulă relaţia (7.111) devine

$$p - \frac{p_2 + p_1}{2} = \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\delta} \tag{7.113}$$

în care s-a notat cu δ grosimea frontului undei de şoc, a cărei valoare este dată de relaţia

$$\delta = \frac{8av^2}{(p_2 - p_1) \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial^2 p}\right|_s} \tag{7.113}$$

Cu relaţia (7.112) se determină variaţia presiunii în stratul elementar al unei unde de şoc. În faţa şi în spatele undei de şoc presiunile gazului au valorile p_1 şi p_2. Originea abscisei se alege în centrul frontului undei de şoc, unde presiunea are valoarea $p = (p_1 + p_2)/2$. Deci creşterea presiunii de la valoarea p_1 la p_2 are loc în grosimea δ, care poartă denumirea de „grosimea undei de şoc". După cum se vede din relaţia (7.112) grosimea δ a undei de şoc este cu atît mai mică cu cît saltul de presiune $p_2 - p_1$ este mai mare.

Variaţia entropiei în unda de şoc, deci în grosimea δ, se obţine din relaţiile (7.107) şi (7.112), care permit obţinerea ecuaţiei (7.114):

$$s - s_1 = \frac{\lambda}{16avT} \left.\frac{\partial t}{\partial p}\right|_s \left.\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right|_s (p_2 - p_1)^2 \frac{1}{\operatorname{ch} \dfrac{x}{\delta}} \tag{7.114}$$

După cum se vede din (7.114), variaţia de entropie în frontul undei de şoc nu este monotonă, deoarece pentru $x = 0$, $s \to s_{\max}$, iar pentru $x = \pm\infty$ se obţine $s = s_1$ şi $s = s_2$.

Relaţia (7.112) ce exprimă grosimea undei de şoc δ a fost obţinută pentru o perturbaţie de intensitate slabă, gazul avînd o viteză medie incidentă $w_1 \approx a$.

Totuşi relaţia (7.113) poate fi utilizată cu destulă exactitate şi în cazul unei perturbaţii puternice cînd $w_1 \gg a$. O analiză fenomenologică a proceselor ce au loc în frontul unei unde de şoc puternice permite o simplificare a metodei analitice de determinare a grosimii δ a lui.

După cum se ştie din termodinamică viteza sunetului în gazele perfecte este de ordinul vitezei medii de deplasare termică a moleculelor, notată cu w_t, iar vîscozitatea cinematică a lor este dată de relaţia $\nu = l \cdot w_t \approx \approx l \cdot a$, în care l este drumul liber mijlociu molecular. Deoarece $a = l/a_{cr}^2$, se obţine pentru un gaz perfect:

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right|_s \approx \frac{v}{p^2}\,; \qquad p \cdot v \approx a_{cr}^2 \tag{7.115}$$

Introducînd pe (7.115) în (7.113), se obţine $\delta \approx l$. Deci grosimea frontului undei de şoc pentru gazele perfecte în cazul unui salt mare de presiune $(M_1 \gg 1)$ este practic egală cu lungimea drumului liber mijlociu molecular l.

În tehnică procesele termice și dinamice fiind considerate numai din punct de vedere macroscopic, grosimea unei perturbații puternice este considerată nulă. Pe de altă parte, în cazul cînd în frontul undei de șoc au loc și procese de relaxare, cu desfășurare lentă în timp, ca de exemplu reacții chimice, procese de ardere etc, chiar și în cazul unei perturbații foarte puternice grosimea δ a undei de șoc nu mai este egală cu zero, ci are o valoare finită ce depinde de timpul de relaxare τ_r a procesului respectiv.

Considerînd timpul de relaxare a procesului ca fiind cunoscut și de valoare τ, cele două suprafețe limită ale grosimii frontului undei de șoc trebuind să reprezinte stări de echilibru, distanța parcursă în frontul undei va trebuie să fie $\tau_r \cdot w_1$, care reprezintă tocmai grosimea δ.

7.9. PROPAGAREA PERTURBAȚIILOR ÎN MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Procesul de propagare a perturbațiilor de mare sau mică intensitate, în gazul perfect a fost explicat cu ajutorul teoriei cinetico-moleculare care admitea, prin ipoteză, că variația parametrilor fizici ai lui (presiune, densitate, temperatură) se datora schimbului de cantitate de mișcare ce avea loc la nivel intermolecular.

În cazul însă cînd unda de perturbație se deplasează într-un mediu bifazic (în amestecul de vapori și picături ale lichidului său) ea va duce la apariția unor fenomene specifice mediului bifazic, de exemplu condensări sau vaporizări ale picăturilor de lichid, subrăciri ale vaporilor, supraîncălziri ale lichidului, apariția unui fenomen de rezonanță a picăturilor de lichid etc.

Pentru precizarea cantitativă a acestor fenomene, este necesar să se cunoască dependența dintre viteza de propagare a sunetului într-un mediu bifazic și frecvența perturbației. Dispersarea unei unde critice într-un mediu bifazic poate duce, în anumite condiții fizice, la o defazare între unda ce se propagă în mediul gazos și aceea ce se propagă în mediu lichid. Dacă masa de lichid este mică, iar frecvența undei nu este prea mare, atunci vîscozitatea vaporilor amortizează oscilațiile particulelor de lichid ce iau naștere datorită perturbației, modificînd viteza de propagare a undei în amestecul bifazic și anume micșorînd-o. Gradul de modificare a vitezei de propagare a undei de șoc va depinde de frecvența undei de perturbație și de participația fazei lichide în amestecul bifazic.

O altă cauză a amortizării undei de perturbație, ce poate merge pînă la stingerea ei, este și apariția fenomenelor de metastabilitate termodinamică, adică apariția proceselor de condensare a fazei gazoase sau de vaporizare a celei lichide. Cu cît perturbația are o frecvență mai ridicată și cu cît dimensiunile picăturilor de lichid din amestecul bifazic pentru același titlu sînt mai mari, cu atît timpul de relaxare a proceselor de condensare sau vaporizare, deci de schimb de masă interfazic, poate deveni egal cu perioada perturbației,ceeace va duce la apariția dezechilibrului în amestec.

Acest dezechilibru se va manifesta prin schimbarea comportării fazei lichide, care în această situație se va comporta ca un corp solid.

Un element important în studiul undelor de șoc în mediul bifazic este amplitudinea perturbației. În cazul mediilor bifazice, intensitatea perturbației nu va influența numai parametrii termofizici ai mediului de curgere, de exemplu presiunea, densitatea și temperatura, ca în cazul gazului perfect, ci va aduce după sine și modificări de stare sau chiar de procese termodinamice. Astfel un salt puternic de presiune va aduce după sine atît un salt de temperatură, presiune etc. cît și o modificare a participației fazei lichide în amestecul bifazic, ca urmare a apariției fenomenului de condensare. În consecință va apărea și o micșorare a vitezei de curgere ca urmare a antrenării de către faza gazoasă a unei cantități mai mari de lichid. Desigur că în cazul unei unde de șoc de intensitate foarte mare, saltul mare de temperatură din frontul ei poate duce chiar la dispariția fazei lichide și deci la trecerea de la curgerea unui mediu bifazic la curgerea unui mediu monofazic ce poate fi considerat un gaz perfect.

7.10. VITEZA DE PROPAGARE A UNDEI DE ȘOC ÎN MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Propagarea undei de șoc într-un mediu bifazic este o problemă mult mai complexă decît aceea ce are loc într-un mediu monofazic de gaz perfect. Această complexitate se datorește proceselor noi ce apar, specifice mediului bifazic și anume: dispersarea energiei cinetice a masei de gaz în masa de lichid ce este antrenată numai de aceasta; trecerea, în timpul curgerii, a unei faze în alta; apariția unor procese de relaxare; absorbția și reflexia undelor de perturbație în și de suprafața mediului lichid; apariția fenomenului de rezonanță etc.

Pentru studiul analitic al vitezei de propagare a undei de șoc în mediu bifazic se face apel la metodele termodinamicii, ele fiind mai simple și dînd aceleași rezultate ca cele acustice, cinetico-moleculare sau gazodinamice.

Mărimile ce se referă la faza lichidă vor fi afectate cu indicele l, cele pentru faza gazoasă cu indicele v, cele pentru amestecul bifazic cu „bf", iar cele la starea lichidă sau de vapori pe curbele limită cu „sat".

Pornind de la ecuația lui Laplace pentru viteza de propagare a sunetului în mediu lichid sau gazos pe curbele limită

$$a = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}\bigg|_{sat} = \sqrt{-v^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}}\bigg|_{sat} \tag{7.116}$$

Rezolvarea derivatei $|\mathrm{d}p/\mathrm{d}v|_{sat}$ pe curbele limită și în interiorul lor, pentru diverse titluri x fiind dificilă, se face apel la ecuațiile potențialelor termodinamice. Viteza sunetului în mediul bifazic se obține cu relațiile

(7.117) în funcţie de viteza sunetului în faza lichidă din amestecul bifazic sau (7.118) în funcţie de viteza sunetului în faza gazoasă :

$$a_{bf} = \sqrt{\frac{v^2}{-\left.\frac{dv}{dp}\right|'_{sat}(1-x) - \left.\frac{dx}{dp}\right|''_{sat} x}} \tag{7.117}$$

$$a_{bf} = v\frac{dp}{dT}\sqrt{\frac{T}{c'_v(1-x)+c''_v x}} \tag{7.118}$$

în care indicele „bf" se referă la mediul bifazic, iar (') şi ('') la valorile pe curbele limită ale lichidului ($x = 0$) şi vaporilor saturaţi ($x = 1$). Deoarece $|dv/dp|$ prezintă discontinuităţi pe curbele limită, şi valoarea sunetului în mediu bifazic va prezenta o discontinuitate pentru stările respective. Legătura între viteza sunetului în lichid şi vapori pe curba limită a lichidului ($x = 0$) este dată de relaţia

$$\left(\frac{v''}{a''_{bf}}\right)^2 - \left(\frac{v'}{a'_{bf}}\right)^2 = \left[J' - J'' + (v'' - v')\frac{d^2p}{dT^2}\right]\frac{dT}{dp} \tag{7.119}$$

în care : a''_{bf} este viteza sunetului în vapori saturaţi pe curba limită; a'_{bf} — viteza sunetului în lichid pe curba limită a lichidului; $J = c^2_{sat}/ /T \cdot c_p$; c_{sat} — căldura specifică pe curblee de limită (J' pe curba limită a lichidului şi J'' pe curba limită a vaporilor). Iar pe curba limită a vaporilor saturaţi, $x = 1$ se obţine ecuaţia (7.120) similară cu (7.119) :

$$(a'_{bf})^2 - (a''_{bf})^2 = T\left(\frac{dp}{dT}\right)^2\left(\frac{v''^2}{c''_{v_{bf}}} - \frac{v'^2}{c'_{v_{bf}}}\right) \tag{7.120}$$

În figura 7.16 se prezintă viteza sunetului în amestecul bifazic de vapori de apă şi picături de apă în funcţie de titlul lor.

Determinarea vitezei sunetului în medii bifazice are la bază următoarele ipoteze : ecuaţia continuităţii este satisfăcută ; curgerea are loc în regim permanent stabilizat ; ambele faze ale mediului se deplasează cu aceeaşi viteză ; se neglijează procesele ireversibile de compresie şi destin-

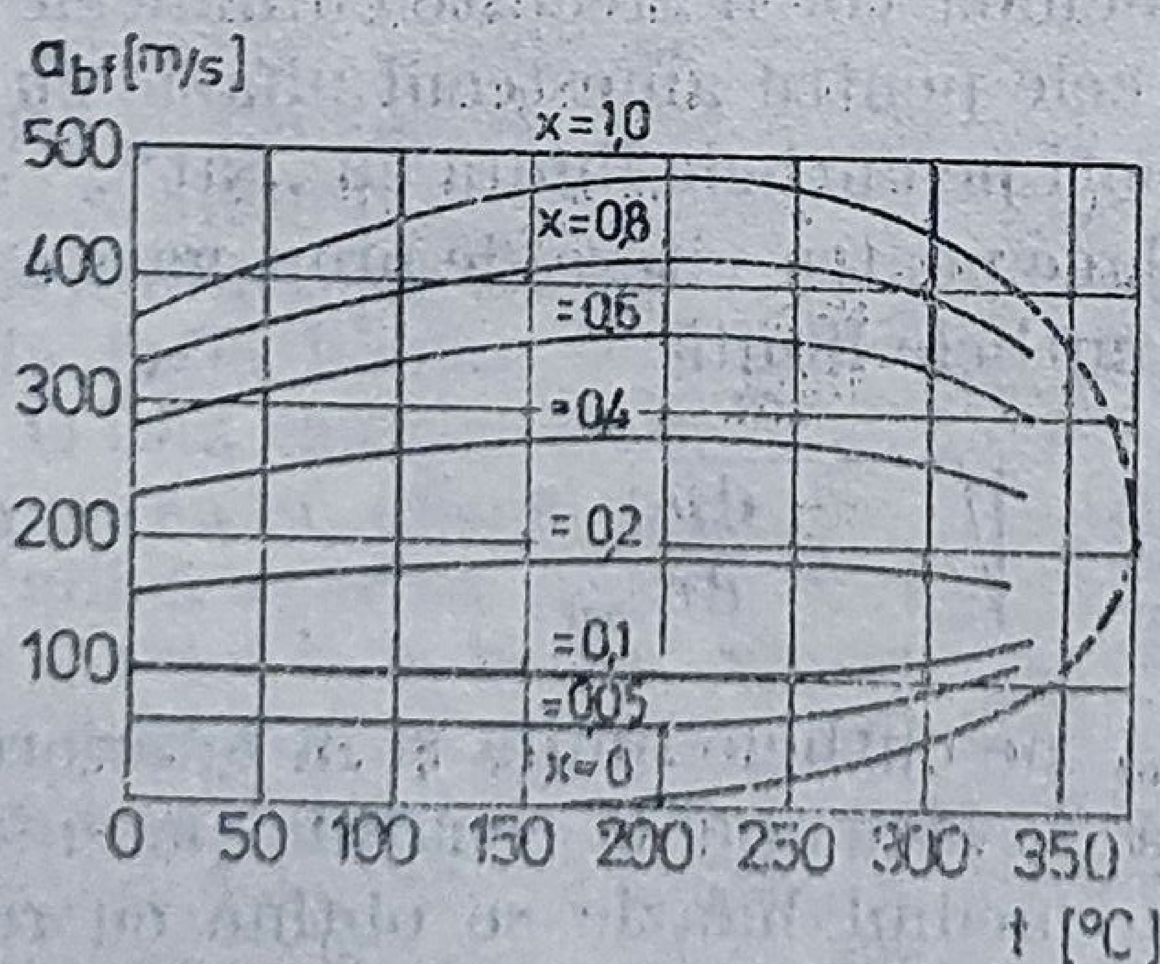


Fig. 7.16. Viteza sunetului în amestecul bifazic apă-vapori de apă în funcţie de titlul x.

dere din frontul undei de şoc. Modelul fizic al generării unei perturbaţii într-un mediu bifazic este identic cu cel folosit la gazul perfect şi anume se consideră gazul închis într-un cilindru de un piston mobil (figura 7.17). La un moment dat pistonul se deplasează cu viteză sonică pe distanţa dl, producînd în masa imobilă de gaz din cilindru o perturbaţie care se deplaseasează cu distanţa dz în timpul cît pistonul s-a deplasat cu dl. Cu notaţiile din figura 7.17, se consideră că perturbaţia apare în mediul mobil, ca

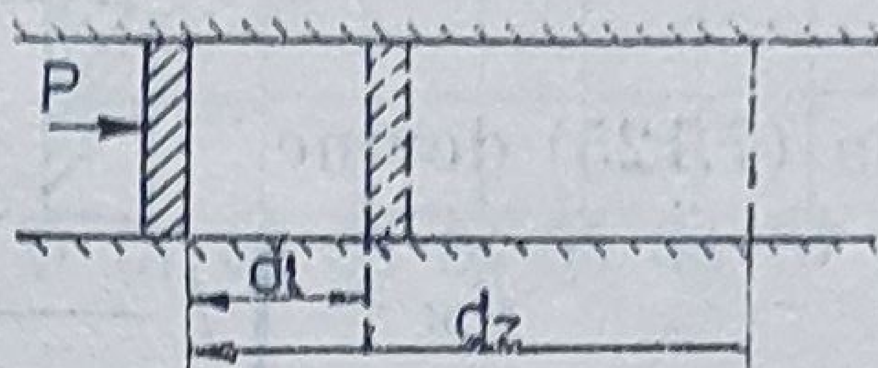


Fig. 7.17. Modelul fizic al unui generator de undă de şoc în mediu bifazic

urmare a deplasării pistonului de suprafaţă A, sub acţiunea unei forţe P, deci sub acţiunea unei forţe specifice P/A. Se notază cu E modulul lui Joung al mediului bifazic şi cu dl/dz, raportul dintre deplasarea pistonului şi deplasarea perturbaţiei, în timpul $d\tau$.

Pentru cazul în care lichidul se găseşte sub formă de picături, prin egalarea impulsului elementar cu variaţia cantităţii de mişcare se obţine expresia (7.121), unde raportul p/A este dat de legea lui Guk (7.122):

$$P d\tau = \rho_v A\, dz \varphi_v \frac{dl_v}{d\tau} + \rho_p A\, dz \varphi_p \frac{dl_p}{d\tau} \tag{7.121}$$

$$\frac{P}{A} = E \frac{dl}{dz} \tag{7.122}$$

Se utilizează indicele v pentru faza gazoasă şi p pentru cea lichid numai sub formă de picături. S-a notat cu $dl/d\tau$ viteza medie de deplasare a vaporilor (v), respectiv picăturilor (p) şi cu φ volumele specifice relative ale fazelor date de relaţiile (7.123) în care v_{bf} este volumul specific al amestecului bifazic:

$$\varphi_v = \frac{v_v}{v_{bf}} = (1 - y)\frac{\rho_{bf}}{\rho_v}\,; \quad \varphi_p = \frac{v_p}{v_{bf}} = y \frac{\rho_{bf}}{\rho_p} \tag{7.123}$$

unde x = titlul vaporilor; $y = 1 - x$ = umiditatea amestecului; ρ_v, ρ_p) ρ_{bf} = densitatea participanţilor şi a amestecului bifazic. Prin introducerea expresiei forţei P din (7.122) în (7.121) se obţine

$$\frac{E}{a_{bf}^2} = x\, \rho_{bf} \frac{dl_v}{dl} + (1 - x)\rho_{bf} \frac{dl_p}{dl} \tag{7.124}$$

Admiţînd că $dl = dl_v$ şi $dl_v/dl_p = \frac{a_{cr_p}}{a_{cr_v}}$, se obţine viteza sunetului în mediu bifazic

$$a_{bf} = \sqrt{\frac{E}{x \cdot \rho_{bf}\left[1 + \frac{1 - x}{x}\frac{a_{cr_p}}{a_{cr_v}}\right]}} \tag{7.125}$$

Modulul lui Young pentru un mediu bifazic se poate exprima în funcție de presiune și densitate, considerînd că unei variații mici de presiune dp îi corespunde proporțional o variație elementară de volum specific dv/v deci $dp = -E \cdot dv/v$. Deoarece regimul de curgere este permanent stabilizat, $d(\rho v)/d\tau = 0$ și deci $d\rho/\rho = -dv/v$. Ca urmare se obține expresia modulului lui Young E cu expresia (7.126)

$$E = \rho_{bf} \frac{dp}{d\rho_{bf}} \tag{7.126}$$

Deci relația (7.125) devine

$$a_{bf} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho_{bf} \cdot x\left[1 + \frac{1-x}{x} \frac{a_{cr_p}}{a_{cr_v}}\right]}} \tag{7.127}$$

Saltul de compresiune ce apare în frontul undei de șoc în mediul bifazic nu este un proces adiabat, ca în cazul gazului perfect, din cauza proceselor ireversibile ce îl însoțesc și care au fost prezentate în paragraful 7.9. Asimilînd procesul adiabat neizentrop ca fiind o politropă cu exponent politropic n, pentru care $d\rho_{bf}/\rho_{bf} = np/\rho_{bf}$ și introducînd această valoare în relația (7.127) ea capătă forma

$$a_{bf} = \sqrt{\frac{n \cdot p}{x \cdot \rho_{bf}\left[1 + \frac{1-x}{x} \frac{a_{cr_p}}{a_{cr_v}}\right]}} \tag{7.128}$$

Analizînd relația (7.128) se observă că pentru cazul gazului perfect (cînd $x = 1$), din relația (7.128) se obține relația cunoscută a vitezei sunetului în gazul perfect cu condiția $n = k$:

$$a_{bf}\Big|_{x=1} = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT} = a$$

În cazul cînd picăturile de lichid sînt mari, și ele nu pot fi antrenate de vapori cu aceiași viteză ca a lor, deci nu mai este valabilă ipoteza egalități vitezelor celor două faze, deci nu este valabil raportul $a_{cr_p}/a_{cr_v} = 0$, viteza de propagare a perturbației va fi viteza de propagare a sunetului în vapori, dată de relația

$$a_{bf} = \sqrt{n \frac{p}{\rho_{bf}}} = \sqrt{\frac{npx}{\rho_v \varphi_v}} = \sqrt{\frac{nR_v Tx}{\varphi_v}} = a_v \tag{7.129}$$

În figura 7.18 se prezintă viteza sunetului în mediu bifazic în funcție de titlul vaporilor și raportul dintre viteza lichidului sub formă de picături și a vaporilor, considerînd exponentul politropic al transformării $n = 1,3$, calculată cu relația (7.125), pentru o temperatură de 100°C.

Legătura dintre viteza critică a lichidului și aceea a vaporilor saturați ai acestuia se obține din legea lui Stockes (7.130) în ipoteza că picăturile au forma sferică:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r_p^3 \rho_p \frac{da_{cr_p}}{d\tau} = -6 \cdot \pi r_p \mu_v (a_{cr_v} - a_{cr_p}) \tag{7.130}$$

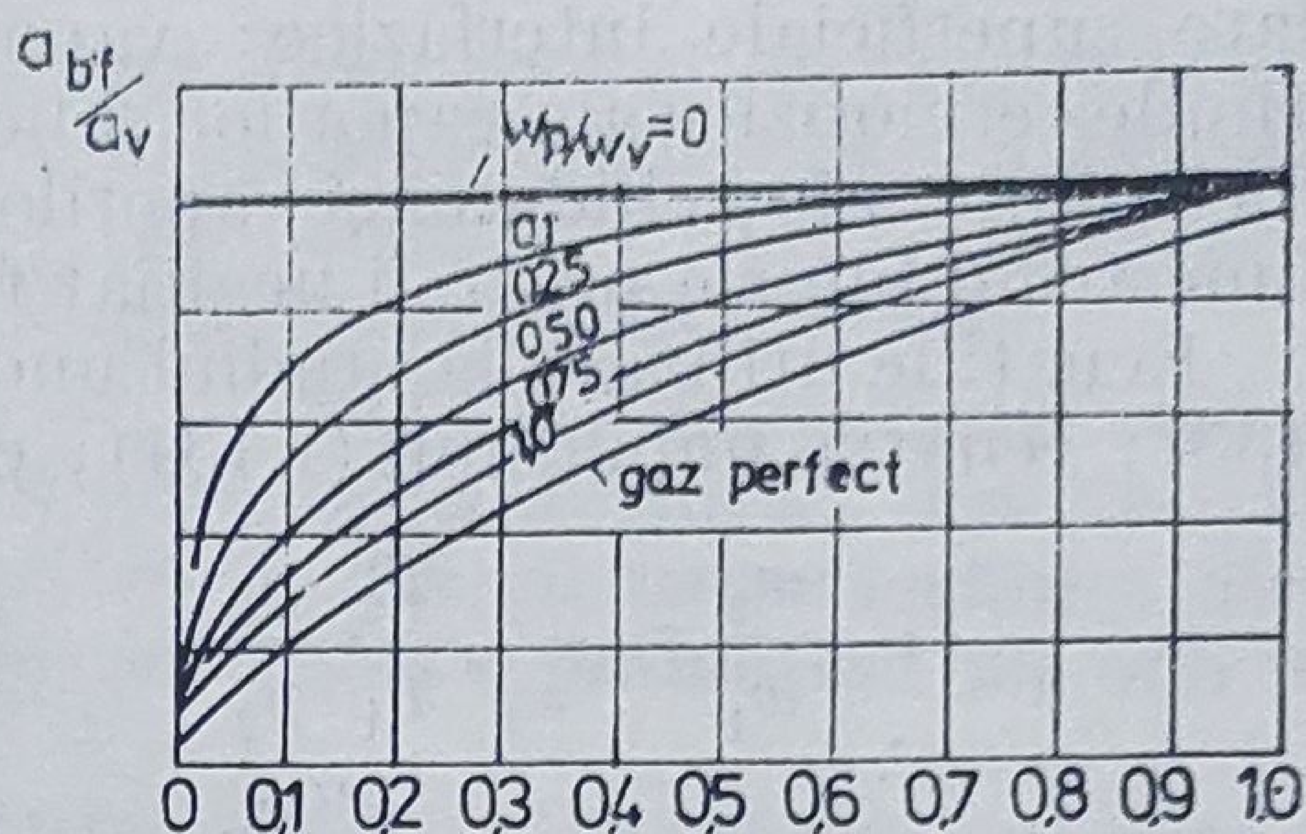


Fig. 7.18. Viteza sunetului în mediu bifazic pentru $n = 1,3$.

în care :

$$a_{cr_v} = |a_{cr_v}|_0 \frac{\tau}{\Delta\tau} \quad ; \quad \tau_0 = \frac{2}{9}\frac{\rho_p \cdot v^2}{\mu_v}$$

τ = timpul ($0 \leqslant \tau \leqslant \Delta\tau$);
$\Delta\tau$ = timpul în care are loc saltul de presiune $\approx \tau_0$;
r = raza picăturii de lichid;
μ_v = vîscozitatea dinamică a vaporilor;
ρ_p = densitatea lichidului sub formă de picături;
$|a_{cr_v}|_0$ = viteza critică a vaporilor la 0°C.

$$\frac{da_{cr_p}}{d\tau} + \frac{a_{cr_p}}{\tau_0} = \frac{|a_{cr_v}|_0}{\tau_0}\frac{\tau}{\Delta\tau} \tag{7.131}$$

Prin integrarea ecuației (7.131) se obține relația finală

$$\frac{a_{cr_p}}{|a_{cr_v}|_0} = \frac{\tau_0}{\Delta\tau}\left[e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_0}} + \frac{\tau}{\tau_0} - 1\right] \tag{7.132}$$

7.11. UNDA DE ȘOC DREAPTĂ ÎN MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Studiul undei de șoc în mediu bifazic trebuie să țină seama că odată cu saltul de presiune are loc și un salt de condensare. Se presupune, prin ipoteză, verificată apoi experimental, că saltul de condensare are loc înaintea frontului undei de șoc, iar curgerea lichidului are loc sub forma unor picături fine, dispersate uniform în masa de vapori, cu o viteză de curgere egală cu aceea a vaporilor. Se consideră că în amestecul bifazic, fazele de lichid și vapori de găsesc în stare de echilibru termodinamic.

S-a constatat experimental că salturile de condensare apar numai într-un domeniu limitat al vitezei de curgere și anume la aceea corespunzătoare unei valori a criteriului Mach $1,5 \leqslant M \leqslant 1,3$. Ca urmare, pentru evitarea apariției acestui fenomen este recomandabil a se ocoli acest domeniu de viteze medii de curgere a mediului bifazic.

Se notează cu indicele (1) mărimile caracteristice ale mediului bifazic înaintea frontului undei de șoc și cu (2) cele după el. Se acceptă următoarele ipoteze : viteza de curgere a picăturilor foarte fine de lichid se consideră a fi egală cu aceea a vaporilor ($w_l/w_v = 1$); nu există forțe de

frecare superficiale interfazice; vaporii sînt considerați gaze perfecte; mărimile termofizice ale vaporilor și lichidului sint cele corespunzătoare pe curbele limită ale lichidului și vaporilor saturați; volumul ocupat de lichid în amestecul bifazic poate fi neglijat față de cel al vaporilor.

Ecuațiile utilizate la studiul undei de șoc sînt: ecuația continuității (7.133); ecuația impulsului (7.134); ecuația conservării energiei (7.135):

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_2} \tag{7.133}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho'' w_1}{x_1}(w_1 - w_2) \tag{7.134}$$

$$h_0 = h_1' + r_1 x_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2' + r_2 x_2 + \frac{w_2^2}{2} \tag{7.135}$$

Criteriile Mach ale curgerii înainte și după salt sînt M_1 și M_2:

$$M_1 = \frac{w_1}{\sqrt{kRT_1}}\ ; \quad M_2 = \frac{w_2}{\sqrt{kRT_2}}$$

Ținînd seama de M_1 și M_2 ecuațiile (7.133)–(7.135) devin

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_2}\ ; \quad \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{k}{x_1} M_1(M_1 - M_2)$$

$$h_0 = h_1' + r_1 + r_1 \cdot x_1 + \frac{1}{2} M_1^2 kRT_1 = h_2' + r_2 x_2 + \frac{1}{2} M_2^2 kRT_2 \tag{7.136}$$

Atunci:

$$M_1 \frac{x_2}{x_1} \frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_2} = M_1 - \frac{x_1}{kM_1^2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \tag{7.137}$$

Din ecuațiile conservării energiei și (7.137) se determină titlul vaporilor după frontul undei de șoc, cu relațiile (7.138) sau (7.139):

$$x_2 = \frac{r_1 x_1 - (h_2' - h_1')}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{kRT_1}{r_2}(M_1^2 - M_2^2) \tag{7.138}$$

$$x_2 = \frac{r_1 x_1 - (h_2' - h_1')}{r_2} + \frac{RT_1}{2r_2} \frac{x_1}{M_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\left[2M_1 - \frac{x_1}{kM_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\right] \tag{7.139}$$

Introducînd pe (7.139) în (7.137) se obține

$$M_1 \frac{r_1 x_1 - (h_2' - h_1')}{x_1 r_1} + \frac{1}{2} \frac{RT_1}{r_2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) 2M_1 - \frac{x_1}{kM_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) =$$

$$= \frac{T_1}{T_2} \frac{p_2}{p_1} M_1 - \frac{x_1}{kM_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \tag{7.140}$$

Parametrii mediului bifazic în curentul incident p_1, M_1 și x_1 sînt cunoscuți prin datele problemei, singura necunoscută din relația (7.140) fiind p_2, deoarece ceilalți parametri p_1, T_1, r_1, h_1' și h_2, T_2, r_2 sînt legați direct de presiunea p_2. Rezolvarea ecuației se face prin încercări succesive.

Domeniul de valabilitate a relației (7.140) fiind în interiorul curbelor limită depinde de valoarea lui x_2. Valorile limită ale lui x_2 sînt deci $0 < x_2 < 1$. Pentru zona din afara curbelor limită, deoarece legătura dintre presiune și temperatură (p_2 și T_2) în domeniul supraîncălzit nu mai este fixă, ecuația este nedeterminată.

Pentru cazul limită $x_2 = 1$, din relația (7.137) se obține expresia lui M_1 sub forma

$$M_1 = \sqrt{\frac{\frac{x_1}{k}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}{1 - \frac{T_2}{T_1}\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{x_1}}}\Bigg|_{x_2=1} \tag{7.141}$$

și, ca urmare, ecuația energiei capătă forma

$$r_2 - r_1 \cdot x_1(h_2' - h_1') = \frac{RT_1}{2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\left(x_1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{p_1}{p_2}\right) \tag{7.142}$$

Cu relația (7.142) se determină saltul maxim de presiune p_2/p_1 ce are loc în unda de șoc într-un mediu bifazic pentru valori date ale lui p_1 și x_1, în cazul cînd $x_2 = 1$. Odată determinat saltul maxim de presiune p_2/p_1, introducîndu-se valoarea găsită în relația (7.141), se obține valoarea maximă a criteriului Mach M_1. Dacă M_1 al curgerii este mai mare ca M_{1max} obținut, atunci relațiile de mai sus nu mai sînt aplicabile, avînd în vedere că s-a intrat în domeniul vaporilor supraîncălziți.

În cazul cînd $M_1 > M_{1max}$ gazul este monocomponent și, ca urmare, ecuația conservării energiei dată în (7.136) capătă forma

$$h_0 = h_1'' - (1 - x_1)r_1 + \frac{kRT_1}{2}M_1^2 = h_2 + \frac{kRT_1}{2}M_2^2 \tag{7.143}$$

Ținînd seama că pentru un gaz perfect $h = c_p \cdot T$, relația (7.143) poate fi exprimată și numai în funcție de temperatură, după cum urmează:

$$T_2 = T_1 - (1 - x_1)\frac{r_1}{c_p} + \frac{kRT_1}{2c_p}(M_1^2 - M_2^2) \tag{7.144}$$

iar pentru $x_2 = 1$, relația (7.137) capătă forma:

$$\frac{M_1}{x_1}\frac{T_2}{T_1}\frac{p_1}{p_2} = M_1 - \frac{x_1}{kM_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \tag{7.145}$$

Introducînd expresia lui T_2 din relația (7.144) în (7.145) și apelînd la ecuația impulsului, se obține ecuația

$$T_1 - (1 - x_1)\frac{r_1}{c_p} + \frac{R}{2c_p}\left[2M_1 - \frac{x_1}{k \cdot M_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\right]\frac{x_1}{k \cdot M_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) =$$

$$= \frac{p_2}{p_1}\frac{T_1 x_1}{M_1}\left[M_1 - \frac{x_1}{k \cdot M_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\right] \qquad (7.146)$$

Cu ajutorul relației (7.146) se obține mărimea saltului de presiune p_2/p_1, în funcție de mărimile caracteristice ale curentului înainte de salt, pentru $M_1 > M_{1max}$ și $x_2 = 1$. Aranjînd convenabil termenii ecuației (7.146) se obține relația (7.147) :

$$\left(\frac{p_2}{p_2} - 1\right)^2 - \frac{c_v - c_p \dfrac{x_1}{k \cdot M_1^2}}{c_p \dfrac{R}{2}}\frac{k \cdot M_1^2}{x_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) -$$

$$- \frac{(1 - x_1)(r_1 - c_p T_1) k M_1^2}{\left(c_p - \dfrac{R}{2}\right) T_1 \cdot x_1^2} = 0$$

Iar valorile lui p_2/p_1 sînt :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{k}{k+1}\left(\frac{M_1^2}{x_1} - 1\right) \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\left(\frac{M_1^2}{x_1} - 1\right)^2 + \frac{2(k \cdot M_1)^2\left(\dfrac{r_1}{c_p \cdot T_1} - 1\right)(1 - x_1)}{(k+1)\, x_1^2}} \qquad (7.147)$$

În figura 7.19 se prezintă o nomogramă pentru calculul saltului de presiune în unda de șoc pentru curgerea vaporilor de apă umezi, cu $x_1 < 1$, întocmită după relația (7.140). În funcție de valoarea criteriului Mach M_1 și titlul vaporilor x_1 pentru $p_1 = 0{,}56$ at se obține din figura 7.19 saltul de presiune p_2/p_1 pe prima scară verticală. Pentru altă presiune inițială se folosește diagrama ajutătoare din stînga figurii, obținîndu-se saltul p_2/p_1 pe axa orizontală.

Relația (7.147), scrisă pentru abur saturat uscat, deci pentru $x_1 = 1$, devine relația cunoscută de la saltul de prsiune al gazului perfect monofazic și anume

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - 1\right) \qquad (7.148)$$

Valoarea aproximativă a cifrei M_2 după frontul undei de şoc într-un mediu bifazic (poate fi calculată şi cu relaţia

$$M_2 = M_1 - \frac{x_1}{k \cdot M_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \tag{7.149}$$

Valoarea exactă a saltului p_2/p_1 se poate obţine cu relaţia (7.147) sau mai uşor din diagrama prezentată în figura 7.19.

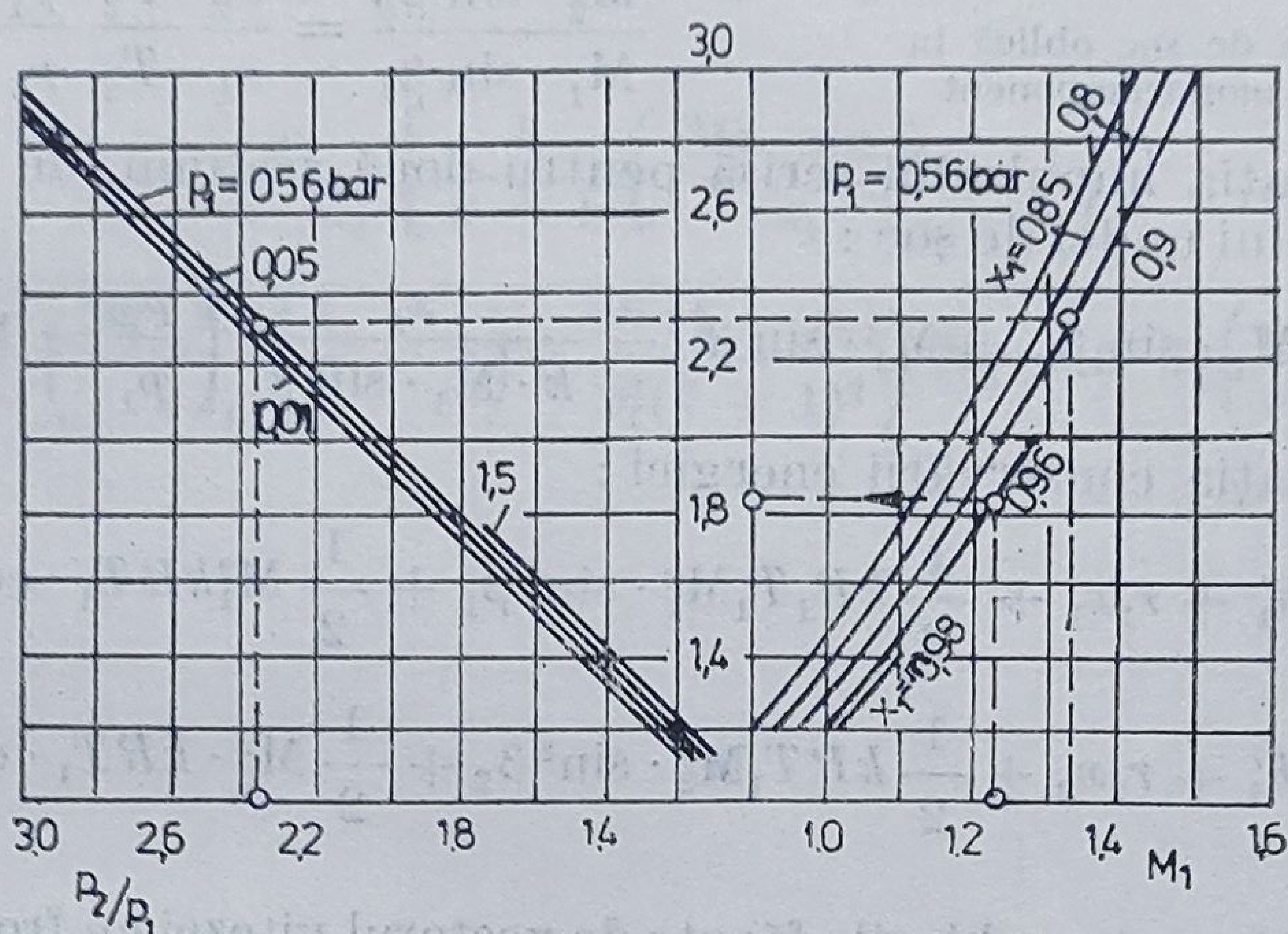


Fig. 7.19. Saltul de presiune în unda de şoc dreaptă al unui amestec bifazic apă — vapori de apă

După cum s-a arătat, pentru o anumită stare iniţială a amestecului bifazic caracterizată prin p_1 şi x_1 se pot folosi la calculul saltului de presiune în unda de şoc relaţiile (7.141) şi (7.142) numai dacă $M_1 < M_{1max}$. În cazul cînd $M_1 > M_{1max}$ se foloseşte relaţia (7.147).

Temperatura pe care o capătă mediul bifazic în spatele undei de şoc pentru $x_2 = 1$ (vapori saturaţi uscaţi) se obţine cu relaţia

$$T_2 = M_2 \frac{x_1 \cdot T_1}{M_1} \frac{p_2}{p_1} \tag{7.150}$$

7.12. UNDA DE ŞOC OBLICĂ ÎN MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Calculul undei de şoc oblice se face urmînd aceeaşi metodă ca în cazul undei de şoc drepte. Notaţiile folosite sînt prezentate în figura 7.20. Ipotezele şi ecuaţiile ce stau la baza calculului sînt aceleaşi cu cele prezentate la studiul undei de şoc oblice a gazului perfect. Ecuaţiile de bază sînt :

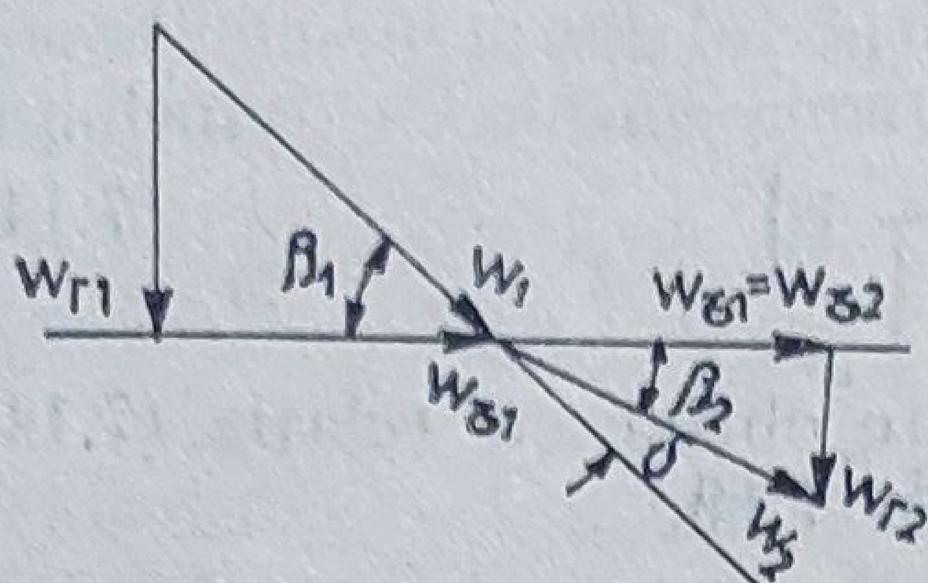


Fig. 7.20. Unda de șoc oblică în mediu bifazic monocomponent

— ecuația continuității (7.151), care se obține ținînd seama de relația (7.133) și de construcția geometrică din figura 7.20 ;

$$\frac{w_{2n}}{w_{1n}} = \frac{w_2 \cdot \sin \beta_2}{w_1 \cdot \sin \beta_1} = \frac{M_2 \cdot \sin \beta_2}{M_1 \cdot \sin \beta_1} \tag{7.151}$$

$$\frac{M_2 \cdot \sin \beta_2}{M_1 \cdot \sin \beta_1} = \frac{x_2}{x_1} \frac{T_2}{T_2} \frac{p_1}{p_2}$$

— ecuația impulsului scrisă pentru două secțiuni, de o parte și de alta a frontului undei de șoc :

$$M_2 \cdot \sin \beta_2 = M_1 \cdot \sin \beta_1 - \frac{x_1}{k \cdot M_1 \cdot \sin \beta_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \tag{7.152}$$

— ecuația conservării energiei :

$$h_0 = h_1' + r_1 x_1 + \frac{1}{2} k R_1 T_1 M_1^2 \cdot \sin^2 \beta_1 + \frac{1}{2} M_1^2 k R T_1 \cdot \cos^2 \beta_1 =$$

$$= h_2' + r_2 x_2 + \frac{1}{2} k R T_1 M_2^2 \cdot \sin^2 \beta_2 + \frac{1}{2} M_2^2 \cdot k R T_1 \cdot \cos^2 \beta_1 \tag{7.135}$$

în care β_1 și β_2 sînt unghiurile făcute de vectorul vitezei cu frontul undei de șoc înainte și după el.

După cum se vede, relațiile pentru calculul undei de șoc oblice sînt similare cu cele obținute la unda de șoc dreaptă. Ca urmare, ele pot fi folosite atît pentru $x_2 < 1$ cît și pentru $x_2 = 0$ (vezi paragraful 7.11). Singura problemă suplimentară constă în determinarea unghiului de rotire δ. Se face apel la ecuația impulsului, de unde se obține (7.154) :

$$\mathrm{tg}\beta_2 = \mathrm{tg}\,\beta_1 - \frac{x_1}{k M_1^2 \cdot \sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \tag{7.154}$$

După cum se vede din figura 7.20, $\delta = \beta_1 - \beta_2$.

Folosind relația

$$\sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1 = \frac{\mathrm{tg}\beta_1}{1 + \mathrm{tg}\beta_1} \tag{7.155}$$

se poate determina valoarea lui δ cu relația (7.156), după ce în prealabil s-a determinat mărimea saltului de presiune p_2/p_1, cu relațiile văzute la saltul drept, sau cu nomograma din figura 7.19 :

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta_1} \frac{\frac{x_1}{k \cdot M_1^2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}{1 - \frac{x_1}{k \cdot M_1^2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)} \tag{7.156}$$

Din analiza relației (7.156) se constată că pentru valorile cunoscute ale mărimilor M_1, x_1 și p_2/p_1 se poate determina unghiul δ, și cu aceasta problema undei de șoc oblice este complet rezolvată.

Dacă $M_1 > M_{1max}$ și pentru $x = 1$ sau vaporii supraîncălziți, rezolvarea problemelor se face cu relațiile (7.147) și (7.156) din care se obține

$$\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \tag{7.157}$$

în care:

$$\alpha = \frac{x_1}{k \cdot M_1^2} \left[\frac{k}{k+1} \left(\frac{M_1^2 \cdot \sin \beta}{x_1} - 1 \right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \left(\frac{M_1^2 \cdot \sin^2 \beta_1}{x_1} - 1 \right) + \frac{2k^2(1 - x_1)}{x_1^2 (k+1)^2} \right) M_1 \cdot \sin^2 \beta_1 \left(\frac{r_1}{c_p \cdot T_1} - 1 \right)} .$$

8. TERMOGAZODINAMICA JETURILOR DE GAZE

Prin jet liber de gaz se înțelege o vînă de gaz ce pătrunde liberă (nelimitată de pereți) într-un gaz cu aceleași proprietăți termofizice sau cu proprietăți diferite. Curgerea este de obicei turbulentă, întrucît particule de gaz din jet ies în afara limitelor lui, iar în locul lor pătrund particule din mediul înconjurător, stabilindu-se în acest fel un schimb de masă cu exteriorul. Ca urmare, masa de gaz ce curge prin secțiunea lui se mărește adică limitele jetului cresc. În figura 8.1 este reprezentat schematic un jet.

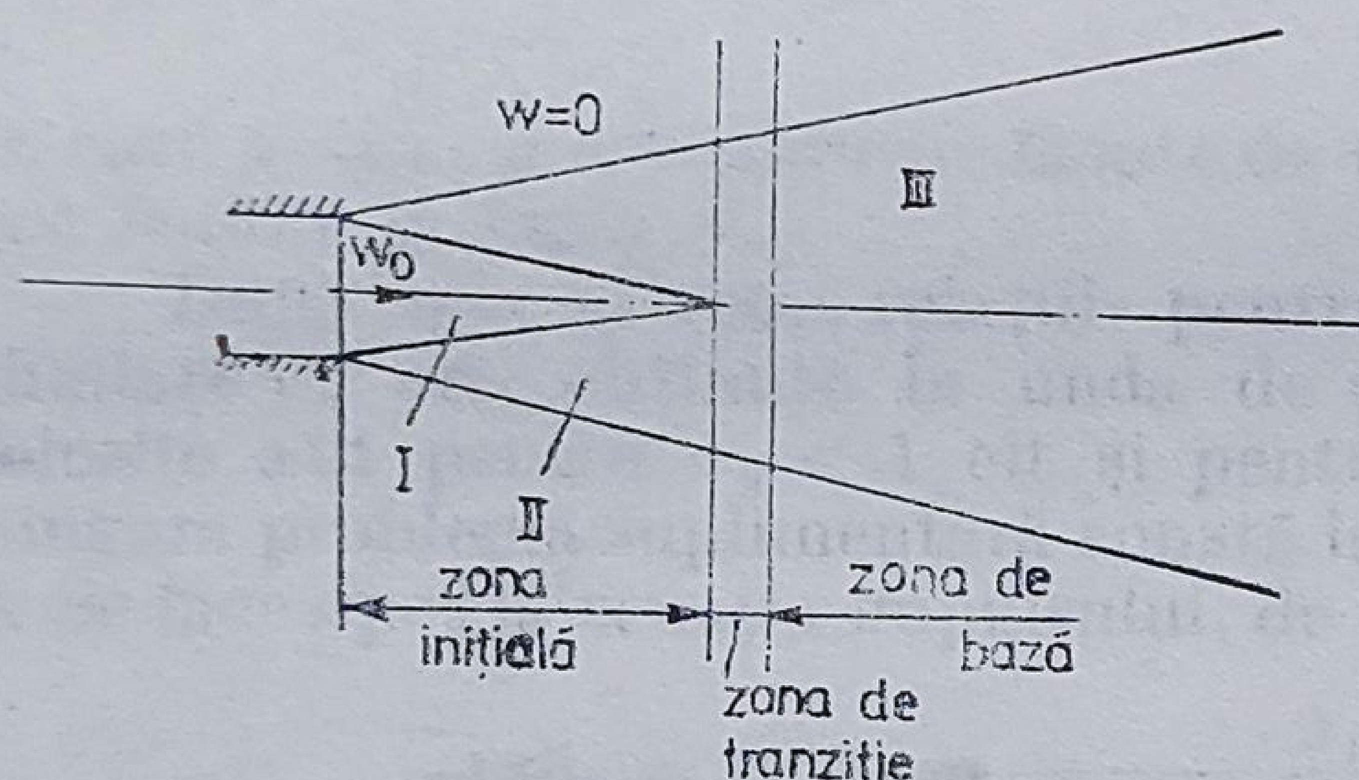


Fig. 8.1. Jet liber de gaz.

Dintr-un orificiu de o formă oarecare, denumit „secțiunea inițială a jetului", curentul de gaz iese cu o viteză medie uniformă pe secțiune, notată cu w_0. Viteza mediului ambiant în care pătrunde jetul de gaz cu viteza w_0, notată cu w_{ma}, poate fi egală cu zero, în care caz jetul se numește „liber" " sau „înecat", sau poate avea o valoare $w_0 > w_{ma} > 0$, în care caz se denumește „jet însoțit", sau poate fi $w_{ma} \geqslant w_0$ în care caz nu se mai formează un jet, ci o curgere potențială. Ca urmare a schimburilor de impuls între particulele din jet și cele ale mediului ambiant, deci datorită schimbului de masă, viteza inițială w_0 rămîne constantă numai în așa-numitul „nucleu al jetului" însemnat cu *I* pe figura 8.1, în afara lui apărînd în secțiune o variație de viteză, deci un strat limită notat cu *II* a cărui grosime se mărește continuu, dacă jetul este liber ($w_{ma} = 0$). Zona în care există un nucleu de gaz cu viteză w_0, deci zona în care grosimea stratului limită este mai mică decît raza jetului, se numește *zona inițială*.

Tabelul 8.1.

Clasificarea jeturilor libere de gaz

Denumirea	Caracteristici exterioare	Natura gazului din jet	Exemple de medii în jet	Caracteristicile termice ale jetului	
Jet liber (înecat)	$w_{ma} = 0$ — fără pereți limitatori	omogen	— monofazic monocomponent — mediul în jet același cu mediul ambiant	izoterm	$T_0 = T_{ma}$
				neizoterm	$T_0 \neq T_{ma}$
		eterogen	— polifazic, policomponent — mediul în jet diferit de mediul ambiant	izoterm	$T_0 = T_{ma}$
				neizoterm	$T_0 \neq T_{ma}$
Jet limitat (însoțit)	— $w_{ma} \geqslant 0$ — cu pereți limitatori	omogen	— monofazic, monocomponent — mediul în jet același cu mediul ambiant	izoterm	$T_0 = T_{ma}$
				neizoterm	$T_0 \neq T_{ma}$
		eterogen	— polifazic, policomponent — mediu gazos din jet egal sau ferit de mediul ambiant	izoterm	$T_0 = T_{ma}$
				neizoterm	$T_0 \neq T_{ma}$
Jeturi concurente	— $w_{ma} > 0$ — $w_{jet\,1} \neq w_{jet\,2}$ — fără sau cu pereți limitatori	omogen	— monofazic, mono- sau policomponent — mediul diferit atît al jetului cît și a mediului ambiant	izoterm	$T_0 = T_{ma}$
				neizoterm	$T_0 \neq T_{ma}$
		eterogen	— polifazic, policomponent — mediul diferit în jet și în mediul ambiant	izoterm	$T_0 = T_{ma}$
				neizoterm	$T_0 \neq T_{ma}$

Stabilizarea grosimii stratului limită egală cu raza jetului se face pe o lungime oarecare, denumită *zonă de tranziție*, care în calculele tehnice se consideră egală cu zero. Apoi, urmează *zona de bază* a jetului, care durează atîta timp cît va mai exista mișcare în jet.

Un jet este caracterizat prin mărimile termofizice și dinamice ale lui în secțiunea de formare și în raport cu cele ale mediului înconjurător, avînd ca mărime constantă egalitatea presiunii frînate cu cea a mediului. Ca urmare, din punct de vedere termodinamic, jetul de gaz execută o transformare izobară. Clasificarea jeturilor este prezentată în tabelul 8.1. Pentru exemplificare sînt prezentate în figura 8.2 cîteva din tipurile de jeturi descrise în tabelul 8.1. Deoarece mișcarea jeturilor este diferită în funcție de natura lor, iar interacțiunea geometrică, termică sau fazică nu poate fi precizată analitic, studiul jeturilor de gaze se face numai experimental.

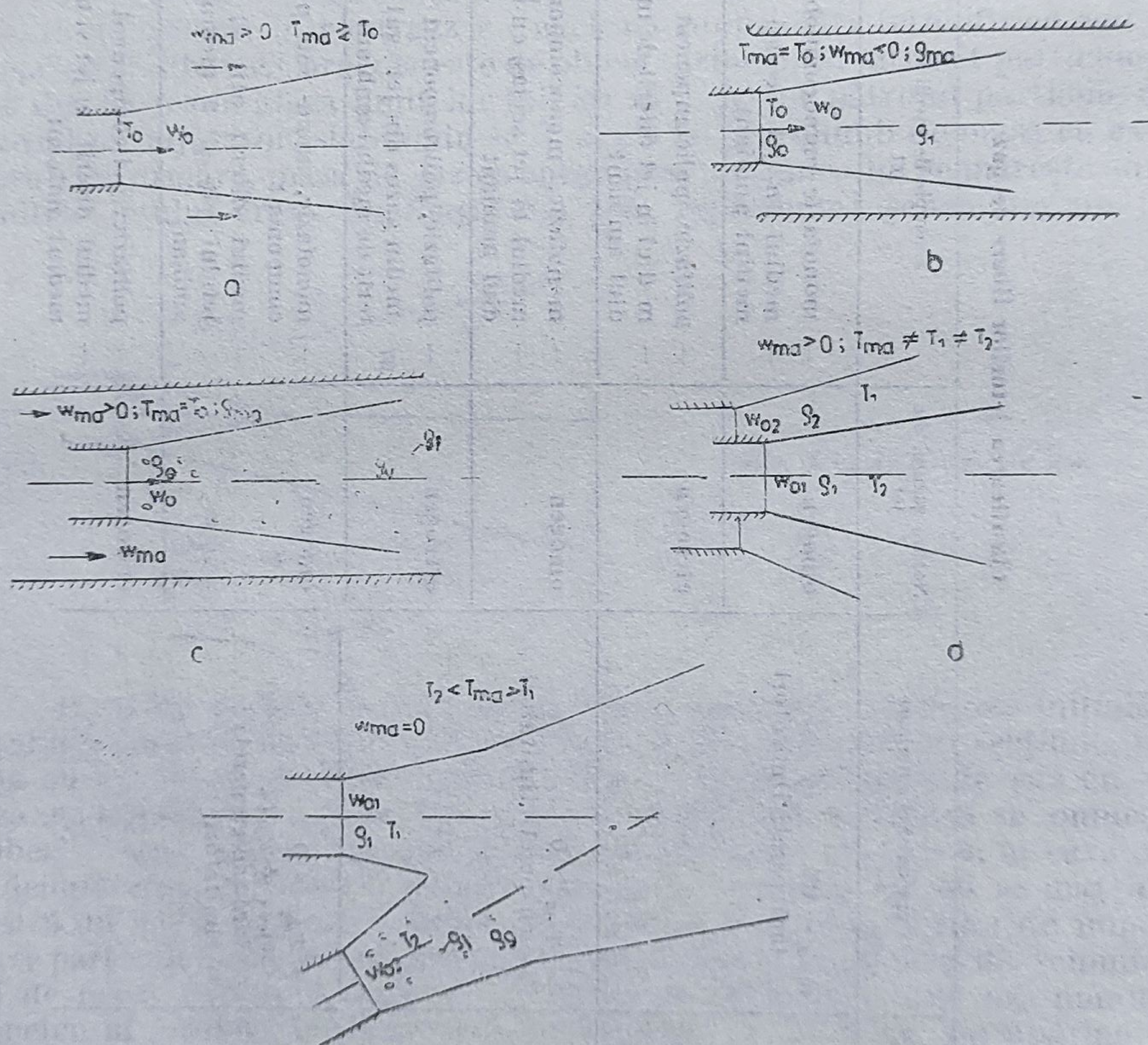


Fig. 8.2. Tipuri caracteristice de jeturi libere de gaz:
a — jet însoțit, omogen, neizoterm; *b* — jet limitat, izoterm; *c* — jet limitat, izoterm, polifazic; *d* — jeturi concurente, concentrice, neizoterme, omogene; *e* — jeturi concurente, polifazice, neizoterme.

8.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE UNUI JET DE GAZ IZOTERM

Gurile de formare a jeturilor au forme și dimensiuni foarte variate, ele depinzînd de scop. Astfel se întîlnesc secțiuni rotunde (la ejectoare, arzătoare de gaze, ajutajul de reacție al reactoarelor etc.) sau rectangulare (ajutajele turbinelor de abur și gaze, instalații de ventilație etc.). La ieșirea din secțiunea de formare jetul de gaz are tendința de a-și păstra caracterele inițiale; ca urmare apare un nucleu al jetului iar curba de distribuție a vitezei are forma unui trapez, așa cum se vede în figura 8.3. Granița jetului (virtuală) venind în contact cu mediul înconjurător, creează, datorită viscozității, turbioane ce se propagă în interiorul jetului, antrenînd o masă din gazul exterior în masa lui, ducînd la îngroșarea stratului limită, deci la mărirea lui R_{gr}.

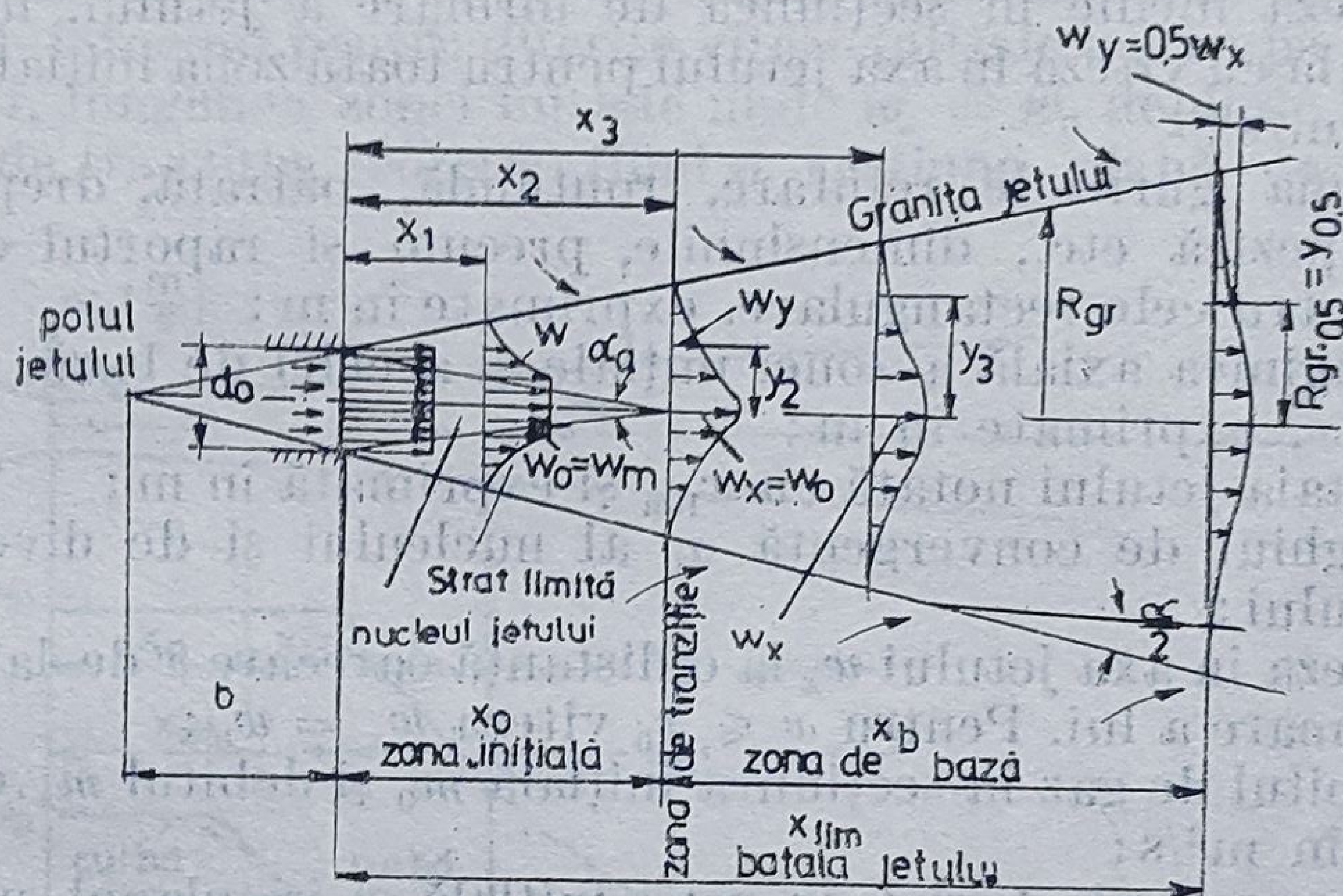


Fig. 8.3. Mărimile caracteristice ale unui jet liber, izoterm.

În secțiunea d_0 de formare a lui, jetul este caracterizat prin prezența unor turbioane (caracteristice curgerii turbulente) existente nu numai la granița ci și în toată masa lui, provocate de turbulența din secțiunea d_0. Formarea și întreținerea acestor turbioane consumă din energia cinetică pe care o are jetul în secțiunea de formare a lui. După dispariția nucleului axial, energia necesară întreținerii lor este luată din energia conținută în gazul în mișcare.

De asemenea, antrenarea de gaz din mediul înconjurător în jet și creșterea energiei cinetice a gazului absorbit se face tot prin consumarea energiei jetului. Consecința acestui consum de energie este micșorarea vitezei de curgere a jetului.

În zona inițială, consumul de energie duce la dispariția nucleului, iar în zona de bază, la micșorarea vitezei de curgere pe toată secțiunea lui. Deși viteza de curgere a jetului scade cu abscisa x (figura 8.3), energia totală a jetului rămîne constantă, ținînd seama de creșterea masei în curgere ca urmare a absorbției de gaz din mediul înconjurător.

Consecința amestecului dintre gazul din jetul inițial și cel la mediului înconjutător nu este numai scăderea vitezei de curgere, ci modificarea naturii gazului, precum și a temperaturii lui (în cazul jetului neizoterm).

Fiecare turbion din jet este supus acțiunii forțelor de frecare internă (a viscozității) care au ca efect frînarea mișcării și deci dispariția lui.

La o anumită distanță x de la secțiunea de formare a jetului, energia cinetică a lui ajunge la un nivel atît de scăzut încît nu mai poate să împrumute energia necesară învingerii forțelor de vîscozitate și turbionarea dispare. Deci se poate trage concluzia că jetul are o limită teoretică, denumită „bătaia jetului'', ca fiind aceea la care se produce anularea mișcării turbionare. În practica curentă, bătaia jetului se consideră ca fiind ceva mai mică decît aceea teoretică, și anume aproximativ la 0,95 din bătaia teoretică.

Mărimile caracteristice uzuale ce definesc din toate punctele de vedere un jet de gaz sînt :

— viteza medie în secțiunea de formare a jetului, notată cu w_0, egală cu viteza în axa jetului pentru toată zona inițială, exprimată în m/s ;
— forma gurii de refulare, rontundă, pătrată, dreptunghiulară, trapezică etc., dimensiunile, precum și raportul dintre laturi pentru cele rectangulare, exprimate în m ;
— lungimea axială a zonei inițiale și a celei de bază, notate cu x_0 și x, exprimate în m ;
— bătaia jetului notată cu $x_{\lim}$ și exprimată în m ;
— unghiul de convergență α_0 al nucleului și de divergență α al jetului ;
— viteza în axa jetului w_x la o distanță oarecare x de la secțiunea de formare a lui. Pentru $x \leqslant x_0$ viteza $w_x = w_0$;
— debitul de gaz în secțiunea inițială $\dot{m}_0$ și debitul $\dot{m}_x$ din secțiunea x, în m³/s ;
— temperaturile t_0 și t_x în zona inițială și în planul perpendicular pe axă la distanța x de la secțiunea de formare ;
— polul jetului sau coeficientului de turbulență al lui notat cu a, exprimat în m (figura 8.3) ;
— raza jetului R_{grx} la distanța x.

Deoarece bătaia teoretică a unui jet ar corespunde unei lungimi $x_{\lim_t}$ în care viteza în axa lui ar fi $w_{x\lim_t} = 0$, deci imposibil de măsurat experimental, se utilizează noțiunea de „bătaie a jetului'' pentru distanța măsurată de la secțiunea de formare pînă în punctul unde viteza gazului în axa jetului are o valoare de 0,04 din w_0 dar în orice caz mai mică de 0,25 m/s.

8.2. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE JETULUI LIBER ROTUND IZOTERM

Pentru simplificarea prezentării, se consideră un jet de gaz perfect, liber, înecat (deci care iese în același mediu și a cărui viteză este $w_{ma} = 0$),

a cărei secţiune de formare este circulară. Ca urmare, forma lui va fi axial simetrică, iar regimul de curgere turbulent.

Din studiul experimental al jeturilor axial simetrice, s-a constatat că valoarea componentelor transversale ale vitezelor pe axa de simetrie în orice secţiune este foarte mică în raport cu aceea axială. Deci dacă axa x coincide cu axa de simetrie a jetului, componentele vitezei pe direcţia y sînt atît de mici în comparaţie cu cele pe direcţia x, încît ele se neglijează (curgere unidirecţională), considerînd drept viteză în jet numai componenta pe direcţia x.

Cercetările experimentale efectuate de diferiţi cercetători au dat rezultate oarecum identice,dar în unele cazuri controversele sînt destul de importante.

Variaţia vitezei axiale a jetului.. Reprezentînd variaţia vitezei axiale w_x în funcţie de distanţa x de la secţiunea de formare, se obţine profilul din figura 8.4, întocmit pentru diferite viteze iniţiale w_0. După cum se vede din figura 8.4, lungimea zonei iniţiale unde $w_x = w_0$ depinde de valoarea lui w_0. Zona de tranziţie, teoretic fiind o secţiune plană ce corespunde

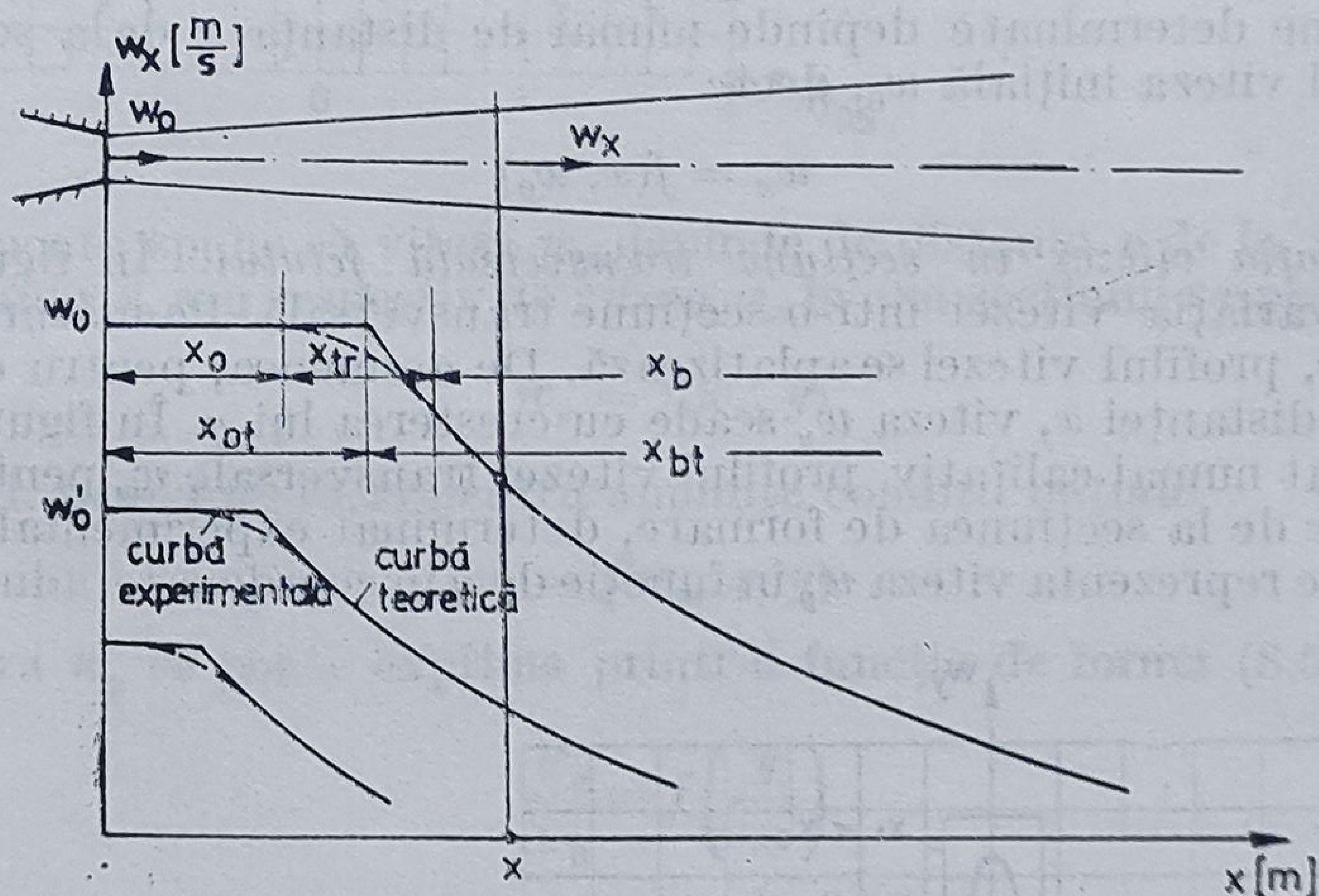


Fig. 8.4. Variaţia vitezei w_x într-un jet liber izoterm.

distanţei la care w_x încetează să mai fie egal cu w_0 nu corespunde cu valorile găsite experimental. Efectul practic al neconcordanţei fiind acela că lungimea reală a zonei iniţiale x_0 este mai mică decît aceea teoretică x_{0t}. Obţinerea unei curbe de variaţie a vitezei axiale, general valabilă pentru un jet axial simetric, indiferent de forma secţiunii de formare a lui şi de debit, poate fi făcută numai dacă se utilizează o scară logaritmică atît pentru viteză cît şi pentru distanţa x. Se constată în acest caz apariţia unei pante de scădere a vitezei axiale ce poate fi asimilată cu o dreaptă cu panta 7 : 1 în locul celei hiperbolice. În figura 8.5 se prezintă variaţia vitezei $w_x = f(x)$ în coordonate logaritmice, curbă general valabilă tuturor jeturilor axial

simetrice. Variația vitezei în zona reală de tranziție are panta 1 : 2. Cu ajutorul metodei prezentată în figura 8.5 se poate determina cu ușurință variația vitezei axiale a unui jet axial simetric, fiind necesar numai calculul analitic al zonei inițiale x_0. Tot cu această metodă se determină și bătaia jetului x_{lim}.

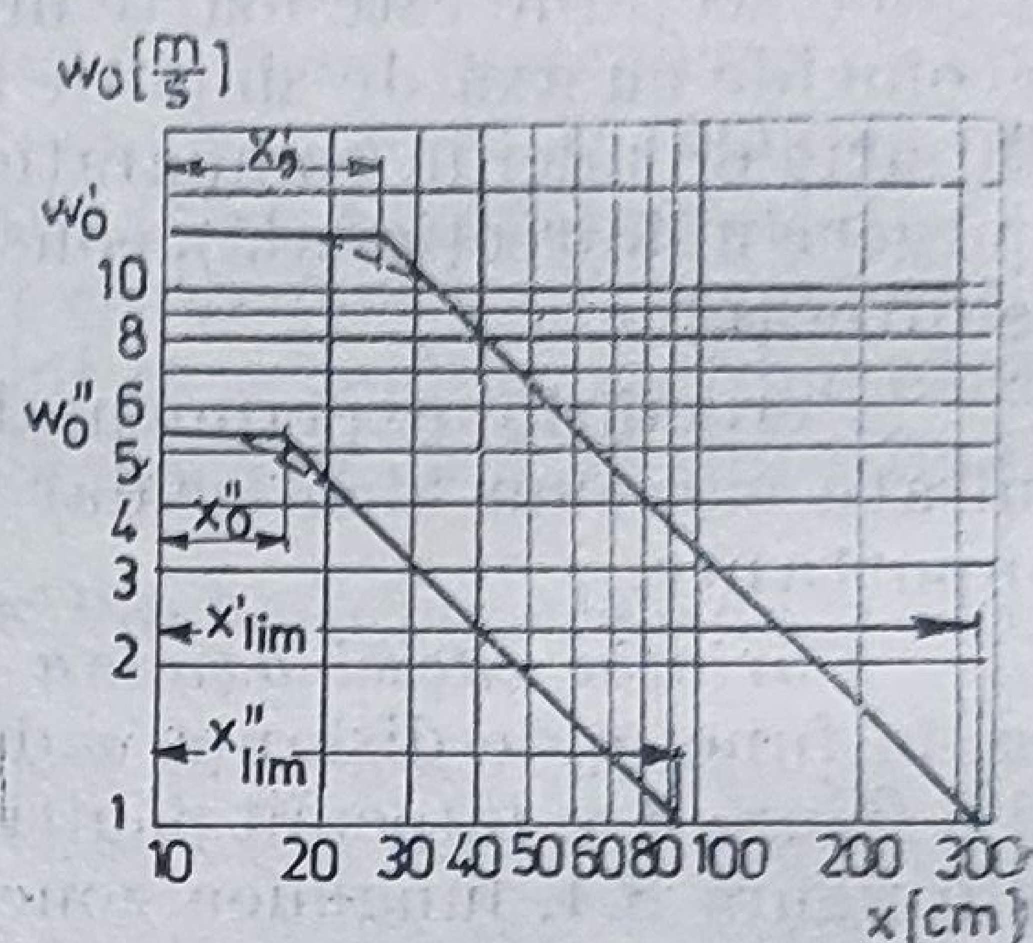


Fig. 8.5. Variația vitezei w_x în coordonate logaritmice, pentru un jet axial simetric.

În concluzie, viteza axială w_x la un jet axial simetric, pentru condiții inițiale bine determinate depinde numai de distanța x dela secțiunea de formare și viteza inițială w_0, deci :

$$w_x = f(x, w_0) \tag{8.1}$$

Variația vitezei în secțiune transversală jetului. În figura 8.3 se prezintă variația vitezei într-o secțiune transversală. Pe măsură ce crește distanța x, profilul vitezei se aplatizează. De asemenea, pentru o anumită valoare a distanței x, viteza w_y scade cu creșterea lui y. În figura 8.6 este reprezentat numai calitativ profilul vitezei transversale w_y pentru diferite distanțe x de la secțiunea de formare, determinat experimental. Este mai comod a se reprezenta viteza w_y în funcție de y în coordonate adimensionale

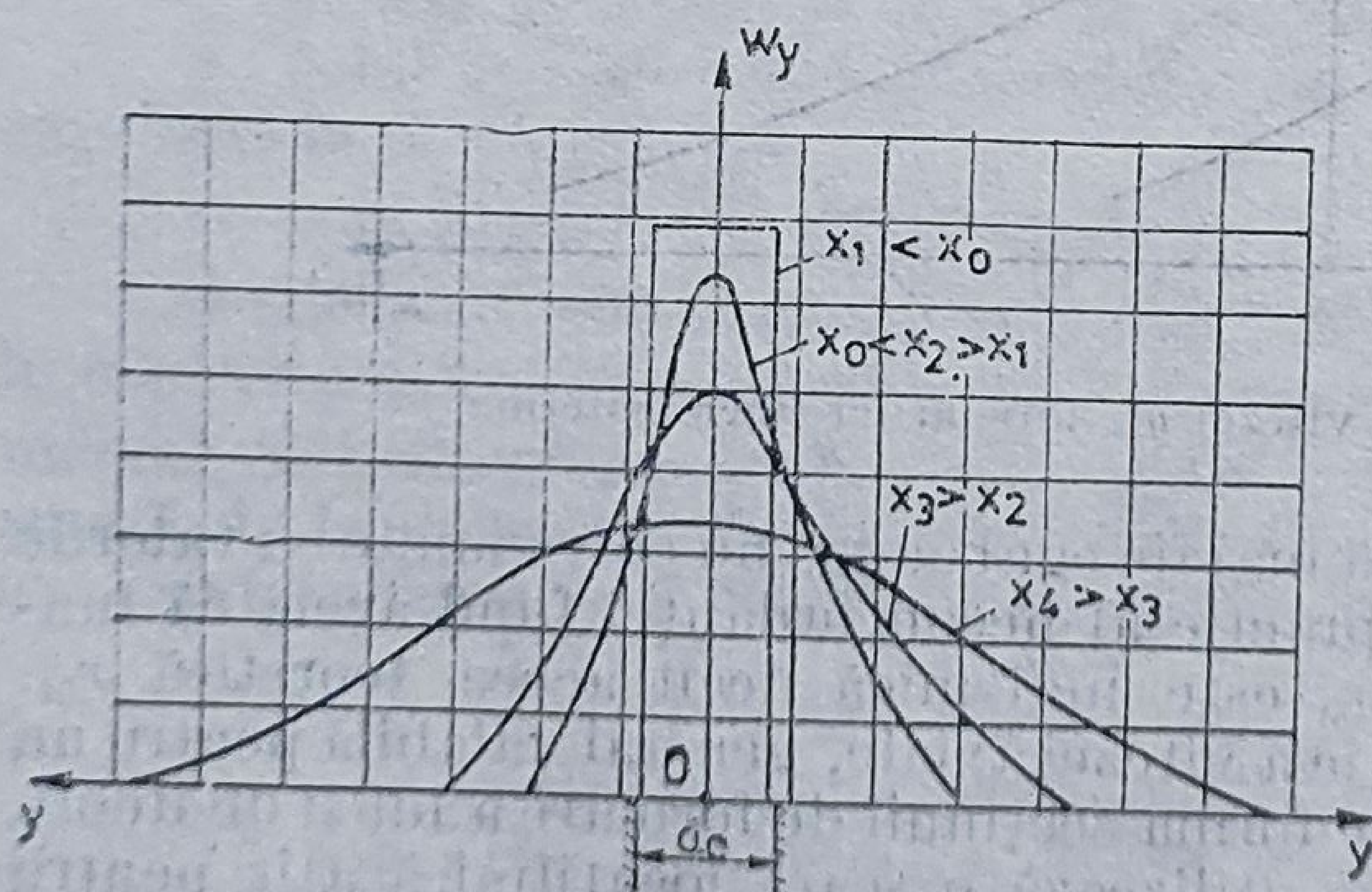


Fig. 8.6. Varația vitezei w_y într-un jet axial simetric.

și anume w_y/w_x iar drept abscisă, în locul lui y, raportul dintre valoarea ei și distanța de la axa de simetrie la acel punct în care viteza w_y este egală cu jumătate din viteza axială în secțiunea respectivă, deci valoarea $y/y_{0,5}$.

În aceste condiții, profilul vitezei adimensionale w_y/w_x este același pentru orice distanță x. O astfel de diagramă este prezentată în figura 8.7. Curba din figură arată că în puncte asemenea, aflate în orice secțiune din zona de bază a jetului, valorile adimensionale ale vitezelor sînt egale.

Notînd cu w_{x_1} și w_{x_2} vitezele în axa jetului la distyanțele x_1 și x_2 și cu w_{y_1} și w_{y_2} vitezele la ordonatele y_1 și y_2, în baza celor de mai sus există egalitatea (8.2)

$$\frac{w_{y_1}}{w_{x_1}} = \frac{w_{y_2}}{w_{x_2}} \tag{8.2}$$

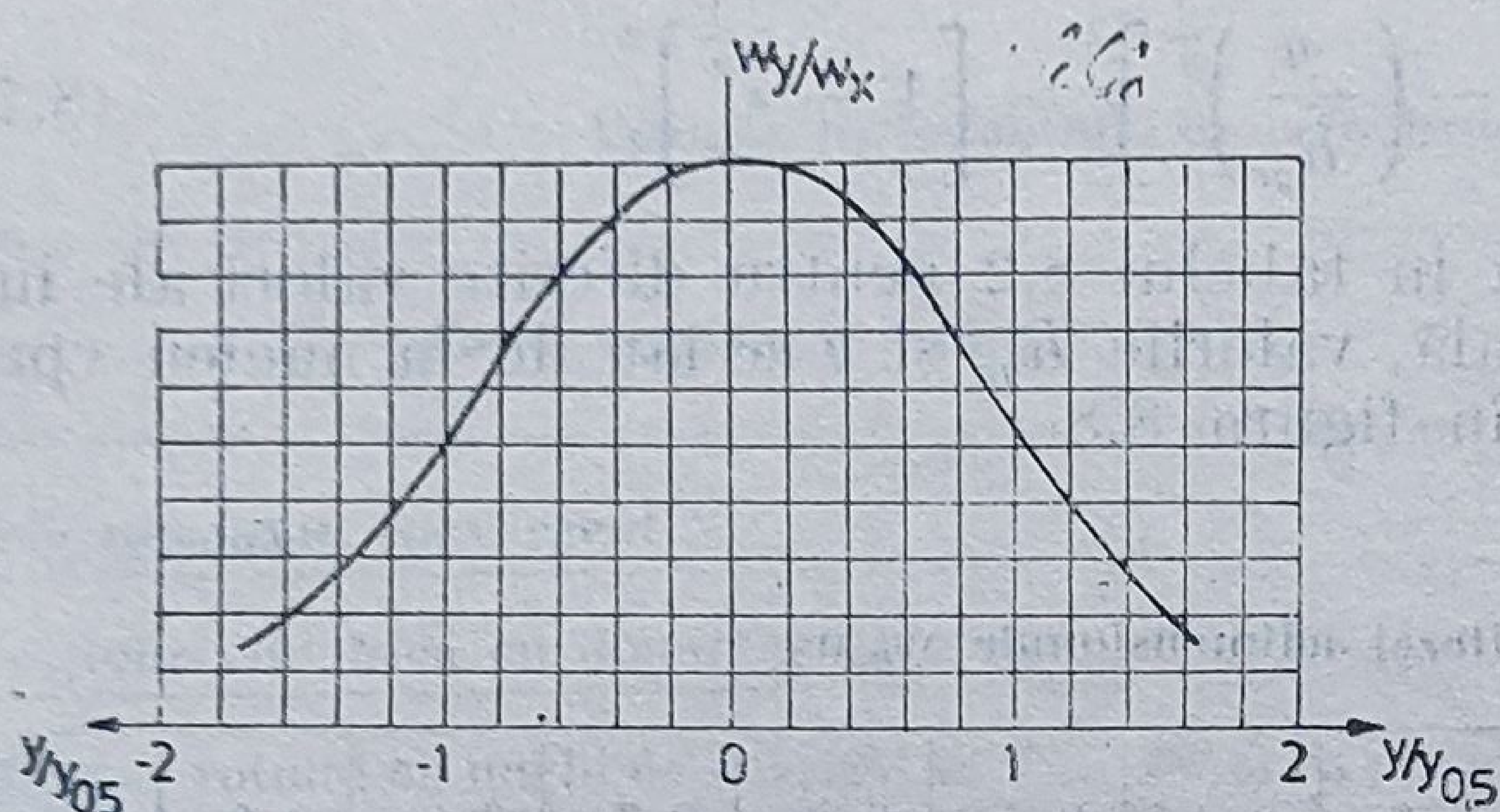


Fig. 8.7. Viteza adimensională w_y/w_x pentru un jet axial simetric

Deci se poate spune că viteza w_y depinde de distanța y de la axa jetului și de distanța x, sau respectiv de viteza w_x în axa secțiunii respective. Deci

$$w_y = f(w_x, y) \tag{8.3}$$

sau ținînd, seama de (8.1) pentru anumite condiții inițiale

$$w_y = f(w_0, x, y) \tag{8.4}$$

Deci viteza w_y se poate exprima printr-o funcție de forma (8.5)

$$\frac{w_y}{w_0} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8.5}$$

în care: w_0 este viteza medie în secțiunea de formare a jetului turbulent; x — distanța pînă la secțiunea de formare; y — distanța de la punctul de măsură pînă la axa jetului. Mărimile din relația (8.5) sînt prezentate în figura 8.8.

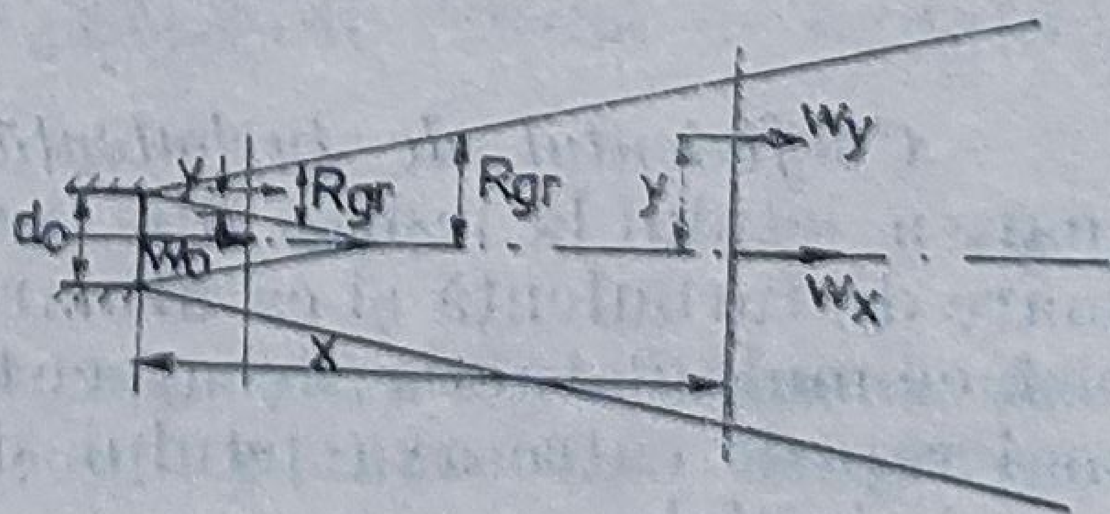


Fig. 8.8. Mărimile caracteristice ale unui jet axial simetric.

Cercetările experimentale au dus la concluzia că există o funcţie universal valabilă de forma (8.6),care exprimă viteza adimensională w_y:

$$\frac{w_y}{w_x} = f\left(\frac{y}{R_{gr}}\right) \tag{8.6}$$

în care R_{gr} este semilăţimea (sau raza) jetului, deci lăţimea stratului limită. Funcţia f a fost determinată pe cale experimentală, din care cauză diverşi cercetători dau diferite expresii pentru ea, dar rezultatele sînt foarte asemănătoare. O expresie a funcţiei (8.6) are forma

$$\frac{w_y}{w_x} = \left[1 - \left(\frac{y}{R_{gr}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 = \left[1 - \eta^{\frac{3}{2}}\right]^2 \tag{8.7}$$

Expresia (8.7) este rezolvată în tabelul 8.2 pentru diferite valori ale lui $\eta = y/R_{gr}$. Pentru zona iniţială, valorile R_{gr} şi y se iau de la nucleu spre exterior, aşa cum se arată în figura 8.8.

Tabelul 8.2.

Valorile vitezei adimensionale w_y/w_x

$\eta = \frac{y}{R_{gr}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{w_y}{w_x}$	1	0,907	0,758	0,596	0,443	0,300	0,186	0,098	0,044	0,013	0

În calculul vitezelor adimensionale w_y/w_x se utilizează integrala definită dată în relaţia (8.8), ale cărei valori sînt prezentate în tabelul 8.3

$$B = \int_0^1 \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^n \eta d\eta \tag{8.8}$$

Tabelul 8.3.

Valorile integralei B

n	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
B	0,0985	0,0640	0,0464	0,0359	0,0286

Coeficientul de turbulenţă al jetului (polul jetului). O turbulenţă mare a jetului la ieşirea din secţiunea de formare imprimă jetului un grad mare de turbulenţă şi ca urmare antrenarea mediului prin care trece jetul se face mult mai activ, deoarece turbioanele formate în stratul limită pătrund mai repede către axa jetului şi provoacă o îngustare rapidă a nucleului zonei iniţiale.

Deci lungimea zonei inițiale va fi cu atît mai mică cu cît coeficientul de turbulență va fi mai mare. Rezultă deci că pentru a realiza o bătaie mare a jetului trebuie ca la ieșirea din secțiunea de formare a lui turbulența să fie cît mai redusă.

Dacă se dorește ca amestecul dintre gazul din jet și cel din mediul înconjutător să se facă intens, ceea ce va avea ca urmare o bătaie foarte scurtă a jetului, este necesară creearea unei turbulențe mari la gura ajutajului. Coeficientul de turbulență, notat cu „a", pentru o serie de forme ale ajutajului de formare a jetului și determinate experimental, este prezentat în tabelul 8.4.

Tabelul 8.4.

Valorile coeficientului de turbulență „a"

Forma ajutajului de formare al jetului	Coeficientul de turbulență a
Ajutaj rotund convergent	0,066...0,076
Secțiune cilindrică cu diametru constant	0,08
Difuzor rotund cu unghi de evazare de 8°...10° și cu grilaj	0,09
Secțiune patrată după un cot la 90°	0,10
Secțiunea de ieșire din ventilator axial prevăzut cu jaluzele de dirijare	0,12
Ventilator axial fără carcasă	0,13
Secțiune dreptunghiulară cu laturile 1/20 și convergent pe o latură	0,11
Idem, convergent pe ambele laturi	0,1...0,12
Secțiune dreptunghiulară cu laturile 1/12	0,12
Idem cu laturile 1/10 și convergent pe ambele laturi	0,09...0,14
Ajutaje cilindrice cu palete directoare la 45°	0,20...0,25
Ajutaje plane (rectangulare) cu palete directoare la 45°	0,25...0,30

Evazarea jetului axial simetric. Ca urmare a turbulenței, componentele vitezei de deplasare a gazului în jet vor fi descompuse într-una medie constantă temporal, notată cu $\overline{w}$, și una pulsatorie (viteza de agitație), notată cu w'. Deci

$$w_x = \overline{w}_x + w'_x\,; \qquad w_y = \overline{w}_y + w'_y \tag{8.9}$$

Reprezentînd variația vitezei în timp se obține figura 8.9. Viteza de agitație este o mărime pulsatorie, cu valori cînd pozitive cînd negative și

egală cu diferența $(w - \overline{w})$. Media temporală a vitezei medii (viteza de transport) se obține cu relația (8.10), iar media temporală a vitezei de agitație cu (8.11)

$$\overline{w} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau} w(\tau) \cdot d\tau \qquad (8.10)$$

$$\overline{w}' = \frac{1}{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau} w'(\tau) d\tau = 0 \qquad (8.11)$$

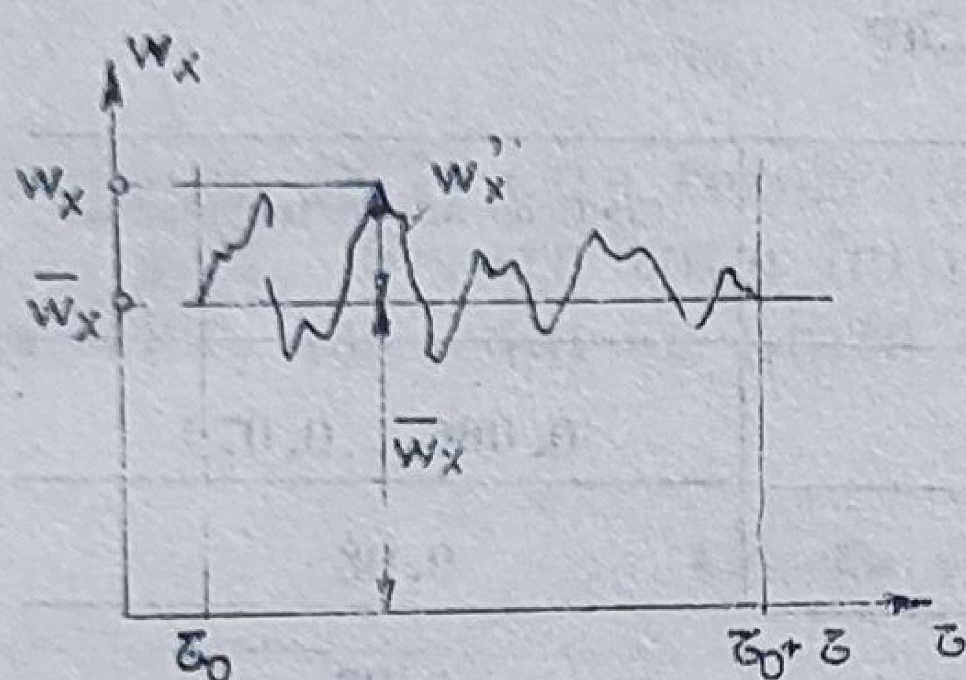


Fig. 8.9. Viteza pulsatorie w' într-un jet axial simetric.

Perioada de timp τ pentru o mișcare turbulentă trebuie luată suficient de mare, pentru ca valorile medii ale vitezei w_x sau w_y pentru intervalele de timp $\tau_0 \ldots (\tau_0 + \tau)$ și $(\tau_0 - \tau) \ldots (\tau_0 + 2\tau)$ etc. să fie practic egale, deci $\overline{w} = \text{const}$. Deci pentru o curgere permanentă, după un interval de timp oarecare componenta pulsatorie a vitezei trebuie să devină nulă, adică:

$$\overline{w}_x' = \overline{w}_y' = 0 \qquad (8.12)$$

Se notează cu l_T lungimea de amestec, definită ca distanța pe care trebuie să o parcurgă o particulă cu o viteză inițială oarecare, pînă ce diferența între această viteză și aceea a punctului unde ea a ajuns să fie egală cu viteza de pulsație din mișcarea turbulentă. Deci la o deplasare a particulei perpendicular pe direcția de curgere a jetului (axială), ea va pătrunde în acel strat care va avea o viteză ce va diferi cu $\Delta\overline{w}_x$ de aceea a stratului de unde a plecat particula, viteză dată de expresia

$$\Delta\overline{w}_x = l_T \frac{d\overline{w}_x}{dy} \qquad (8.13)$$

Contopirea particulei de fluid în masa noului strat de fluid, deci pierderea individualității ei, va da naștere unei pulsații a vitezei (unei discontinuități) a cărei valoare este $w_x' = \Delta\overline{w}_x$. Deci pulsația componentei axiale (principale) a vitezei va fi

$$w_x' \approx l_T \frac{d\overline{w}_x}{dy} \qquad (8.14)$$

Teoria turbulenţei admite o egalitate a pulsaţiilor axiale cu cele transversale, deci

$$w'_x \approx w'_y;\; w'_y = l_T \frac{d\overline{w}_x}{dy}$$

Deoarece componenta transversală a vitezei într-un jet liber este neglijabilă, se va considera de acum înainte că $\overline{w}_x < w_x$, iar lungimea de amestec în secţiune $l_T(y)$ ca o constantă. Rămîne să se determine numai legea de variaţie a lungimii de amestec pe direcţia axială, ea fiind singura luată în considerare. Deci :

$$l_T = l_T(x) \tag{8.15}$$

Funcţia (8.15) a fost determinată experimental. Generalizarea rezultatelor a fost posibilă admiţînd o similitudine a stratului limită pentru diferite secţiuni transversale ale zonei de bază a jetului. Notînd lungimea de amestec în diferite secţiuni ale jetului cu l_1, l_2 etc se poate admite egalitatea

$$\frac{l_1}{b_1} = \frac{l_2}{b_2} = \ldots = \text{const.} \tag{8.16}$$

în care b_1, b_2 etc. este $2R_{gr_1}$, $2R_{gr_2}$ etc.

Deci este suficient să se stabilească legea de creştere a lăţimii jetului în lungul axei sale, pentru a se cunoaşte legea de creştere a lungimii de amestec. Creşterea lăţimii jetului este materializată fizic prin evazarea lui şi exprimată matematic prin unghiul de divergenţă α (figura 8.3). Unghiul de divergenţă este definit ca unghiul format de generatoarele conului ce îmbracă gazul în curgere, dar o definiţie exactă a limitelor jetului este foarte greu de dat. Unii cercetători consideră ca limită a jetului înväluitoatea lui ce trece prin punctele unde viteza de deplasare axială este egală cu zero. Deoarece determinarea punctului unde o viteză este egală cu zero nu poate fi făcută experimental, alţi cercetători au admis că înväluitoarea trece prin punctele unde viteza axială este de 0,1 m/s.

Pentru determinarea lungimii de amestec este necesar determinarea lăţimii b a jetului în funcţie de distanţa x de la origine, adică a funcţiei $b = b(x)$.

Deoarece s-a văzut mai sus că evazarea jetului se datoreşte pulsaţiei transversale, se poate scrie :

$$\frac{db}{d\tau} \approx w'_y \approx l_T \frac{dw}{dy} \tag{8.17}$$

Se admite prin ipoteză o similitudine a profilului vitezelor între diferite secţiuni ale jetului :

$$\frac{dw}{dy} \approx \frac{w_x}{b} \tag{8.18}$$

Ca urmare

$$\frac{db}{d\tau} \approx \frac{l_T}{b} w_x \approx w_x \tag{8.19}$$

Pe de altă parte se poate scrie

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{db}{dx}\frac{dx}{d\tau} \tag{8.20}$$

De unde se obține

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{db}{dx} w_x \tag{8.21}$$

Din relațiile (8.20) și (8.21) se obține rezultatul căutat :

$$\frac{db}{dx} = \text{const.}\,;\;\; b = x.\,\text{const.}\,;\;\; l_T = x\cdot \text{const.} \tag{8.22}$$

Deci creșterea lățimii jetului (evazarea lui) ascultă de o lege lineară de formă simplă :

$$b = k \cdot x\,; \quad l_T = C \cdot x \tag{8.23}$$

Izotahele jetului liber. Legea exprimată de relația (8.23) este aplicabilă evazării jetului plan-axial, al celui axial simetric și în general al tuturor jeturilor libere.

Se consideră un jet de gaz izoterm cu viteza inițială w_0, așa cum se vede în figura 8.10. Peretele inferior al secțiunii de ieșire ce separă curentul de gaz ce curge cu o viteză plan paralelă w_0 de mediul înconjurător

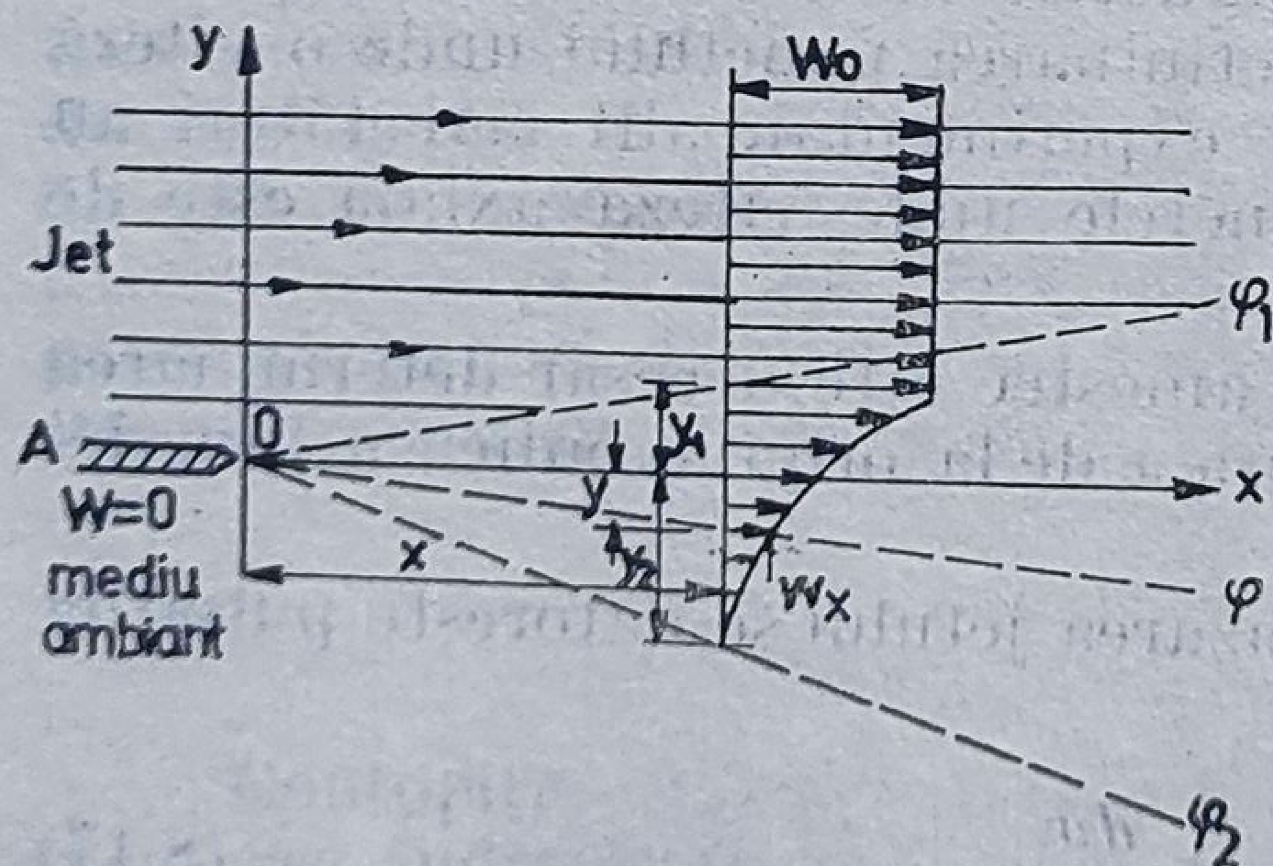


Fig. 8.10. Izotahele jetului liber.

imobil este AO. Începînd din punctul O, jetul de gaz începe să se amestece cu gazul în repaos. Se neglijează forțele gravitaționale, temperatura jetului fiind egală cu aceea a mediului înconjurător. Legea de creștere liniară a lățimii b a stratului limită, determinată mai sus ținînd seama de profilul universal al vitezelor adimensionale, spune că în lungul oricărei drepte dusă din originea coordonatelor — punctul O —

unde grosimea stratului limită este nulă, viteza trebuie să fie constantă. Pentru puncte analoage se poate scrie

$$\frac{y_1}{b_1} = \frac{y_2}{b_2} = \ldots = \text{const.} \tag{8.24}$$

Deci :

$$\frac{w_{x_1}}{w_0} = \frac{w_{x_2}}{w_0} = \ldots = \text{const.} \tag{8.25}$$

și, ținînd seama de (8.23), rezultă

$$\frac{y}{x} = \text{const. și deci } \frac{w_x}{w_0} = \text{const.} \tag{8.26}$$

Din ecuațiila (8.26) rezută că în punctele simile ale jetului, vitezele sînt egale. Deci dreptele $O - \varphi_1$, $O - \varphi$, $O - \varphi_2$, etc. din figura 8.11 sînt izotahe (linii de viteză egală). Rezultatul obținut se aplică nu numai la un curent plan paralel, așa cum se arată în figura 8.11, ci oricărui jet liber de gaz. În figura 8.11 se reprezintă izotahele într-un jet turbulent, iar în figura 8.12 izotahele exprimate adimensonal (w_y/w_x). Izotahele absolute (figura 8.11) au ca origine muchea secțiunii de formarea a jetului, iar cele adimensionale (fig. 8.12) își au originea în polul jetului reprezentat în figura 8.3.

Vitezele adimensionale sînt date de expresiile cunoscute și anume

$$\frac{w_x}{w_0} = f\left(\frac{x}{d_0}\right); \quad \frac{w_y}{w_x} = f\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{w_y}{w_0} = f\left(\frac{y}{d_0}\right)$$

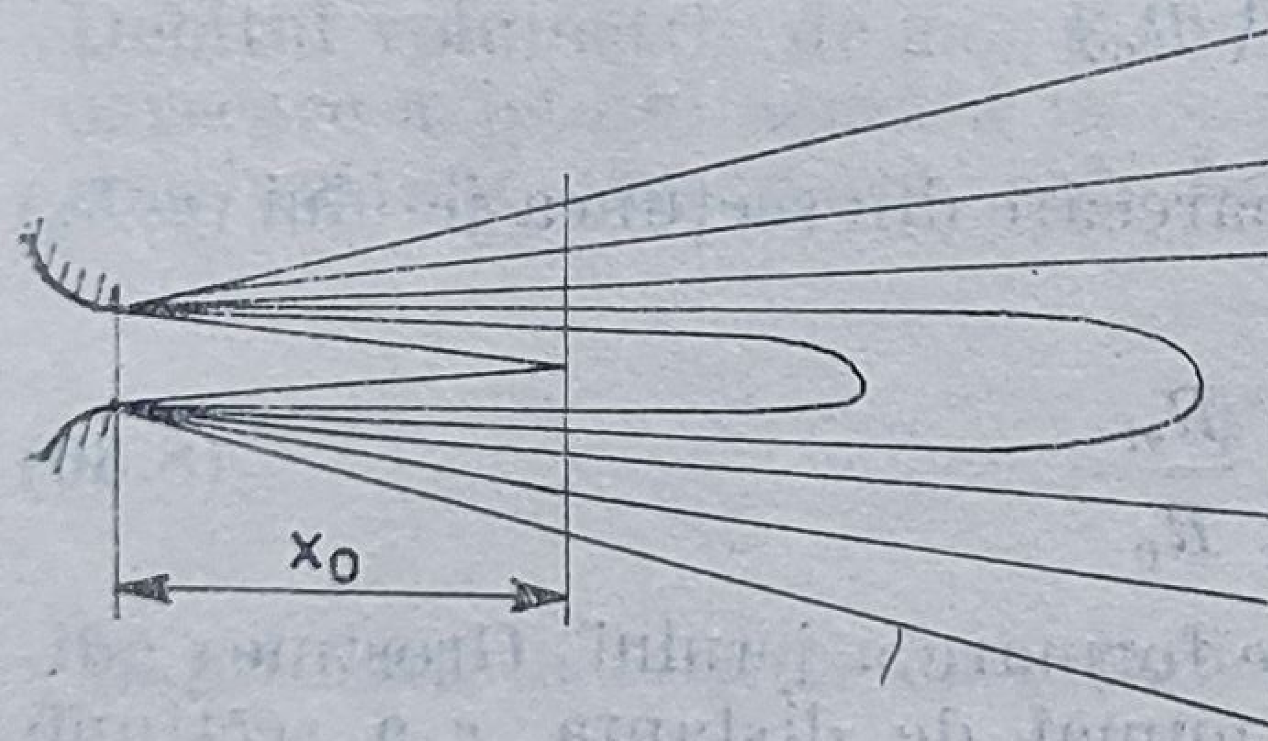


Fig. 8.11. Izotahele absolute ale unui jet liber turbulent axial.

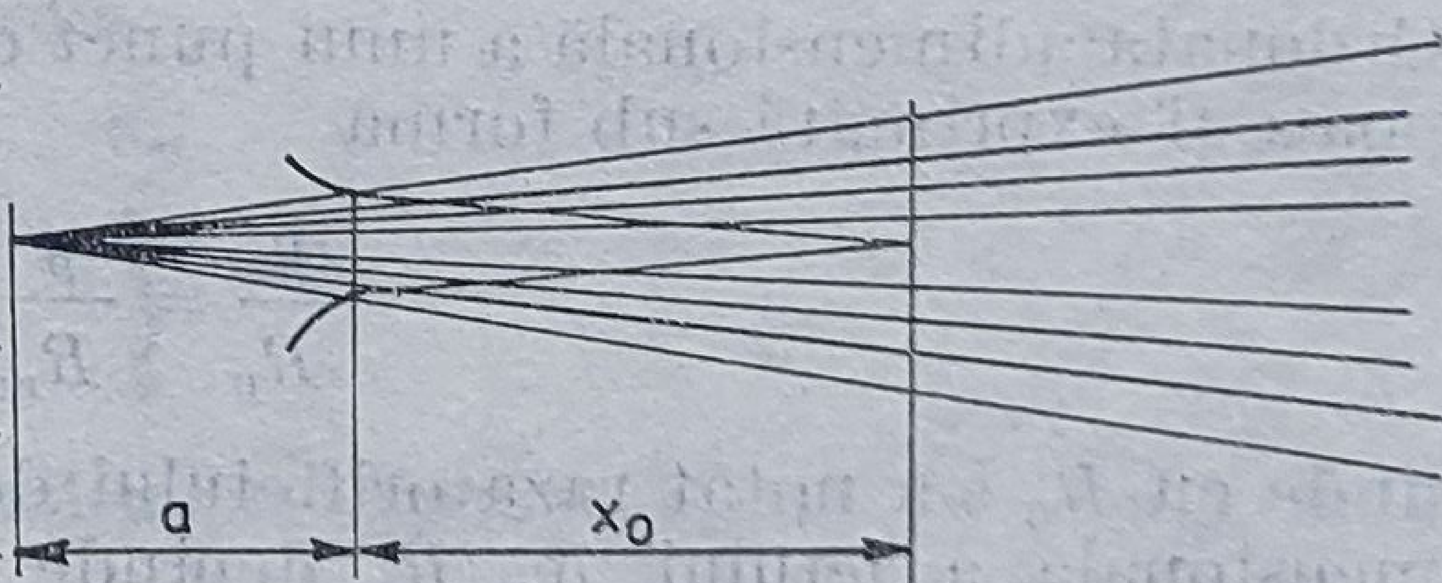


Fig. 8.12. Izotahele adimensionale ale unui jet liber axial.

8.3. CALCULUL ANALITIC AL MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE JETULUI ROTUND (AXIAL SIMETRIC) IZOTERM

Calculul analitic al mărimilor caracteristice ale jetului liber axial simetric are la bază ipotezele generale ale unui jet izoterm și anume :

— temperatura în jet este egală cu aceea a mediului ambiant ;

— presiunea frînată în orice punct al jetului este egală cu aceea a mediului ambiant;

— impulsul (cantitatea de mișcare) în toate secțiunile jetului au aceeași valoare.

Ca urmare notînd cu w viteza într-un punct oarecare, impulsul I este dat de (8.27)

$$I = \int_0^{\dot{m}} w \cdot \mathrm{d}m = \int_A \rho w^2 \cdot \mathrm{d}A. \tag{8.27}$$

în care $\mathrm{d}\dot{m}$ este masa ce traversează în unitatea de timp o suprafață elementară a secțiunii jetului; ρ — densitatea fluidului; $\mathrm{d}A$ — suprafața elementară a secțiunii transversale a jetului. Pentru simplificarea exprimării matematice se consideră un jet cilindric și ca urmare impulsul I dat de (8.27) capătă forma (8.28) cu notațiile din figura 8.3:

$$I = 2 \cdot \pi \int_0^{R_{gr}} \rho \cdot w^2 y \, \mathrm{d}y = \pi \rho_0 w_0^2 R_0^2 \tag{8.28}$$

Scrisă sub formă adimensională (8.28) pentru ipotezele de mai sus și $\rho = \text{const.}$ devine

$$2 \int_0^{\frac{R_{gr}}{R_0}} \left(\frac{w}{w_0}\right)^2 \frac{y}{R_0} \, d\left(\frac{y}{R_0}\right) = 1 \tag{8.29}$$

Ordonata adimensională a unui punct oarecare din secțunea jetului (y/R_0) poate fi exprimată sub forma

$$\frac{y}{R_0} = \frac{y}{R_{gr}} \frac{R_{gr}}{R_0} \tag{8.30}$$

unde cu R_0 s-a notat raza orificiului de formare a jetului. Grosimea adimensională a jetului R_{gr}/R_c depinde numai de distanța x a secțiunii respective de originea jetului, deci nu depinde de poziția punctului în secțiunea transversală respectivă. Introducînd notația $\eta = y/R_{gr}$ se obține pentru (8.30) expresia

$$\frac{y}{R_c} = \eta \frac{R_{gr}}{R_0} \tag{8.31}$$

De asemenea, viteza adimensională a punctului poate fi exprimată sub forma

$$\frac{w}{w_0} = \frac{w}{w_x} \frac{w_x}{w_0} \tag{8.32}$$

in care w_x/w_0 este de asemenea o funcţie numai de distanţa x. Ca urmare, expresia (8.29) capătă forma

$$\left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2 \left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 2\int_0^1 \left(\frac{w}{w_x}\right) \eta \cdot d\eta = 1 \qquad (8.33)$$

După cum se vede, sub integrală s-a obţinut relaţia (8.8) pentru care $n = 2$ are valoarea 0,0464 (tabelul 8.3), deci (8.33) devine (8.34) care exprimă relaţia de calcul a razei jetului R_{gr} (sau a celei adimensionale R_{gr}/R_0) :

$$\left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2 \left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 \cdot 2 \times 0{,}0464 = 1 \qquad (8.34)$$

din care se obţine grosimea R_{gr} la distanţa $x > x_0$

$$\frac{R_{gr}}{R_0} = 3{,}3\frac{w_0}{w_x} \quad \Rightarrow \quad R_{gr} = 3{,}3\ R_0\ \frac{w_0}{w_x} \qquad (8.35)$$

Relaţia (8.35) este aplicabilă numai pentru zona de bază a jetului, pentru zona de tranziţie ea căpătînd forma (8.36), deoarece în orice secţiune aflată la o distanţă $x < x_0$, viteza w_x în axa este egală cu viteza iniţială w_0. Ca urmare raza adimensională a zonei de tranziţie are o valoare constantă :

$$\frac{R_{gr}}{R_0} = 3{,}3\ ; \quad R_{gr} = 3{,}3 \cdot R_0 \qquad (8.36)$$

Debitul volumetric de gaz $\dot{V}$ (exprimat în m³/s) ce trece printr-o secţiune oarecare a jetului aşezată la distanţa $x > x_0$ se calculează cu ecuaţia de continuitate exprimată sub forma

$$\dot{V} = \int_0^{R_{gr}} wy\mathrm{d}y \qquad (8.37)$$

Exprimată în funcţie de viteza adimensională w/w_x, relaţia (8.37) devine

$$\dot{V} = 2\,\pi\, w_x\, R_{gr}^2 \int_0^1 \frac{w}{w_x}\,\eta \cdot d\eta$$

$$\dot{V} = 2\pi R_0^2 \cdot w_0 \frac{w_x}{w_0}\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 \int_0^1 \frac{w}{w_x}\,\eta \cdot d\eta \qquad (8.38)$$

în care $\pi R_0^2 w_0$ este debitul iniţial de gaz ce iese din gura de formare a lui şi notat cu $\dot{V}_0$:

$$\dot{V}_0 = \pi R_0^2 w_0$$

Din relaţia (8.35) se obţine

$$\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 = 10{,}8\left(\frac{w_0}{w_x}\right)^2 \tag{8.39}$$

iar valoarea integralei este dată în tabelul 8.3 :

$$B = \int_0^1 \frac{w}{w_n}\,\eta \cdot d\eta = 0{,}0985 \tag{8.40}$$

Înlocuind valorile de mai sus în (8.38) se obţine debitul de gaz ce trece prin secţiunea din jet aşezată la distanţă $x > x_0$ (în zona de bază) cu relaţia (8.41) :

$$\dot{V} = 2V_0 \frac{w_x}{w_0} 10{,}8\left(\frac{w_0}{w_x}\right)^2 \cdot 0{,}0985 \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\dot{V} = V_0 2{,}13 \frac{w_0}{w_x} \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\frac{\dot{V}}{\dot{V}_0} = 2{,}13 \frac{w_0}{w_n} \tag{8.41}$$

Debitul de gaz ce trece prin zona de tranziţie, unde $x = x_0$, va fi însă dat de relaţia

$$\dot{V} = \dot{V}_0 2{,}13 \frac{w_0}{w_x} \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right] \tag{8.42}$$

Deci debitul de gaz aspirat de un jet pe toată zona iniţială (pînă la secţiunea de tranziţie) din mediul înconjurător, va fi

$$\dot{V} - \dot{V}_0 = 1{,}13\ \dot{V}_0 \tag{8.43}$$

iar debitul total de gaz aspirat de jet pînă într-o secţiune oarecare $x > x_0$ din mediul înconjutăror va fi

$$\dot{V} - \dot{V}_0 = \dot{V}_0 \left[2{,}13 \frac{w_0}{w_x} - 1\right] \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right] \tag{8.44}$$

În figura 8.13 se prezintă razele jetului în diferite secţiuni, iar în figura 8.14 debitele de gaz ce trec prin ele.

Viteza medie de curgere a gazului printr-o secţiune oarecare din jetul de gaz se calculează cu ecuaţia de continuitate aplicată secţiunii A respective :

$$\dot{V} = A \cdot w_{med}\ ;\quad w_{med} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot R_{gr}^2} \tag{8.45}$$

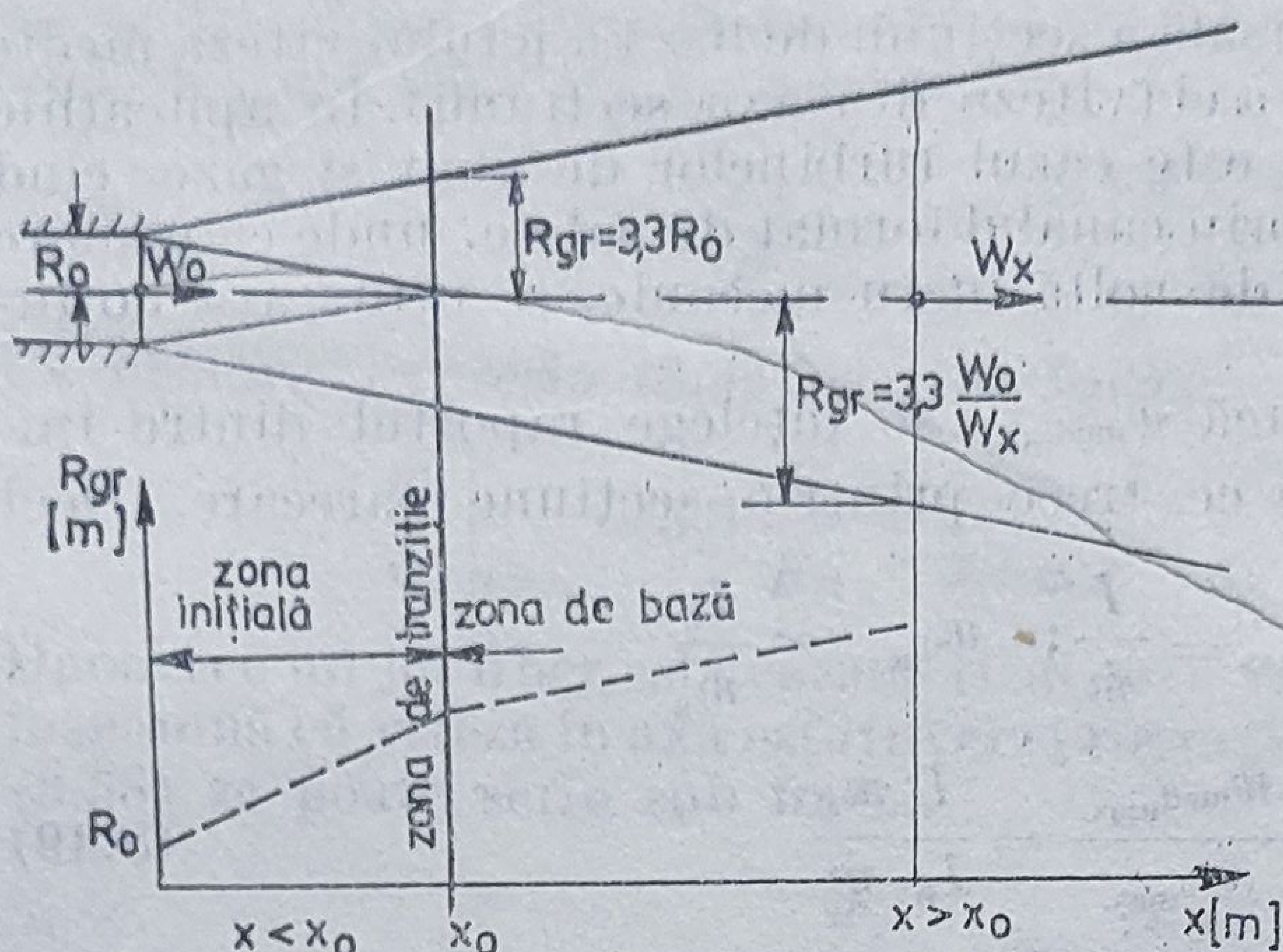


Fig. 8.13. Evazarea unui jet liber axial simetric.

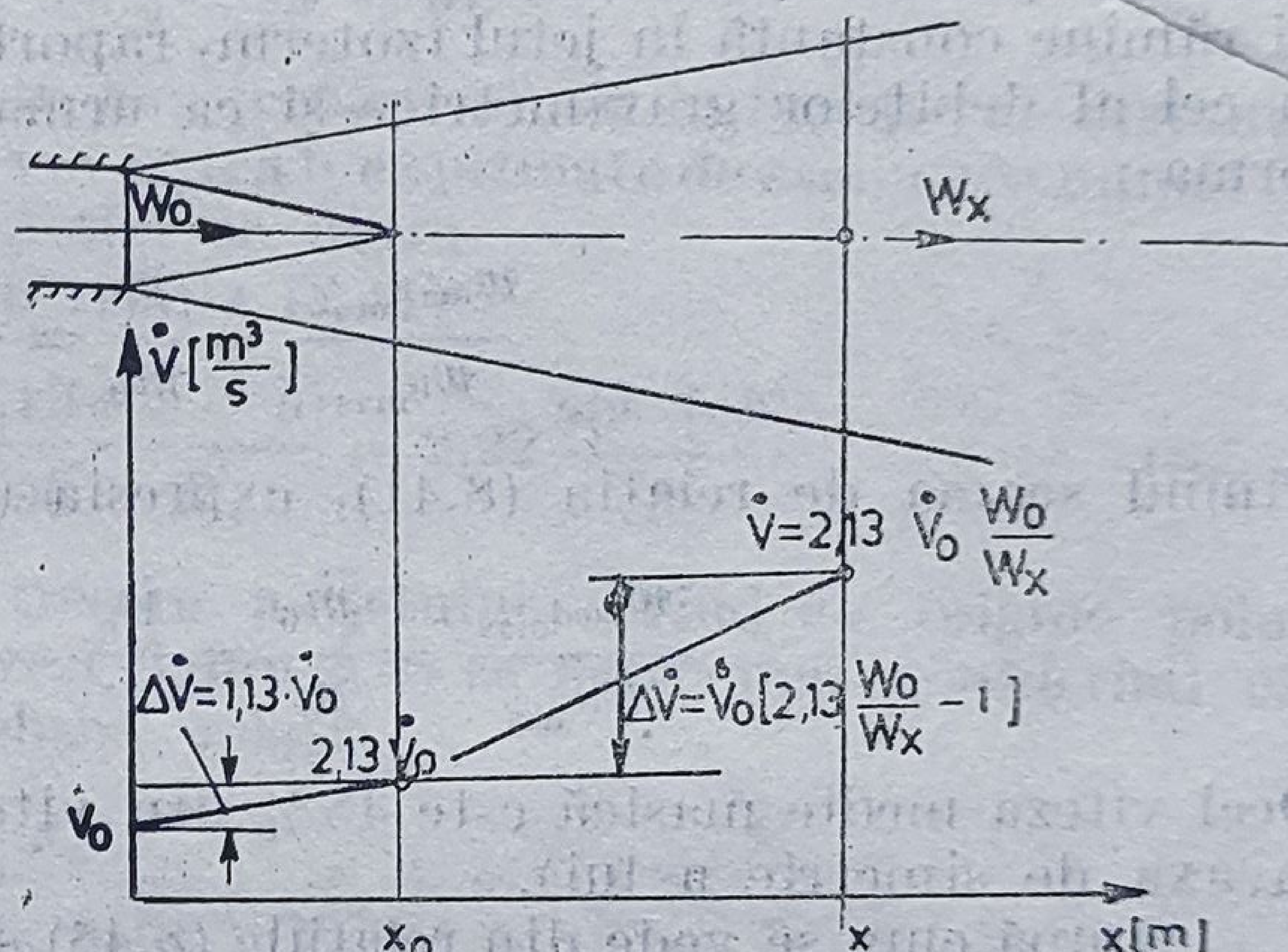


Fig. 8.14. Debitul de gaz în secțiunile unui jet liber axial smetric.

Pentru secțiunea de formare a jetului și o curgere turbulentă, viteza medie este w_0; aplicînd și acesteia ecuația de continuitate se obține

$$\dot{V}_0 = A_0 w_0\,; \quad w_0 = \frac{\dot{V}_0}{A_0} = \frac{\dot{V}_0}{\pi R_0^2} \tag{8.46}$$

Viteza medie adimensională pentru secțiunea în care jetul are o grosime a cărei rază este R_{gr} va fi

$$\frac{w_{med}}{w_0} = \frac{\dot{V}}{\dot{V}_0}\frac{A_0}{A} = \frac{\dot{V}}{\dot{V}_0}\left(\frac{R_0}{R_{gr}}\right)^2 \tag{8.47}$$

Ținînd seama de relațiile (8.35) și (8.41), expresia (8.47) devine

$$\frac{w_{med}}{w_0} = 2{,}13\,\frac{w_0}{w_x}\left[\frac{1}{3{,}3}\,\frac{w_x}{w_0}\right]^2$$

$$w_{med} = 0{,}2\; w_x \tag{8.48}$$

Deci în orice secțiune transversală a secțiunii de bază a jetului viteza medie este 0,2 din viteza maximă a ei (viteza din axa secțiunii). În aplicațiile energetice ale jeturilor, cum este cazul turbinelor de abur și gaze, cînd jetul ce iese din ajutaj trece prin canalul format de palete, unde ca urmare a impulsului cedat pereților dezvoltă lucru mecanic, se utilizează noțiunea de *viteză medie masică*.

Prin viteză medie masică $w_{med_{mas}}$ se înțelege raportul dintre impulsul I și debitul de gaz $\dot{m}$ ce trece printr-o secțiune oarecare. Deci

$$w_{med_{mas}} = \frac{I}{\dot{m}}; \quad w_{0_{mas}} = \frac{I_0}{\dot{m}_0}$$

sau

$$\frac{w_{med_{mas}}}{w_{0_{mas}}} = \frac{I}{I_0}\frac{\dot{m}_0}{\dot{m}} \tag{8.49}$$

Deoarece pentru toate secțiunile jetului $I = \text{const.}$, iar densitatea gazului rămîne constantă în jetul izoterm, raportul debitelor masice este egal cu cel al debitelor gravimetrice și ca urmare (8.49) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{w_{med_{mas}}}{w_{0_{mas}}} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\dot{V}}{\dot{V}_0} \tag{8.50}$$

Ținînd seama de relația (8.41), expresia (8.50) devine

$$\frac{w_{med_{mas}}}{w_{0_{mas}}} = \frac{\dot{m}_0}{\dot{m}} = \frac{\dot{V}_0}{\dot{V}} = \frac{1}{2{,}13}\,\frac{w_x}{w_0} \tag{8.51}$$

Deci viteza medie masică este 48% din viteza maximă a jetului (viteza în axa de simetrie a lui).

După cum se vede din relațiile (8.48) și (8.51), viteza medie masică este de 2,4 ori mai mare decît viteza medie gravimetrică.

Caracteristicile jetului obținute pînă acum se referă numai la secțiuni ale zonei de bază a lui, iar pentru determinarea lor trebuie să se cunoască numai viteza în axa secțiunii respective și a celei inițiale. Dar viteza în centrul unei secțiuni transversale oarecare depinde de distanța x de la originea jetului. Determinarea analitică a vitezei w_x (din axă) în funcție de distanța $(x + b)$ (figura 8.3) necesită cunoașterea caracteristicii „a" care nu este altceva decît turbulența dată de tabelul 8.4 și care nu se poate determina decît experimental.

Notînd evazarea jetului cu φ_{gr} (tangenta unghiului $\alpha/2$) se poate scrie relația (8.52) găsită experimental, ca dînd rezultatele cele mai exacte în cazul gazului perfect:

$$\varphi_{gr} = \left.\frac{R_{gr}}{a(x + b)}\right|_{x > x_0} \tag{8.52}$$

Din expresia (8.52) se vede că φ_{gr} este în fond ordonata adimensională a graniței jetului. Pentru jetul axial simetric izoterm s-a găsit experimental

$\varphi_{gr} \approx 3,4$. Pentru această valoare se obţine grosimea adimensională R_{gr} a unei secţiuni oarecare cu relaţia

$$\left.\frac{R_{gr}}{R_0}\right|_{x>x_0} = \frac{3,4a(x+b)}{R_0} \tag{8.53}$$

Ca urmare, expresia (8.35) capătă forma

$$\left.\frac{w_x}{w_0}\right|_{x>x_0} = 3,3\,\frac{R_0}{R_{gr}} = \frac{3,3}{3,4}\,\frac{R_0}{a(x+b)} = 0,96\,\frac{R_0}{a(x+b)} \tag{8.54}$$

Deoarece un jet liber este caracterizat prin valorile cunoscute R_0, a şi w_0, înseamnă că viteza în axă este invers proporţională cu distanţa x, deoarece (8.53) se poate scrie sub forma

$$\left.w_x\right|_{x>x_0} = \frac{\text{const.}}{(x+b)}$$

Cunoscînd expresia vitezei w_x în axa jetului numai în funcţie de distanţa x, toate celelalte caracteristici vor putea fi exprimate de asemenea numai în funcţie de această distanţă. Astfel se obţin :

1) debitul volumetric (din relaţia (8.41)

$$\left.\frac{\dot V}{\dot V}\right|_{x>x_0} = \frac{2,13}{0,96}\,\frac{a(x+b)}{R_0} = 2,22\,\frac{a(x+b)}{R_0} \tag{8,55}$$

2) abscisa secţiunii de trecere a jetului, avînd ca origine polul jetului ; deci distanţa $x_0 + b$ (vezi figura 8.3) se determină considerînd că în relaţia (8.53) $w_x = w_0$. Se obţine relaţia

$$1 = 0,96\,\frac{R_0}{a(x_0+b)}\ ;\quad x_0 + b = 0,96\,\frac{R_0}{a} \tag{8.56}$$

3) polul b al jetului (figura 8.3), care se determină din relaţiile (8.53), (8.56) şi (8.36). Considerînd că unghiul de divergenţă al jetului are aceeaşi valoare atît în zona iniţială cît şi în cea de bază, se poate scrie egalitatea rapoartelor geometrice

$$\frac{R_0}{ab} = \frac{3,3R_0}{a(x_0+b)} \tag{8.57}$$

Deci din expresia (8.57) se obţine (8.58) :

$$\frac{ab}{R_0} = 0,29 \tag{8.58}$$

4) lungimea zonei iniţiale x_0 va fi

$$\frac{ax_0}{R_0} = 0,96 - 0,29 = 0,67 \tag{8.59}$$

Relaţiile de mai sus, exprimate numai în funcţie de abscisa x, sînt valabile numai pentru zona de bază. Polul jetului (distanţa b) nu este calculabilă cu exactitate, ea trebuind să fie determinată experimental (vizualizarea şi apoi fotografierea jetului). Ca urmare, în tehnică, mărimile ce trebuie calculate se referă la distanţa x de la gura ajutajului de formare a jetului pînă la secţiunea respectivă. Deci relaţiile de calcul vor trebui fie corectate, adaptarea lor la abscisa x avînd ca origine secţiunea ajutajului făcîndu-se ţinînd seama de relaţia

$$\frac{a(x+b)}{R_0} = \frac{ax}{R_0} + \frac{ab}{R_0} = \frac{ax}{R_0} + 0,29. \tag{9.60}$$

Ca urmare, relaţiile (8.53) şi (8.55) devin (8.61) şi respectiv (8.62):

$$\frac{w_x}{w_0} = \frac{0,96}{\frac{ax}{R_0} + 0,29} \tag{8.61}$$

$$\frac{\dot{V}}{\dot{V}_0} = 0,22\left(\frac{a \cdot x}{R_0} + 0,29\right) \tag{8.62}$$

Ţinînd seama de relaţia (8.52) unghiul α de evazare al jetului se obţine cu relaţia

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R_{gr}}{x+b} = a\,\frac{R_{gr}}{a(x+b)} = a\varphi_{gr} \tag{8.63}$$

Valoarea coeficientului de turbulenţă „a" se poate lua sau din tabelul 8.4, în funcţie de orificiul de formare a jetului, sau pentru gurile de formare cu turbulenţă naturală (cilindrice sau rectangulare), în funcţie de profilul vitezei în secţiunea ajutajului respectiv (secţiunea „O"). În tabelul 8.5, cu notaţiile din figura 8.15, se dau valorile coeficientului de turbulenţă „a" pentru diferite profile ale vitezei iniţiale. Deoarece valoarea medie a lui φ_{gr} pentru jeturile de gaze perfecte este de 3,4 unghiul α are valori între 7° şi 14°.

Tabelu 8.5.

Gradul de turbulenţă „a" în funcţie de profilul vitezei în secţiunea iniţială

$\frac{w_{max_0}}{w_{med_0}}$	1,0	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
a	0,066	0,069	0,072	0,075	0,078	0,082

În figura 8.16 este prezentată o diagramă pentru calculul vitezei adimensionale w_x/w_0 funcţie de ax/R_0, întocmită cu relaţia (8.61).

Pentru jeturile ale căror guri de formare sînt prevăzute cu dispozitive pentru crearea unei turbulențe artificiale, cum ar fi de exemplu grătare, clapete etc., valoarea coeficientului de turbulență „a" se ia din tabelul 8.5 sau se determină experimental pentru fiecare caz în parte.

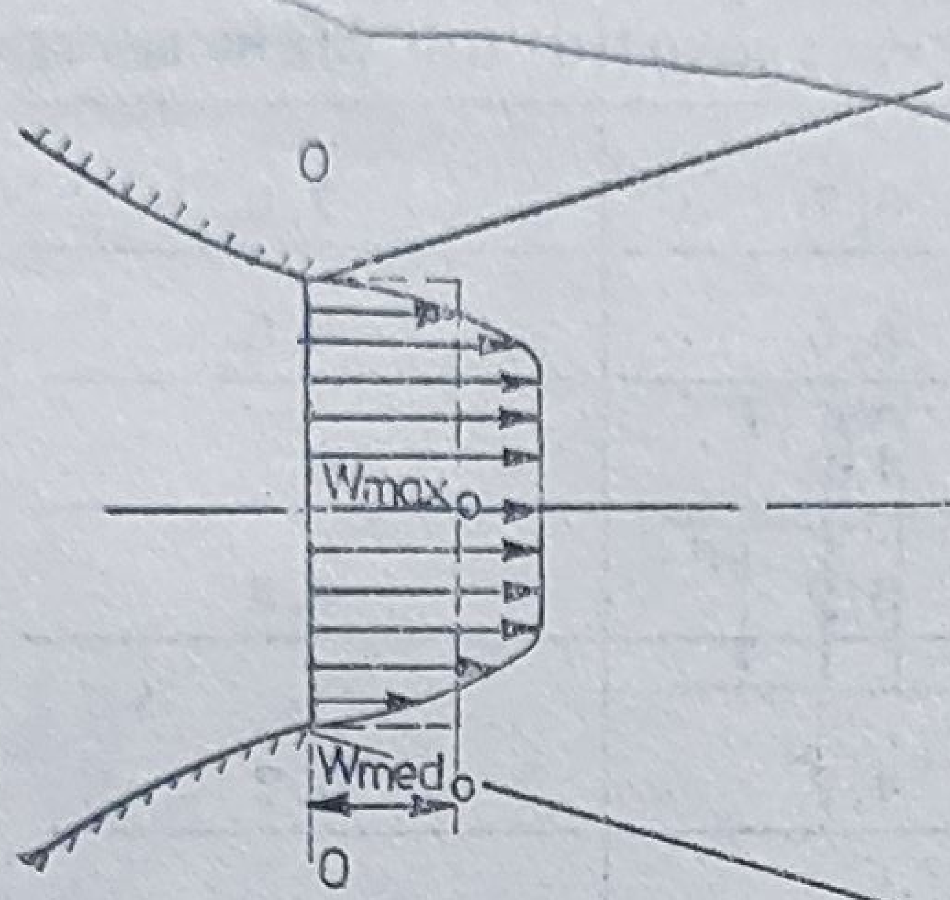


Fig. 8.15. Vitezele caracteristice în secțiunea inițială a unui jet liber.

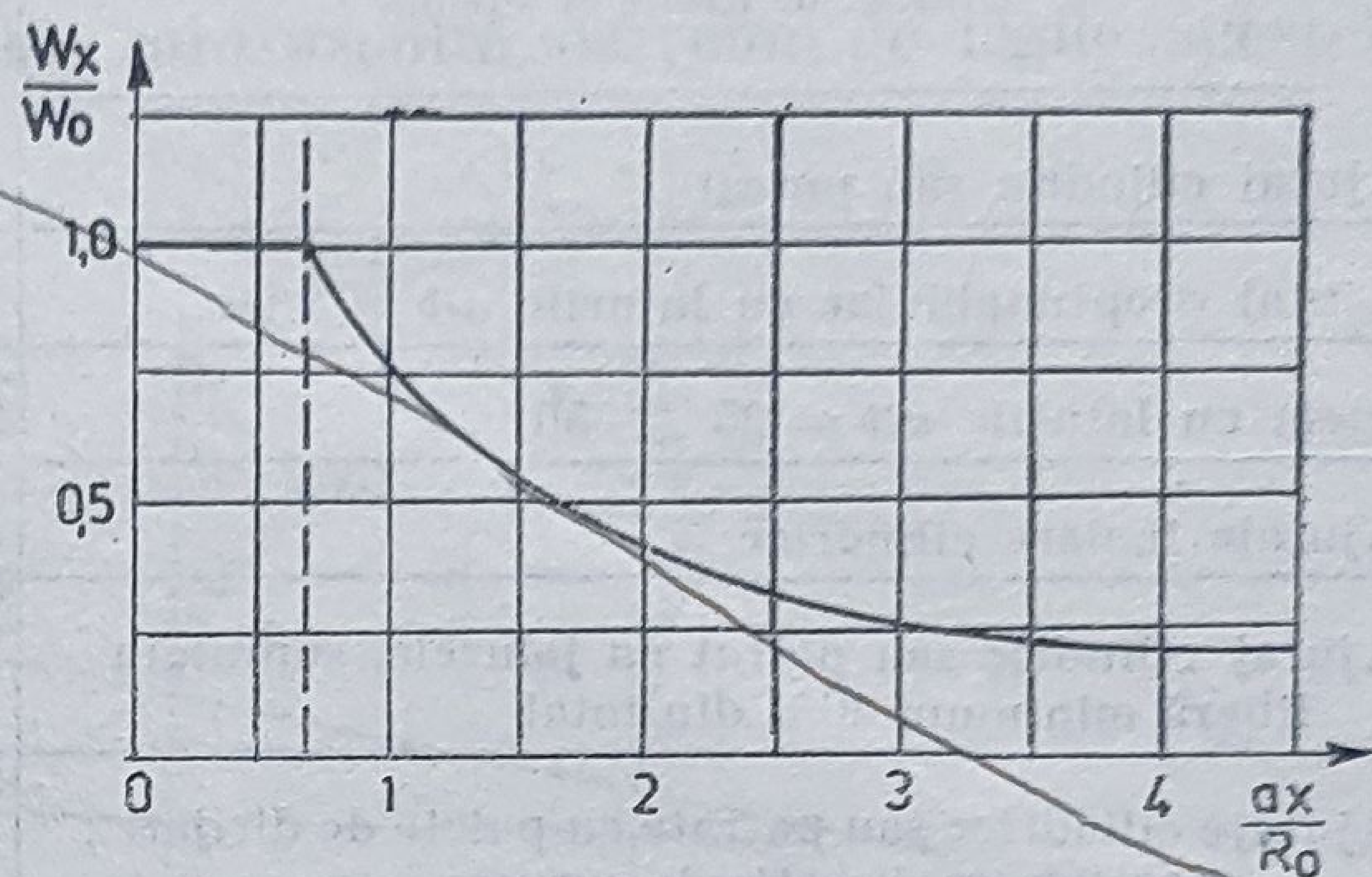


Fig. 8.16. Viteza adimensională w_x/w_0 pentu un jet liber izoterm.

Lungimea celor trei zone caracteristice ale jeturilor (inițială, de tranziție și de bază) prezintă o importanță deosebită, avînd în vedere faptul că relațiile analitice de calcul sînt valabile numai pentru zona de bază. Pe de altă parte, bătaia jetului prezentînd o importanță deosebită în aplicațiile tehnice, este necesară și cunoașterea lungimii zonei inițiale și de tranziție a lui. Pentru jetul rotund, lungimea zonei inițiale, determinată experimental, se încadrează, pentru viteze inițiale w_0 subsonice cu cifre Mach cuprinse între $0 < M_0 < 0,6$, între valorile

$$3D_0 < x_0 < 5,5\,D_0 \tag{8.64}$$

în care D_0 este diametrul ajutajului de formare.

Zona de tranziție a jetului x_{tr} în realitate nu este un plan singular, ci are o lungime destul de mare, ea fiind în general egal cu 1/3 ... 1/1,15 din x_0.

Zona de bază a jetului pentru $M_0 < 0,6$ are lungimi ce variază între $25D_0 - 100\,D_0$. Jetul însă, poate fi și calculat analitic cu relația (8.61), admițînd că bătaia jetului x_{lim} corespunde unei viteze axiale $w_x = 0,25$ m/s. În aceste condiții, relația (8.61) capătă forma

$$\frac{w_x}{w_0} = \frac{0,96}{\dfrac{a \cdot x_{lim}}{R_0} + 0,29} = \frac{0,25}{w_0}$$

Determinînd astfel bătaia jetului x_{lim} din (8.65), lungimea zonei de bază notată cu x_b, va fi atunci dată relația

$$x_b = x_{lim} - (x_0 + x_{tr}) \tag{8.66}$$

Tabelul 8.6

Valoarea coeficientului C_1

Orificiul de frînare al jetului	C_1 pentru	
	$2,5 < w_0 < 5$ m/s	$10 < w_0 < 50$ m/s
Ajutaj cilindric sau patrat	5,7	7,0
Ajutaj dreptunghiular cu laturile $a/b = 1/20$	6,5	6,5
Idem cu laturile $a/b = 25 \ldots 50$	4,9	6
Ajutaje inelare cilindrice	3,9	4,8
Ajutaj cilindric sau patrat cu jaluzele, suprafața liberă minimum 40% din total	4,7	5,7
Ajutaje cilindrice sau patrate cu palete de dirijare : — paralele cu direcția de curgere	5,5	5,5
— înclinate la 40° pe curent	3,5	3,5
— înclinate la 60° pe curent	2,5	2,5
— înclinate la 90° pe curent	2,0	2,0

Pentru determinatea bătăii jetului $x_{\lim}$ se poate folosi și relația (8.67) stabilită experimental :

$$x_{\lim} = 3{,}54 w_0 D_0 C_1 \quad [\mathrm{m}] \tag{8.67}$$

în care valoarea constantei C_1 este dată în tabelul 8.6.

Viteza axială în zona inițială rămîne egală cu viteza inițială ($w_x = w_0$). În zona de tranziție, viteza axială se poate calcula cu relația

$$\frac{w_x}{w_0} = \sqrt{\frac{C_1 \cdot D_0}{x}} \tag{8.68}$$

8.4. CALCULUL ANALITIC AL MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE JETULUI PLAN IZOTERM

Prin jet plan se definește jetul al cărui orificiu de formare este rectangular (pătrat sau dreptunghic).

S-a constatat experimental că jeturile ale căror orificiu de formare este patrat sau dreptunghiular dar cu raportul laturilor $h_0/b_0 < 1/10$ se comportă ca și jetul cilindric, adică este axial simetric, ascultă de aceleași legi, iar relațiile de calcul a mărimilor caracteristice sînt aceleași.

În cazul cînd raportul laturilor $h_0/b_0 > 1/10$ (practic mai mare de 1/12) evazarea jetului se face numai pe direcția laturii mai mari, pe cealaltă direcție rămînînd la aceeași grosime.

În figura 8.17 se prezintă fenomenul de evazare a unui jet cu laturile $h_0/b_0 > 1/12$. După cum se vede, simetria evazării nu mai este respectată. De asemenea nici profilul variației vitezei w_y nu mai este același pe cele două direcții. Ca urmare, jetul plan cu laturile $h_0/b_0 > 1/12$ se consideră ca jet numai pe direcția h; pe direcția b el este considerat o curgere unidirecțională cu viteza w_b variabilă, care ascultă oarecum de legile acesteia

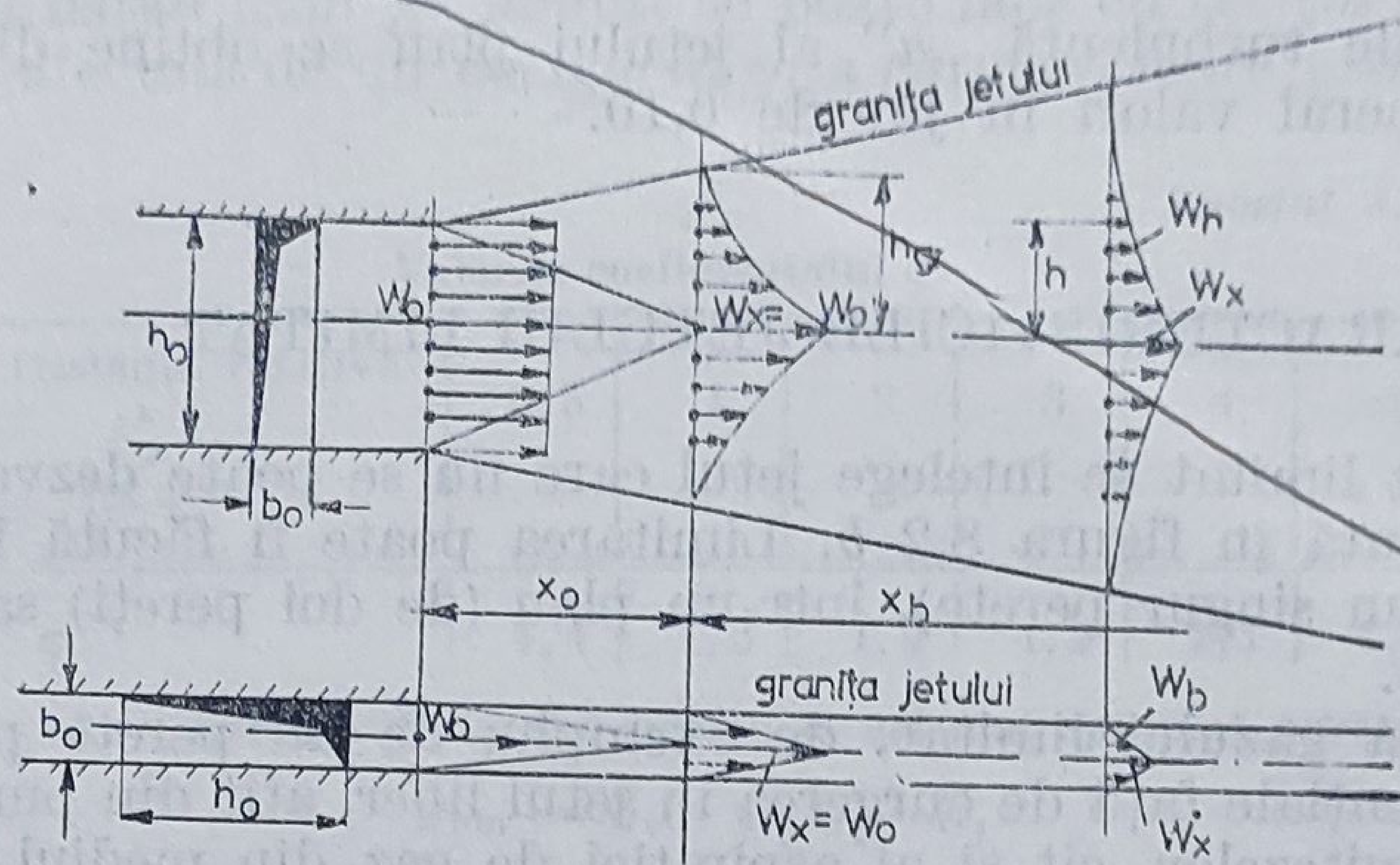


Fig. 8.17. Jet plan izoterm.

văzute mai înainte. Deci toate cele ce se vor prezenta mai jos se referă numai la direcția h. Bineînțeles că viteza w_x în axă va avea aceeași valoare pentru ambele direcții, dar legea de variație a vitezei w_h va diferi de aceea a vitezei w_b. Studiul jeturilor plane se poate face numai experimental, relațiile date mai jos avînd numai un caracter informativ limitat.

Ecuația cantității de mișcare pentru o secțiune oarecare așezată la distanța $x > x_0$ are forma (8.69) cu notațiile din figura 8.17:

$$I = w_x^2 \cdot x \int_0^{\frac{h_{gr}}{x}} \frac{w_h}{w_x} \mathrm{d}\left(\frac{h}{x}\right) = \text{const.} \tag{8.69}$$

Integrala din relația (8.69) este constantă deoarece $w_h = w_x$:

$$\int_0^{\frac{h_{gr}}{x}} \left(\frac{w_h}{w_x}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{h}{x}\right) = \text{const.} \tag{8.70}$$

Deci legea de variație a vitezei axiale în lungul jetului plan depinde tot de distanța x, ca și la jetul rotund, numai că scăderea ei este mai lentă, fiind funcție de $\sqrt{x}$, așa cum se vede din (8.71):

$$w_x = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}} \tag{8.71}$$

Viteza adimensională w_x se poate calcula cu relaţia (8.72), similară cu relaţia jetului rotund :

$$\frac{w_x}{w_0} = \frac{1,2}{\sqrt{\frac{ax}{h_0} + 0,41}} \tag{8.72}$$

Coeficientul de turbulenţă „a" al jetului plan se obţine din tabelul 8.4 şi are în general valori în jur de 0,10.

8.5. CARACTERISTICILE JETULUI LIMITAT

Prin jet limitat se înţelege jetul care nu se poate dezvolta liber, aşa cum se prezintă în figura 8.2 *b*. Limitarea poate fi făcută într-o singură direcţie (de un singur perete), într-un plan (de doi pereţi) sau spaţial (de patru pereţi).

Curgerea gazului limitat, de exemplu, de un perete plan, duce la modificări esenţiale faţă de curgerea în jetul liber, atît din punct de vedere al profilului vitezelor, cît şi al aspiraţiei de gaz din mediul înconjurător, totodată axa jetului fiind deviată. Devierea jetului spre perete (efectul Coandă) face ca relaţiile de calcul prezentate mai sus ale jetului rotund, să nu mai poată fi aplicate acestui caz. Cercetările experimentale au arătat că evazarea jetului limitat, chiar numai de un singur perete, este mult mai mică decît a celui liber. În figura 8.18 se prezintă un jet limitat de un perete. După cum se vede din figura 8.18, jetul limitat de un perete va devia către acesta. Ca urmare profilul vitezelor se deformează deoarece absorbţia de gaz din mediul înconjurător are loc numai din zona sau zonele nelimitate; în partea limitată, panta de scădere a vitezei este mult mai mare. În cazul cînd jetul este limitat de doi pereţi sau mai mulţi aşa cum se arată în figura 8.19, jetul îşi păstrează caracterul specific numai pînă cînd gra-

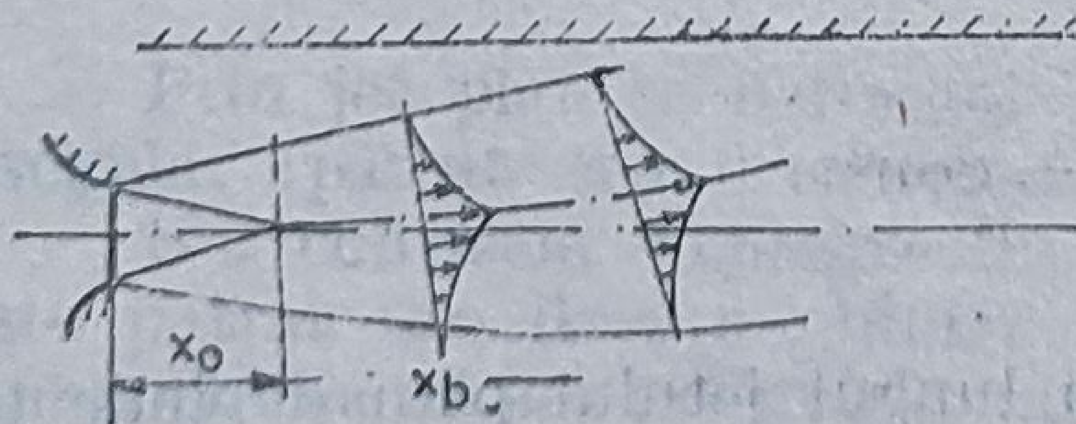


Fig. 8.18. Jet limitat de un perete axial.

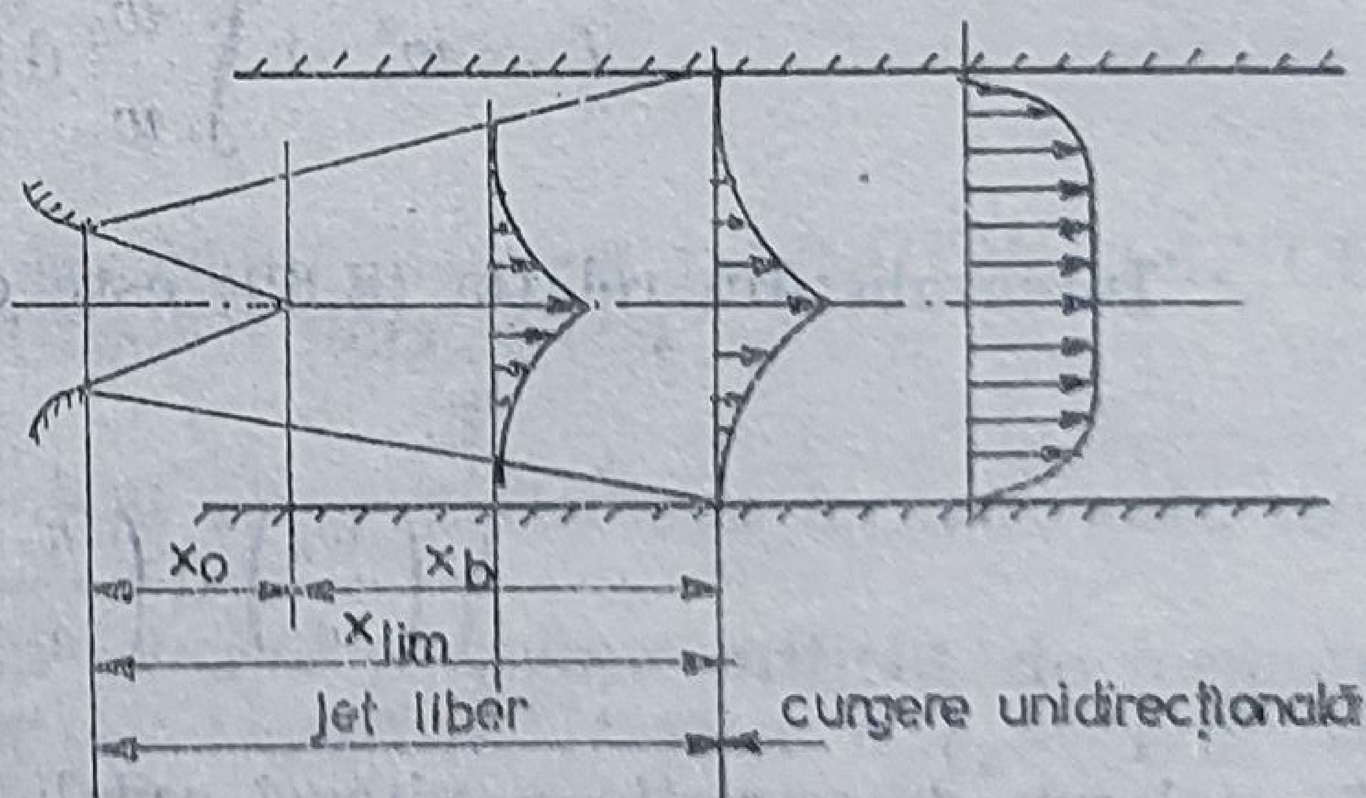


Fig. 8.19. Jet limitat de doi pereţi axiali.

niţele lui ating pereţii. Din acest moment înainte, are loc o curgere potenţială unidirecţională, repartiţia vitezelor fiind corespunzătoare formei pereţilor. Ţinînd seama de figura 8.19, se constată că pe distanţa x_{lim}

profilul vitezelor este datorat absorbţiei de gaz în jet din mediul înconjurător, iar după această secţiune, profilul vitezei este determinat de pierderile datorate frecărilor de pereţi şi celor datorate forţelor de vîscozitate. Deoarece cantitatea de gaz absorbită de un jet limitat este mai mică decît aceea absorbită de unul liber, scăderea vitezei lui în lungul axei (w_x) este mai lentă şi ca urmare bătaia lui este mai mare.

Calculul bătăii unui jet limitat se poate face cu relaţia (8.73) similară cu (8.67) dar afectată de un coeficient φ, a cărui valoare este dată în tabelul 8.7.

Tabelul 8.7.

Valorile coeficientului φ

Distanţa relativă $\frac{h_p^*}{\sqrt{A_0}}$	0,5	1	2	3	4	6
φ	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	1,0

h^* = distanţa de la axa jetului la cel mai apropiat perete

$$x_{\lim} = 3{,}5 \; w_0 D_0 \cdot C_1 \tag{8.73}$$

Valoarea coeficientului C_1 este dată în tabelul 8.6, iar prin D_0 se înţelege diametrul ajutajului de formare a jetului, pentru jetul cilindric, sau diametrul echivalent pentru jetul plan (în m), iar A_0 este secţiunea acestuia (în m²).

Un caz limită al jetului limitat, întîlnit în tehnică destul de des (arzătoare în focare scurte, rachete pe rampa de lansare, gaze la ieşirea din paletele turbomaşinilor, ventilaţii industriale, baleiajul motoarelor, etc.) este acela al unui perete P' aşezat paralel cu axa jetului. În cazul cînd dimensiunile acestui perete sînt mari, jetul este absorbit la perete, aşa cum se vede în figura 8.20. În cazul cînd jetul întîlneşte un perete perpendicular pe axa jetului cu dimensiuni mai mici decît graniţele jetului, s-a constatat

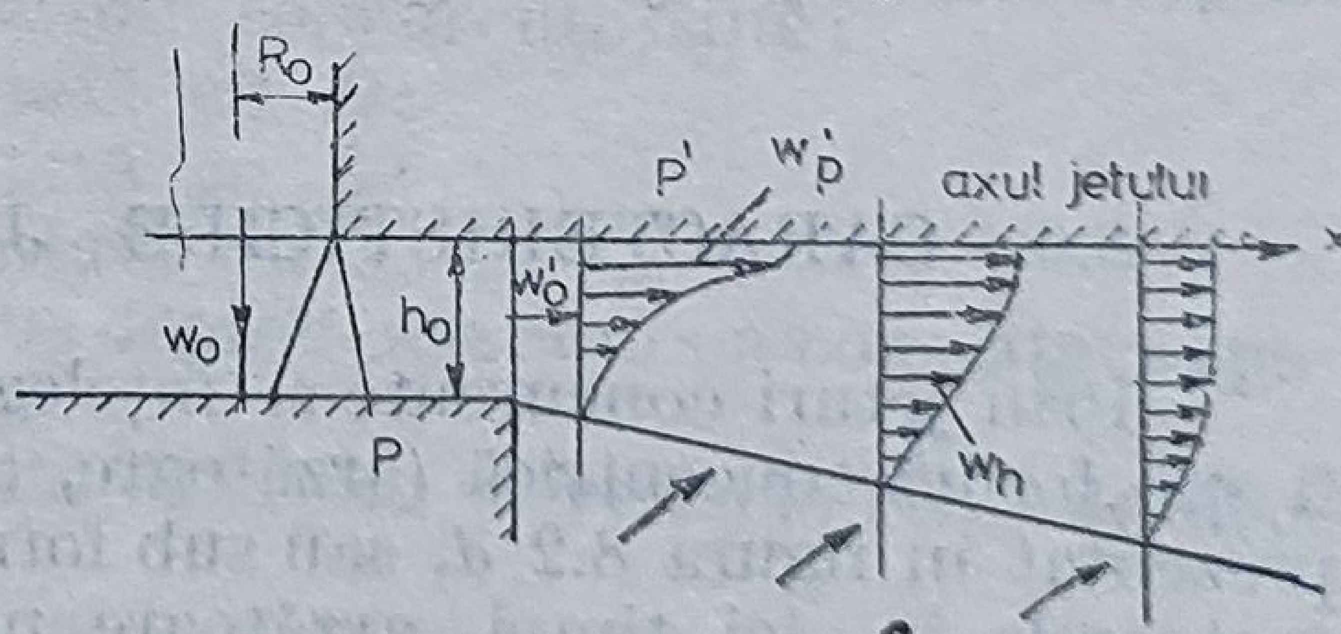


Fig. 8.20. Jet limitat de un perete axial.

experimental că el ocoleşte placa şi masa de gaz se adună formînd un nou jet axial, al cărui secţiune de formare ar fi chiar dimensiunile ei, (fig. 8.21.) Dacă placa deflectoare P are dimensiuni mai mici decît graniţa jetului, atunci în spatele ei se formează un nou jet cu secţiune iniţială D_0' a plăcii respective.

Aceste jeturi deflectate total poartă denumirea de *jeturi radiale*, iar legile ce dictează variaţia vitezei în axă sînt aceleaşi ca cele văzute la

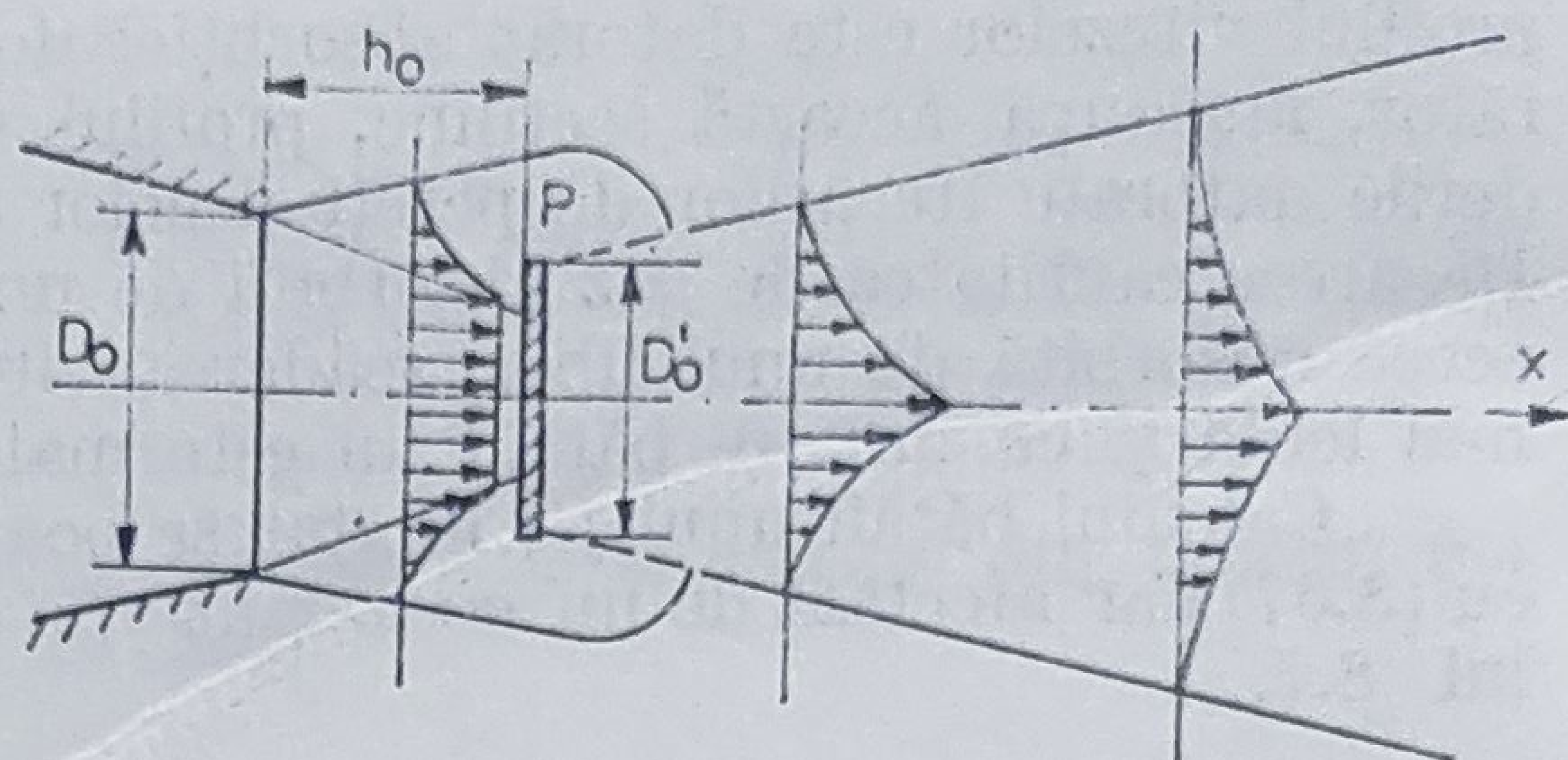


Fig. 8.21. Jet limitat de un perete perpendicular pe axa jetului.

jeturile axiale libere. Relațiile de calcul al caracteristicilor jeturilor limitate trebuie considerate ca avînd doar cu caracter indicativ; determinarea corectă a acestor caracteristici trebuie făcută numai experimental. Expresiile de calcul al mărimilor caracteristice sînt:

$$\frac{w_x}{w_0} = C_1 \frac{h_0}{x} \sqrt{\varphi_c \cdot \varphi_g} \tag{8.74}$$

$$x_{\lim} = \frac{1}{0,25} C_1 \cdot w_0 h_0 \sqrt{\varphi_c \cdot \varphi_g} \tag{8.75}$$

$$\frac{R_{gr}}{R'_0} = \frac{2}{C_1} \frac{x}{h_0 \sqrt{\varphi_c \cdot \varphi_g}} \tag{8.76}$$

În relațiile (8.74) ... (8.76) s-a ținut seama de notațiile din figura 8.21. Cu φ_c s-a notat coeficientul de debit ce ține seama de concentrația vînei de gaz în ajutajul de formare a jetului, ale cărei valori oscilează între 0,65 pentru orificii cu muchie ascuțită și 0,09 pentru orificiu cu muchie rotunjită. Cu φ_g s-a notat raportul dintre secțiunea efectivă liberă a ajutajului și aceea a ajutajului (pentru guri prevăzute cu grătare, clapete etc.).

8.6. CARACTERISTICILE JETURILOR CONCURENTE

Prin jeturi concurente se înțelege întîlnirea a două jeturi, care poate fi sub formă concentrică (arzătoare, ejectoare eductoare etc.) așa cum este prezentat în figura 8.2 *d*, sau sub forma arătată în figura 8.2 *e* (baleiajul la motoarele în doi timpi, arzătoare multiple montate în placa frontală a focarelor etc.).

Caracteristicile jeturilor concentrice nu pot fi determinate decît experimental, avînd în vedere dependența acestora de schimbul energetic ce are loc între ele și mediul ambiant. Schimburile energetice ce au loc între cele două jeturi concentrice vor depinde de valoarea impulsului fiecăruia la suprafața cilindrică de separație și de impulsul inițial al lor. Ca urmare, orice încercare de generalizare a rezultatelor obținute pe un anumit model sau un anumit caz practic este imposibilă.

Cel de al doilea caz, anume cazul a două jeturi ce se întîlnesc, poate fi generalizat sub denumirea de jet deflectat și jet deflectant. Modelul fizic este prezentat în figura 8.22. Jetul deflectat este însemnat cu *2*, iar cel deflectant cu *1*. Jetul deflectat *2* este caracterizat printr-un impuls inițial mai mic decît al celui deflectant *1*, adică $w_1 > w_2$, $V_1 > V_2$, etc. În figura 8.22 jetul deflectat *2* este introdus în jetul deflnctant *1* sub unghiul α cu viteza w_2. Sub acțiunea acestuia el este curbat de la direcția lui de curgere, tinzînd asimptotic la direcția jetului *1*. Distanța de la planul

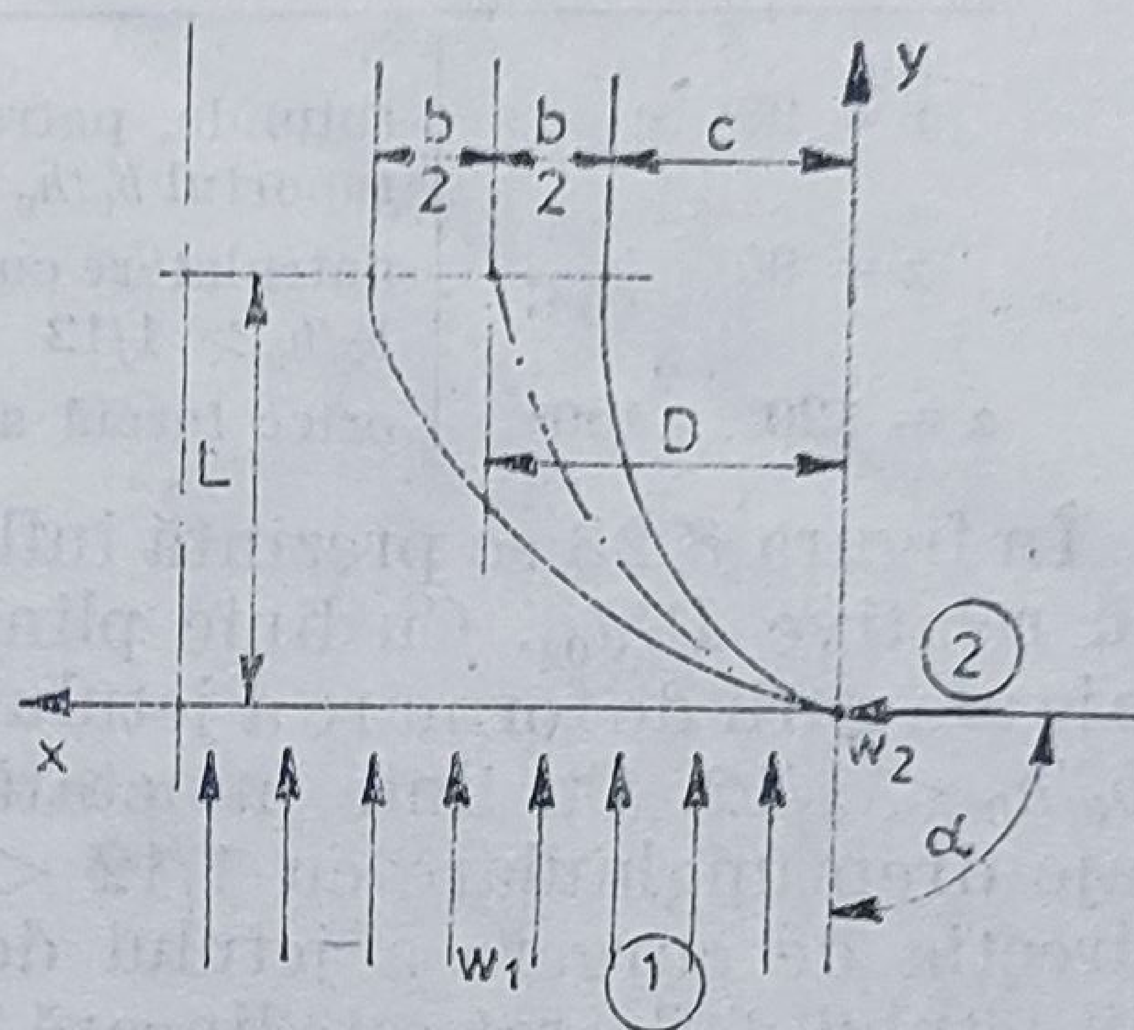


Fig. 8.22. Jeturi concurente

în care se găsește ajutajul *2*, pînă la planul de asimilație este bătaia axială a jetului deflectat și se notează cu D. Lățimea pe care o capătă jetul *2* după ce a fost deflectat se notează cu b. Deci granițele jetului deflectat se vor găsi la distanțele $D + b/2$ și $D - b/2$ de planul de formare al lui. În cazul cînd impulsul jetului deflectant este foarte mare în comparație cu al celui deflectat, granița $D - \frac{b}{2} = 0$, adică ea este în planul ce trece prin gura ajutajului.

Mărimile caracteristice ale jeturilor concurente sint:
- bătaia jetului deflectat, notată cu D;
- lungimea de deflectare, notată cu L;
- lățimea jetului deflectat, notată cu b.

Mărimile caracteristice de mai sus depind, așa cum s-a constatat experimental, de următorii parametri:

1) raportul dintre vitezele jetului deflectat și vitezele celui deflectant w_2/w_1;

2) unghiul de pătrundere a jetului deflectat, notat cu α, echivalent cu unghiul de concurență a celor două jeturi;

3) raportul densităților gazelor ρ_2/ρ_1 pentru jeturile neizoterme.

Cercetările experimentale pentru jeturi axial simetrice (rotunde sau plane cu laturile $h_0/b_0 < 12$) au condus la concluzia că bătaia jetului deflectat se poate determina cu relația (8.77):

$$\frac{D}{d_{02}} = k\frac{w_2}{w_1} \tag{8.77}$$

in care d_{02} este diametrul ajutajului jetului deflectat pentru secțiunile cilindrice sau diametrul echivalent pentru cele plane; k-un coeficient ce depinde de unghiul de concurență α și de forma ajutajului deflectat, dat în tabelul 8.8.

Tabelul 8.8.

Valorile coeficientului k

Unghiul de concurență	Forma ajutajului jetului deflectat	k
$\alpha = 90°$	rotunde, patrate, sau patrulatere, cu raportul $b_0/h_0 < 1/12$	1,5
$\alpha = 90°$	patrulatere cu raportul dintre laturi $b_0/h_0 > 1/12$	1,8
$\alpha = 120°\ldots150°$	orice formă a ajutajului	1,85

În figura 8.23 se prezintă influența raportului vitezelor w_2/w_1 asupra bătăii relative D/d_{02}. Cu linie plină sînt trasate curbele obținute pentru ajutaje ale gurii de formare a jetului rotunde sau dreptunghiulare cu raportul $b_0/h_0 < 1/12$. Cu linie punctată sînt trasate curbele obținute pentru ajutaje dreptunghiulare cu $1/12 < b_0/h_0 < 1/50$, așezate cu latura mare în direcția de curgere a jetului deflectant. După cum se vede, variația bătăii jetului deflectat este lineară în raport cu viteza adimensională a lui.

În figura 8.24 se prezintă bătaia jetului deflectat în funcție de unghiul de pătrundere (concurență α) pentru diferite viteze adimensionale

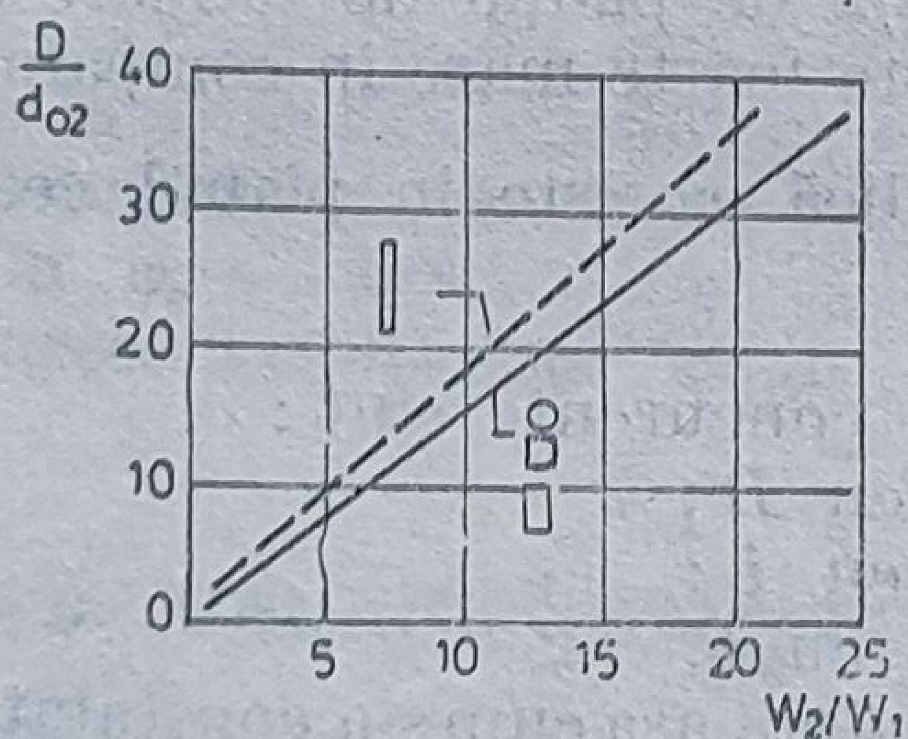


Fig. 8.23. Raportul vitezelor w_2/w_1 la jeturi deflectate.

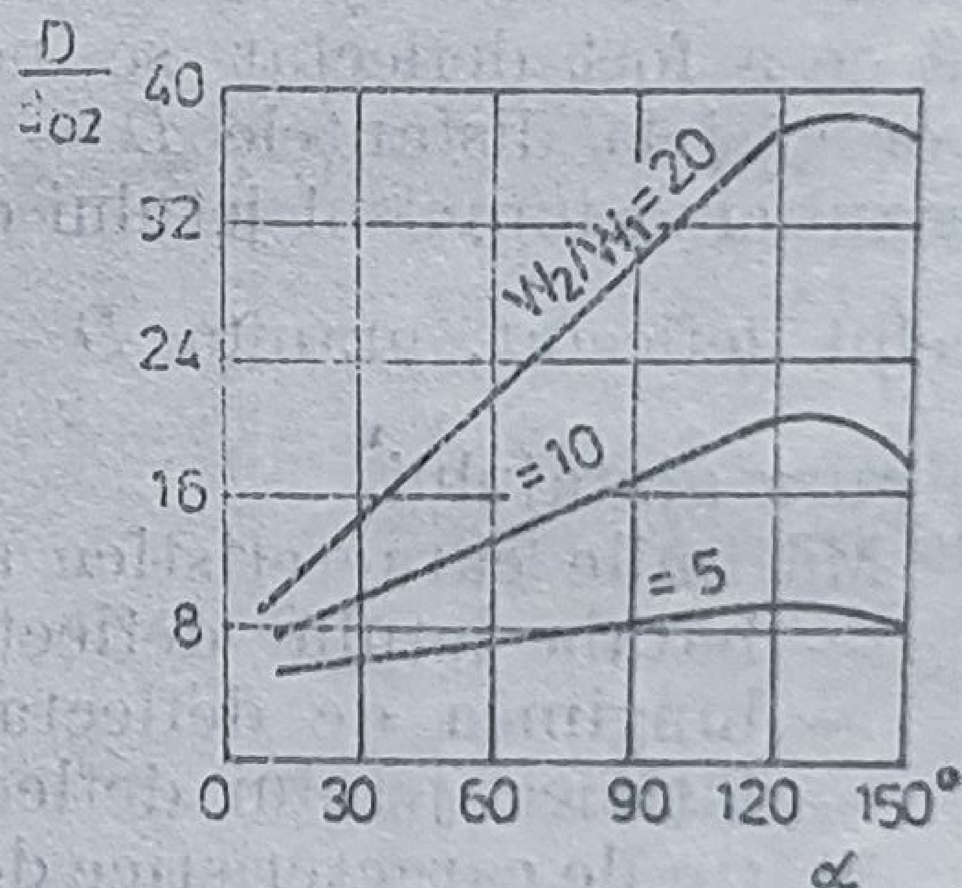


Fig. 8.24. Bătaia unui jet deflectat.

w_2/w_1. Desigur că bătaia adimensională crește odată cu creșterea unghiului α pentru valori $30° < \alpha < 120°$ Pentru unghiuri $\alpha > 120°$, bătaia va începe să scadă. Valoarea maximă a bătăii adimensionale a jetului deflectat, stabilită experimental, are loc pentru valori ale lui $\alpha = 120°$.

În ceea ce privește lungimea de deflectare L, ea depinde de unghiul α de concurență și de viteza relativă inițială w_2/w_1. În figurile 8.25 și 8.26 sînt prezentate lungimile relative de deflectare L/d_{02}, pentru un unghi $\alpha = 90°$ și $\alpha = 120°$.

Calculul jeturilor concurente necesită obligatoriu determinări experimentale, avînd în vedere numărul mare de factori ce influenţează mărimile caracteristice ale jeturilor.

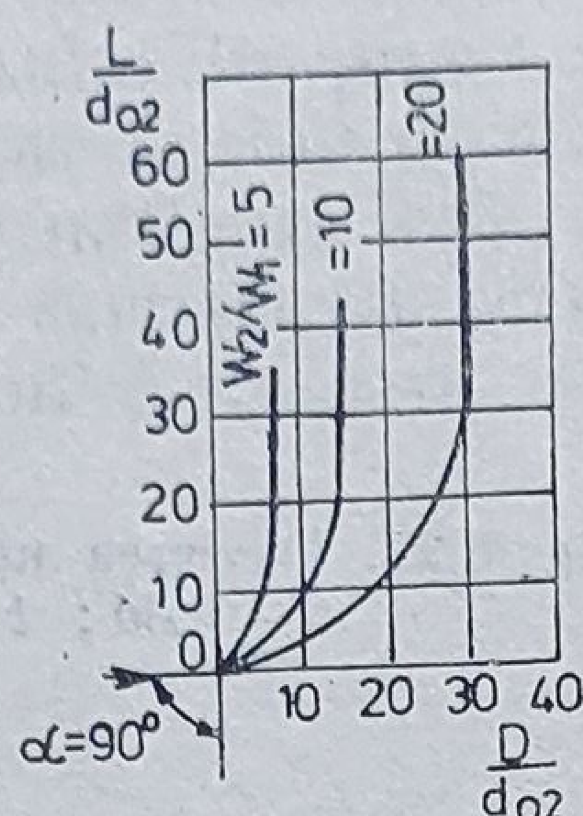


Fig. 8.25. Lungimea de deflecţie a unui jet, pentru $\alpha = 90°$.

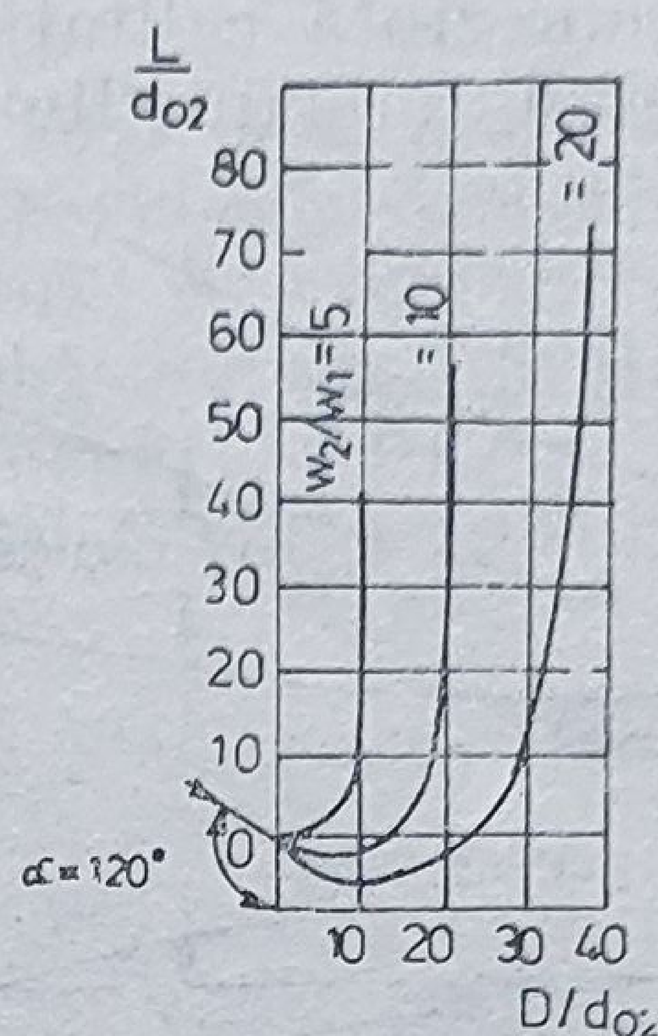


Fig. 8.26. Lungimea de deflecţie a unui jet, pentru $\alpha = 120°$.

8.7. JETURI NEIZOTERME CU TEMPERATURĂ PUŢIN DIFERITĂ DE A MEDIULUI AMBIANT

Jeturi neizoterme se întîlnesc foarte des în tehnică, de exemplu la arzătoarele de gaze, în turbomaşini, în instalaţii de condiţionare a aerului, la ajutajele instalaţiilor de aeraj minier etc.

În cazul curgerii jetului de gaz într-un mediu de altă temperatură, datorită diferenţei dintre densitatea gazului din jet şi aceea a mediului înconjurător, va avea loc o deviere a axei jetului. În cazul diferenţelor mari de temperatură între jet şi mediul ambiant, devierea jetului este atît de mare încît denaturează complet spectrul curgerii lui şi nu mai ascultă de ipoteza curgerii unidirecţionale.

Ca urmare a diferenţei de temperatură sus amintite, criteriul de similitudine, care exprimă raportul dintre forţa ascensională $[g(\rho - \rho]$ şi forţa de inerţie $\rho_0 \dfrac{w_0}{d_0}$ va juca un rol important în geometria curgerii. Acest criteriu, analog criteriului Froude, este criteriul lui Arhimede (Ar) dat de relaţia

$$\mathrm{Ar} = g \frac{\Delta t_0}{T_{mi}} \frac{d_0}{w_0^2} \tag{8.78}$$

în care: Δt_0 este diferenţa iniţială (maximă) de temperatură între gazul din jet şi medul ambiant; T_{mi} = temperatura mediului înconjurător.

Forțele gravitaționale și de inerție caracterizate prin criteriul Arhimede, vor produce o deviere a axei jetului, ascendentă sau descendentă, după cum temperatura lui va fi mai ridicată sau mai scăzută decît a mediului ambiant, iar devierea va depinde cantitativ de diferența Δt. În figura 8.27 se reprezintă calitativ devierea axei geometrice a jetului mai cald decît mediul ambiant (figura 8.27*a*) sau mai rece decît el (fig. 8.27*b*).

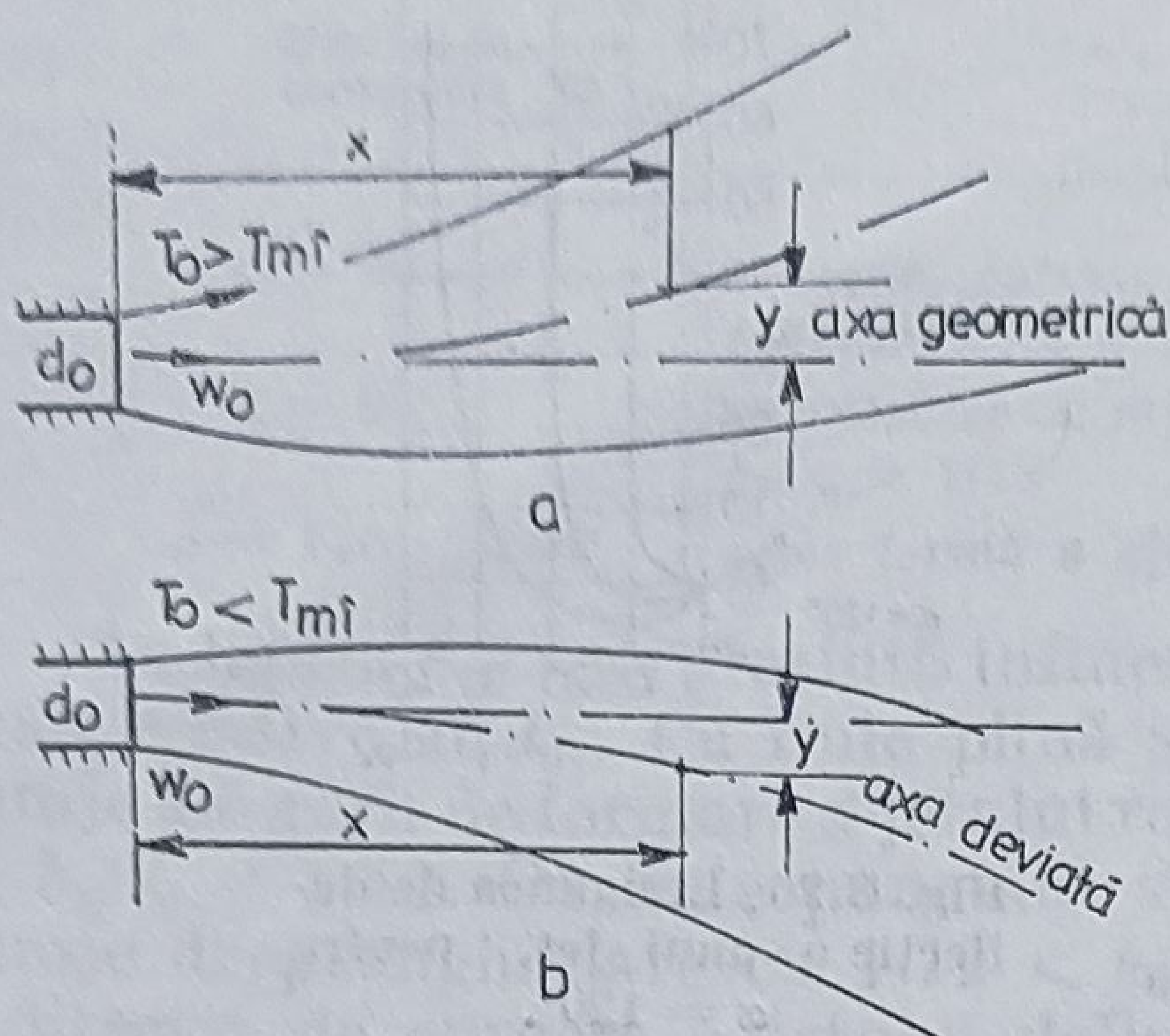


Fig. 8.27. Devierea unui jet: *a* — cald; *b* — rece

În cazul jetului neizoterm, pe lîngă variația vitezei, va trebui să se țină seama și de variația temperaturii în lungul axei jetului care determină devierea lui. În figura 8.28 se reprezintă rezultatele experimentale obținute la studiul unui jet cald ($T_0 > T_{mî}$) privind devierea axei lui în funcție de

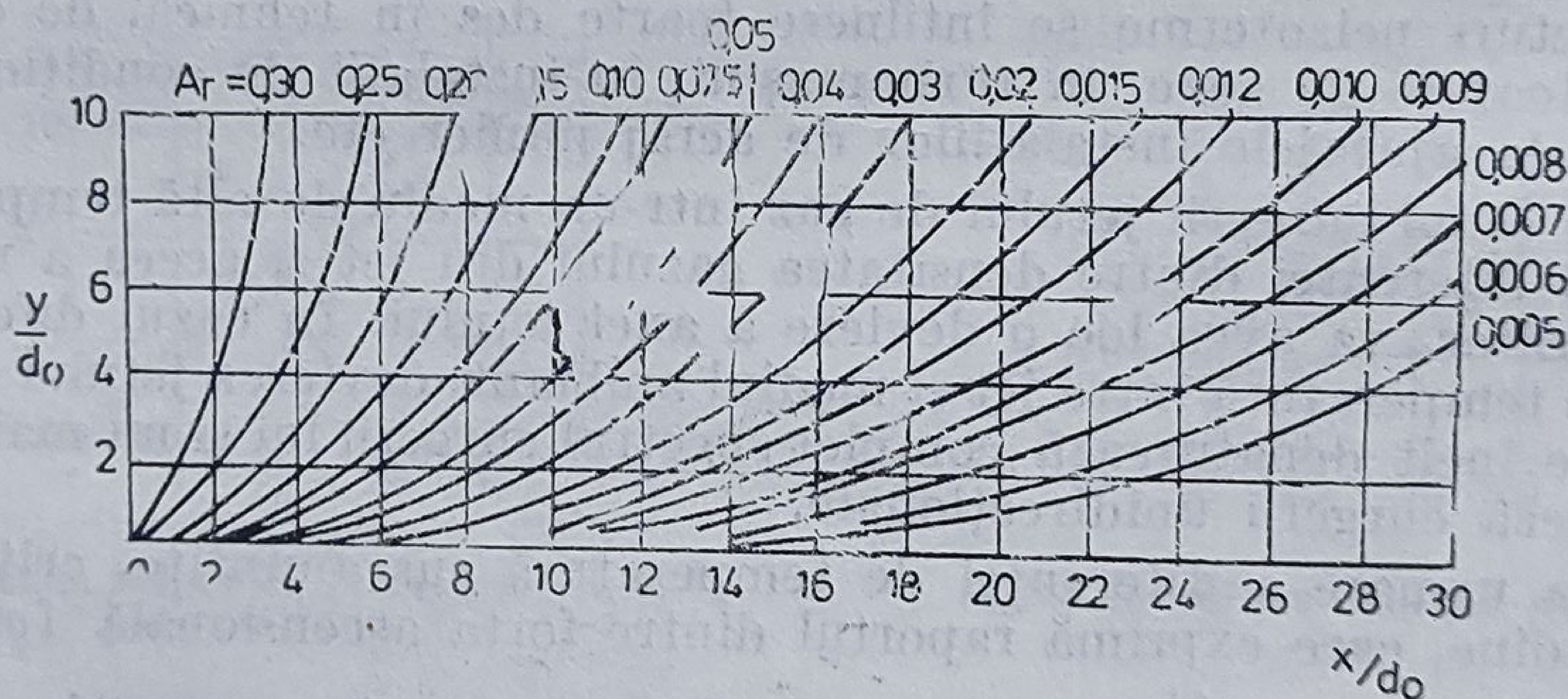


Fig. 8.28. Devierea unui jet cald.

valoarea criteriului Ar. Ordonata y a deviației jetului este funcție de distanța x și valoarea criteriului Arhimede

$$\frac{y}{d} = f\left(\frac{x}{d}, \text{Ar}\right) \tag{8.79}$$

Prin axa și granița unui jet izoterm se înțelege locul geometric al punctelor cu viteză maximă și nulă pe o secțiune paralelă cu gura ajutajului

de formare. Un jet neizoterm va avea două axe și două granițe, una referindu-se la viteză și celelaltă la temperatură. De obicei axa temperaturii este ceva mai mult deviată decît cea a vitezei. În calculele tehnice, se acceptă prin convenție ca definiția de axă a unui jet izoterm să se refere la media celor două.

Evazarea dinamică a unui jet este ceva mai mare decît evazarea termică, deci granița temperaturii este înăuntrul celei dinamice. De asemenea, bătaia jetului din punct de vedere termic este mai mică decît bătaia dinamică. Reprezentînd pe aceeași diagramă, numai calitativ cele expuse mai sus, se obține figura 8.29, pentru un jet cald. În figura 8.30 se reprezintă calitativ variația vitezei și temperaturii axiale a unui jet neizoterm pentru o anumită valoare Ar.

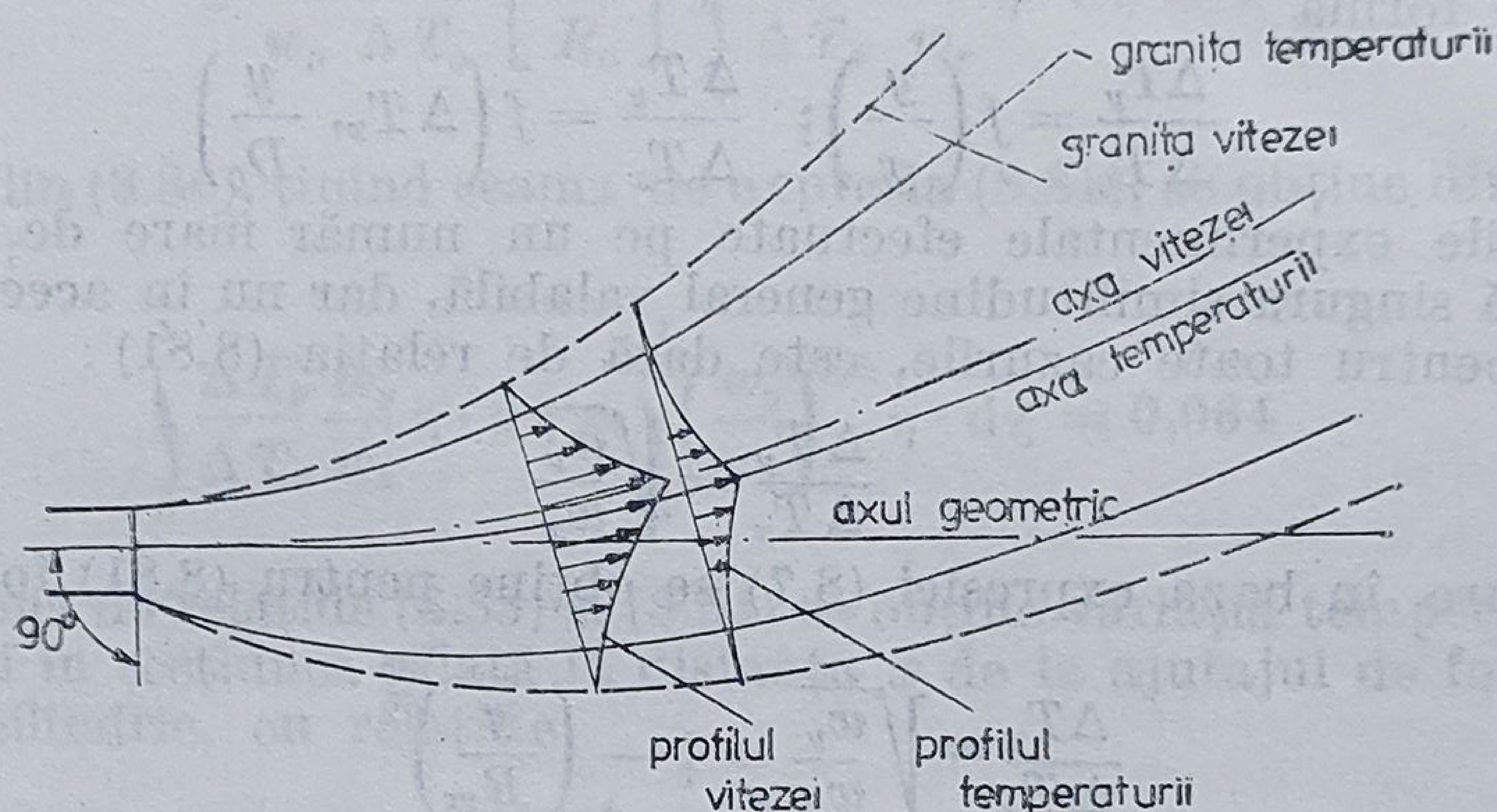


Fig. 8.29. Devierea unui jet cald.

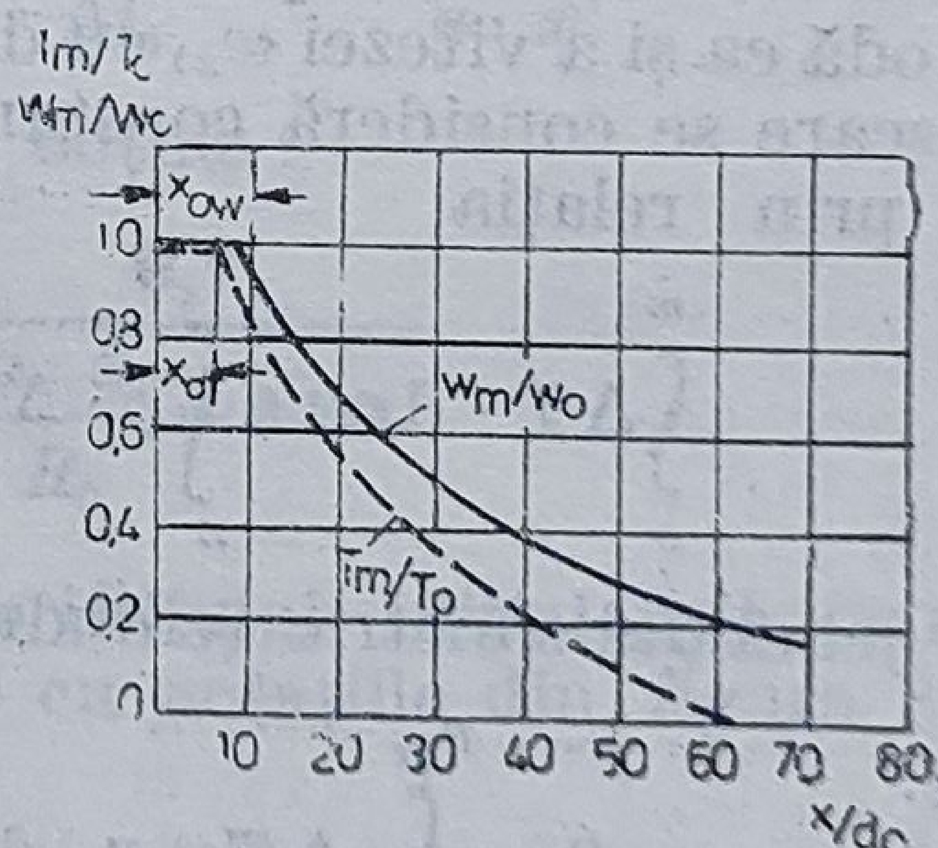


Fig. 8.30. Variația vitezei axiale w_m într-un jet cald.

8.8. CALCULUL ANALITIC AL MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE JETULUI AXIAL SIMETRIC NEIZOTERM CU TEMPERATURA PUȚIN DIFERITĂ DE A MEDIULUI AMBIANT

Similitudinea cîmpurilor de viteză determină la un jet neizoterm și similitudinea cîmpurilor de temperatură, a cîmpurilor de concentrații. și în general distribuția tuturor parametrilor caracteristici ai gazului Bineînțeles că această variație se datorește amestecului gazului din jet

cu cel din mediul înconjurător lui. Ca urmare nu se vor considera valorile absolute ale acestor parametri în jet, ci diferența lor față de valorile respective ale mediului ambiant.

Ca ipoteză de calcul se consideră inexistent schimbul de căldură între jet și mediul ambiant prin radiație sau termodifuzie. Se notează cu $\Delta T_y = T_y - T_{mi}$; $\Delta T_x = T_x - T_{mi}$ și $\Delta T_0 = T_0 - T_{mi}$. Temperatura mediului ambiant T_{mi} este considerată constantă temporal și spațial. Mărimile caracteristice ale jetului din punct de vedere dinamic, ca nucleu, zonă inițială, zonă de bază, evazare, etc., se regăsesc și în jetul neizoterm din punct de vedere al temperaturii. Există o asenmănare calitativă și aproximativ cantitativă între legile de distribuție a temperaturii și vitezei; se poate spune, ca și pentru viteză că funcția de variație a temperaturii are forma

$$\frac{\Delta T_y}{\Delta T_0} = f\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{\Delta T_y}{\Delta T_x} = f\left(\Delta T_x, \frac{y}{D_0}\right) \tag{8.80}$$

Cercetările experimentale efectuate pe un număr mare de cazuri au arătat că singura similitudine general valabilă, dar nu în aceeași măsură exactă pentru toate cazurile, este dată de relația (8.81):

$$\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x} = \sqrt{\frac{w_y}{w_x}} \tag{8.81}$$

Ca urmare, în baza expresiei (8.7) se obține pentru (8.81) forma

$$\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x} = \sqrt{\frac{w_y}{w_x}} = 1 - \left(\frac{y}{R_{gr}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{8.82}$$

Determinarea variației temperaturii axiale ΔT_x a jetului se face prin aceeași metodă ca și a vitezei w_x, cu deosebirea că în locul constanței cantității de mișcare se consideră constantă entalpia totală în lungul jetului, exprimată prin relația

$$\int_0^{\dot{m}} \Delta T \cdot dm = \int_A \rho \cdot \Delta T w \cdot dA = \text{const.} \tag{8.83}$$

Pentru un jet axial-simetric (cilindric) relația (8.83) capătă forma

$$2 \cdot \pi \int_0^{R_{gr}} \rho \Delta T w_y y \cdot dy = \pi \rho_0 \Delta T_0 w_0 R_0^2 \tag{8.84}$$

Ținînd seama de ipoteza densității constante a gazului în lungul axei (jeturi slab încălzite) relația (8.84) capătă forma

$$2 \int_0^{\frac{R_{gr}}{R_0}} \frac{\Delta T_y}{\Delta T_0} \frac{w_y}{w_0} \frac{y}{R_0} d\left(\frac{y}{R_0}\right) = 1 \tag{8.85}$$

Introducînd variabila utilizată la calculul variației vitezei, $\eta = y/R_{gr}$, se obține :

$$\frac{y}{R_0} = \eta \frac{R_{gr}}{R_0}$$

Deci ; $\frac{w_y}{w_0} = \frac{w_y}{w_x}\frac{w_x}{w_0}$ și $\frac{\Delta T_y}{\Delta T_0} = \frac{\Delta T_y}{\Delta T_y}\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}$;

ca urmare, (8.84) devine

$$2\frac{w_y}{w_0}\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\left[\frac{R_{gr}}{R_0}\right]^2\int_0^1 \frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}\frac{w_y}{w_x}\eta\cdot d\eta = 1 \quad (8.86))$$

Integrala din (8.86), ținînd seama de expresia (8.81), se obține din tabelul (8.3) deci :

$$\int_0^1 \frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}\frac{w_y}{w_x}\eta\cdot d\eta = \int_0^1\left(\frac{w_y}{w_x}\right)^{1,5}\eta\cdot d\eta = 0,064 \quad (8.87)$$

Ținînd seama de relațiile (8.53) și (8.54) se obține variația temperaturii în lungul axei în secțiunea aflată la distanța x de la ajutajul de formare a unui jet cilindric, cu relațiile

$$\Delta T_x = \frac{\text{const}}{x}; \quad \frac{\Delta t_x}{\Delta t_0} = 0,7\frac{R_0}{a\cdot x} \quad (8.88)$$

Și ținînd seama de relația (8.60) se obține :

$$\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0} = \frac{0,7}{\frac{a\cdot x}{R_0} + 0,29} \quad (8.89)$$

În cazul unui jet plan cu laturile orificiului inițial $h_0/b_0 > 12$, ecuația constantei entalpiei are forma (8.90) cu notațiile din figura 8.17 :

$$\Delta T_x w_x x \int_0^{\frac{h_{gr}}{x}} \frac{\Delta T_h}{\Delta T_x}\frac{w_h}{w_x} d\left(\frac{h}{x}\right) = \text{const.} \quad (8.90)$$

Deoarece integrala are o valoare constantă și ținînd seama de relația (8.72), se obține

$$\Delta T_x = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}} \quad (8.91)$$

După cum s-a văzut din relația (8.50) între viteza medie masică $w_{med_{mas}}$ și volumul de gaz aspirat de jet există o legătură directă de forma :

$$\frac{\dot{V}}{\dot{V}_0} \frac{w_{med_{mas}}}{w_{0_{mas}}} = 1 \quad (8.92)$$

Pe de altă parte, menținerea constantă a entalpiei permite obținerea egalității produsului dintre debitul masic și temperatura axială ($w_{0_{mas}} = w_0$ și $\Delta T_{0\,med} = \Delta T_0$) :

$$\rho V \Delta T_{med_{mas}} = \rho \dot{V}_0 \Delta T_{0_{mas}} = \rho \dot{V}_0 \Delta T_0$$

Deci :

$$\frac{\dot{V}}{\dot{V}_0} \frac{\Delta T_{med_{mas}}}{\Delta T_0} = 1 \quad (8.93)$$

Din (8.92) și (8.93) se obține

$$\frac{\Delta T_{med_{mas}}}{\Delta T_0} = \frac{w_{med_{mas}}}{w_{0\,mas}} \quad (8.94)$$

Cu alte cuvinte, temperatura medie în lungul jetului variază identic cu viteza medie masică a lui.

În cazul cînd gazul din jet este diferit ca substanță de gazul ce formează mediul înconjurător lui și se introduc noțiunile de concentrații $\Delta C_0 = C_0 - C_{mî}$; $\Delta C_y = C_y - C_{mî}$; $\Delta C_x = C_x - C_{mî}$ similare cu cele ale temperaturii, s-a constat experimental că există o identitate totală între temperatură și concentrații :

$$\frac{\Delta C_y}{\Delta C_x} = \frac{\Delta T_y}{\Delta T_x} = \frac{\Delta w_y}{\Delta w_x} = 1 - \left(\frac{y}{R_{gr}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (8.95)$$

$$\frac{\Delta C_x}{\Delta C_0} = \frac{0,7}{\frac{ax}{R_0} + 0,29} \quad (8.96)$$

8.9. CALCULUL ANALITIC AL MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE JETULUI NEIZOTERM CU TEMPERATURA MULT DIFERITĂ DE A MEDIULUI AMBIANT

În cazul unui jet de gaz cu o temperatură foarte ridicată sau foarte scăzută față de aceea a mediului ambiant (jeturi de gaze calde provenite de la arzătoare sau jeturi foarte reci în tuneluri de congelare), ipoteza egalității densității lui cu a mediului nu mai poate fi acceptată, deoarece $\rho_0 \gg \rho_{mî}$ sau $\rho_0 \ll \rho_{mî}$.

Pentru determinarea relațiilor generale de calcul al vitezei și temperaturii în lungul axei, se consideră, pentru simplificare, un jet

cilindric (axial-simetric) pentru care se scrie cantitatea de mișcare (8.97) și entalpia (8.98), constante în orice secțiune transversală a lui :

$$2\pi \int_0^{R_{gr}} \rho w^2 y \, dy = \pi \rho_0 w_0 R_0^2 \tag{8.97}$$

$$2\pi \int_0^{R_{gr}} \rho w \Delta T_y y dy = \pi \rho_0 w_0 \Delta T_0 R_0 \tag{8.98}$$

care, sub formă admensională, devin

$$2 \int_0^{\frac{R_{gr}}{R_0}} \frac{\rho_y}{\rho_0} \left(\frac{w_y}{w_0}\right)^2 \frac{y}{R_0} \, d\left(\frac{y}{R_0}\right) = 1 \tag{8.99}$$

$$2 \int_0^{\frac{R_{gr}}{R_0}} \frac{\rho_y}{\rho_0} \frac{\Delta T_y}{\Delta T_0} \frac{y}{R_0} \, d\left(\frac{y}{R_0}\right) = 1 \tag{8.100}$$

Deoarece ipoteza menținerii presiunii totale constante în orice secțiune a jetului este satisfăcută, se poate scrie egalitatea dintre raportul densităților și raportul invers al temperaturilor $\rho_y/\rho_0 = T_0/T_y$; ca urmare relațiile (8.99) și (8.100) devin

$$2 \int_0^{\frac{R_{gr}}{R_0}} \frac{T_0}{T_y} \left(\frac{w_y}{w_0}\right)^2 \frac{y}{R_0} \, d\left(\frac{y}{R_0}\right) = 1 \tag{8.101}$$

$$2 \int_0^{\frac{R_{gr}}{R_0}} \frac{T_0}{T_y} \frac{w_y}{w_0} \frac{\Delta T_y}{\Delta T_0} \frac{y}{R_0} \, d\left(\frac{y}{R_0}\right) = 1 \tag{8.102}$$

Deoarece

$$\frac{y}{R_0} = \frac{y}{R_{gr}} \frac{R_{gr}}{R_0}; \quad \frac{w_y}{w_0} = \frac{w_y}{w_x} \frac{w_x}{w_0}; \quad \frac{\Delta T_y}{\Delta T_0} = \frac{\Delta T_y}{\Delta T_x} \frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}$$

Și de asemenea :

$$\frac{T_0}{T_y} = \frac{T_0}{T_{mt} + \Delta T_y} = \frac{T_0}{T_{mt}} \frac{1}{1 + \frac{\Delta T_y}{T_{mt}}}$$

în care:

$$\frac{\Delta T_y}{T_{mi}} = \frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\frac{\Delta T_0}{T_{mi}}; \quad \frac{\Delta T_0}{T_{mi}} = \frac{T_0 - T_{mi}}{T_{mi}} = \frac{T_0}{T_{mi}} - 1; \quad \frac{T_0}{T_{mi}} = \theta,$$

se obține:

$$\frac{T_0}{T_y} = \theta \frac{1}{1 + (\theta - 1)\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}} \tag{8.103}$$

Înlocuind expresiile de mai sus în relațiile (8.101) și (8.102), ele vor căpăta formele (8.104) și (8.105):

$$2\theta\left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2\int_0^1 \frac{\left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \eta\cdot \mathrm{d}\eta}{1 + (\theta - 1)\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}} = 1 \tag{8.104}$$

$$2\theta\frac{w_x}{w_0}\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2\int_0^1 \frac{\frac{w_y}{w_x}\cdot\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}\eta\cdot \mathrm{d}\eta}{1 + (\theta - 1)\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}} = 1 \tag{8.105}$$

Ecuațiile (8.104) și (8.105) capătă forme simple în funcție de diferența de temperatură ΔT_0 pentru:

a) Jet de gaz cu o încălzire slabă ($T_0 \approx T_{mi}$). În acest caz $\theta \to 1$ și ca urmare numitorul fracției de sub integrală tinde către 1. Ecuațiile (8.104) și (8.105) capătă formele (8.106) și respectiv (8.107):

$$2\theta\left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2\int_0^1\left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2\eta\cdot \mathrm{d}\eta = 1 \tag{8.106}$$

$$2\theta\frac{w_x}{w_0}\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2\int_0^1\frac{w_y}{w_x}\frac{\Delta T_y}{\Delta T_x}\eta\cdot \mathrm{d}\eta = 1 \tag{8.107}$$

b) Jet de gaz cu temperatură foarte ridicată ($T_0 \gg R_{mi}$). În acest caz $\theta \to \infty$ și ca urmare relațiile (8.104) și (8.105) capătă formele (8.108) și (8.109):

$$2\left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2\frac{\Delta T_0}{\Delta T_x}\int_0^1\left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2\frac{\Delta T_x}{\Delta T_y}\eta\cdot \mathrm{d}\eta = 1 \tag{8.108}$$

$$2\frac{w_x}{w_0}\left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)\int_0^1\frac{w_y}{w_x}\eta\cdot \mathrm{d}\eta = 1 \tag{8.109}$$

Pentru rezolvarea ecuațiilor (8.106) ... (8.109) se admite constanța distribuției temperaturii și vitezei și se face apel la tabelul 8.3., obținîndu-se valoarea numerică a integralelor :

$$\int_0^1 \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \eta \cdot \mathrm{d}\eta = 0{,}0464 ; \qquad \int_0^1 \frac{w_y}{w_x} \eta \cdot \mathrm{d}\eta = 0{,}0985.$$

Se obțin astfel valorile expresiilor (8.106) și (8.109) care devine (8.110) și respectiv (8.111) :

$$\theta \left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2 \left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 = 10{,}8 \tag{8.110}$$

$$\frac{w_x}{w_0} \left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 = 5{,}1 \tag{8.111}$$

Egalitatea dată de relația (8.82) permite ca expresiile (8.107) și (8.108) să capete valorile (8.112) și respectiv (8.113), ținînd seama de valoarea numerică a integralei respective dată în tabelul 8.3 :

$$\int_0^1 \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \frac{\Delta T_x}{\Delta T_0} \eta \cdot \mathrm{d}\eta = \int_0^1 \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^{1,5} \eta \cdot \mathrm{d}\eta = 0{,}064$$

$$\theta \frac{w_x}{w_0} \frac{\Delta T_x}{\Delta T_0} \left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 = 7{,}84 \tag{8.112}$$

$$\left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2 \left(\frac{R_{gr}}{R_0}\right)^2 \frac{\Delta T_0}{\Delta T_x} = 7{,}84 \tag{8.113}$$

Din egalarea relațiilor (8.110) și (8.112), rezultă că pentru un jet slab încălzit ($\theta \to 1$) există o proporționalitate între temperatură și viteza axială adimensională, dată de expresia

$$\left.\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\right|_{0\to 1} = 0{,}72 \frac{w_n}{w_0} ; \tag{8.114}$$

Iar pentru un jet puternic încălzit ($\theta \to \infty$), din egalarea expresiei (8.111) cu (8.113), poporționalitatea este dată de expresia

$$\left.\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}\right|_{0\to\infty} = 0{,}65 \frac{w_x}{w_0} \tag{8.115}$$

Deoarece pentru un interval mare de temperatură, proporționalitatea între temperatură și viteza adimensională din axa jetului variază cu numai 10% - se poate accepta ca valabilă pentru orice jet de gaz cald, indiferent de temperatura ΔT_0, relația

$$\frac{T_x}{T_0} = 0{,}72 \frac{w_x}{w_0} \tag{8.116}$$

O altă caracteristică importantă pentru jetul neizoterm este evazarea termică a lui. Pentru determinarea ei se acceptă următoarele ipozete simplificatoare :

- distribuţia vitezelor şi temperaturilor în toate secţiunile transversale ale jetului ascultă de aceeaşi lege ;
- există o legătură directă între valorile adimensionale ale vitezelor şi valorile temperaturilor în orice secţiune transversală a jetului ;
- graniţa temperaturii coincide cu aceea a vitezei, este liniară şi nu depinde de diferenţa dintre temperatura jetului şi aceea a mediului ambiant.

Ca urmare a ultimei ipoteze, se admite că şi pentru un jet cald se păstrează proporţionalitatea între raza stratului limită şi distanţa x, adică este satisfăcută relaţia (8.117) sau sub formă adimensională (8.118) :

$$R_{gr} = 3{,}4ax \tag{8.117}$$

$$\frac{R_{gr}}{R_0} = 3{,}4\,\frac{ax}{R_0} \tag{8.118}$$

Determinarea legii de variaţie a vitezei în lungul axei jetului cald se face dacă în relaţia (8.104) se introduc relaţiile (8.118) şi (8.116) şi se ţine seama de notaţiile (8.119) şi (8.120) :

$$\frac{1}{A} = 2\times 3{,}4^2 \int_0^1 \frac{\left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \eta \cdot d\eta}{1 + 0{,}72\cdot\chi\sqrt{\frac{w_y}{w_x}}} \tag{8.119}$$

$$\chi = (\theta - 1)\,\frac{w_x}{w_y} \tag{8.120}$$

Se obţine relaţia (8.121) care exprimă distanţa adimensională $a\cdot x/R_0$ la care viteza în axă are valoarea adimensională w_x/w_0 :

$$\frac{a\cdot x}{R_0} = \frac{w_0}{w_x}\sqrt{\frac{A}{\theta}} \tag{8.121}$$

Pentru efctuarea calculelor, valoarea funcţiei A este dată în raport cu valoarea lui χ în tabelul 8.9 sau în figura 8.31 în care ecuaţia curbei A este dată de relaţia :

$$A \approx 0{,}5\,\chi + 0{,}935 \tag{8.121}$$

Tabelul 8.9.

Valorile funcţiei A

χ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0,94	1,45	1,95	2,45	2,94	3,35	3,94	4,42	4,95	5,44	5,95

Relația (8.121) explicitată are forma

$$\frac{a \cdot x}{R_0} = \frac{0,96}{\sqrt{\theta}} \frac{w_0}{w_m} \sqrt{1 + 0,535(\theta - 1)\frac{w_x}{w_0}} \tag{8.123}$$

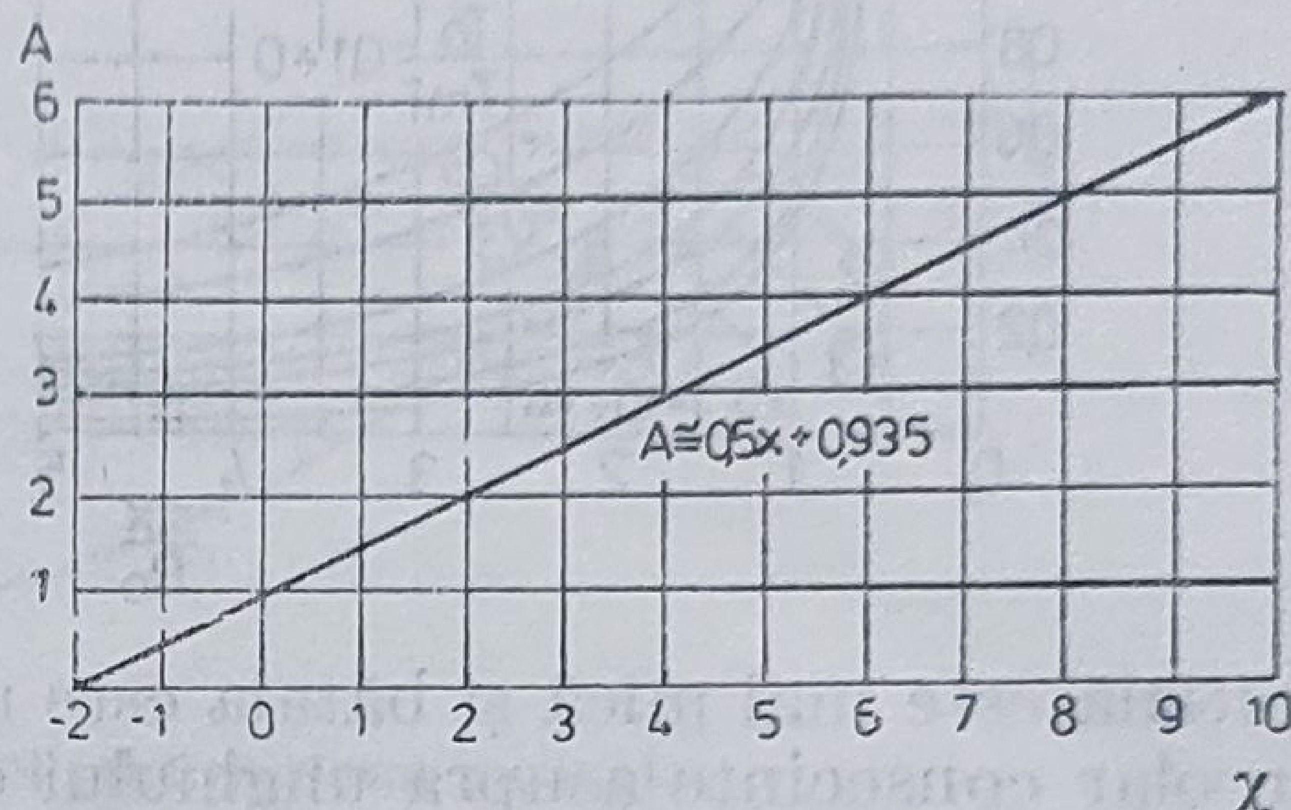


Fig. 8.31. Coeficientul $A = f(\chi)$.

În practică se cere determinarea vitezei w_x în axa jetului neizotermic la distanța x de la ajutaj .Calculele se fac cu relația (8.123). Pentru calcule aproximative se poate folosi și diagrama din figura 8.32, cu ajutorul căreia se obține viteza adimensională w_x/w_0 în funcție de $\theta = T_{mi}/T_x$. După cum se vede din figura 8.32, cu cît jetul este mai cald, cu atît bătaia lui ($x_{\lim}$) se micșorează.

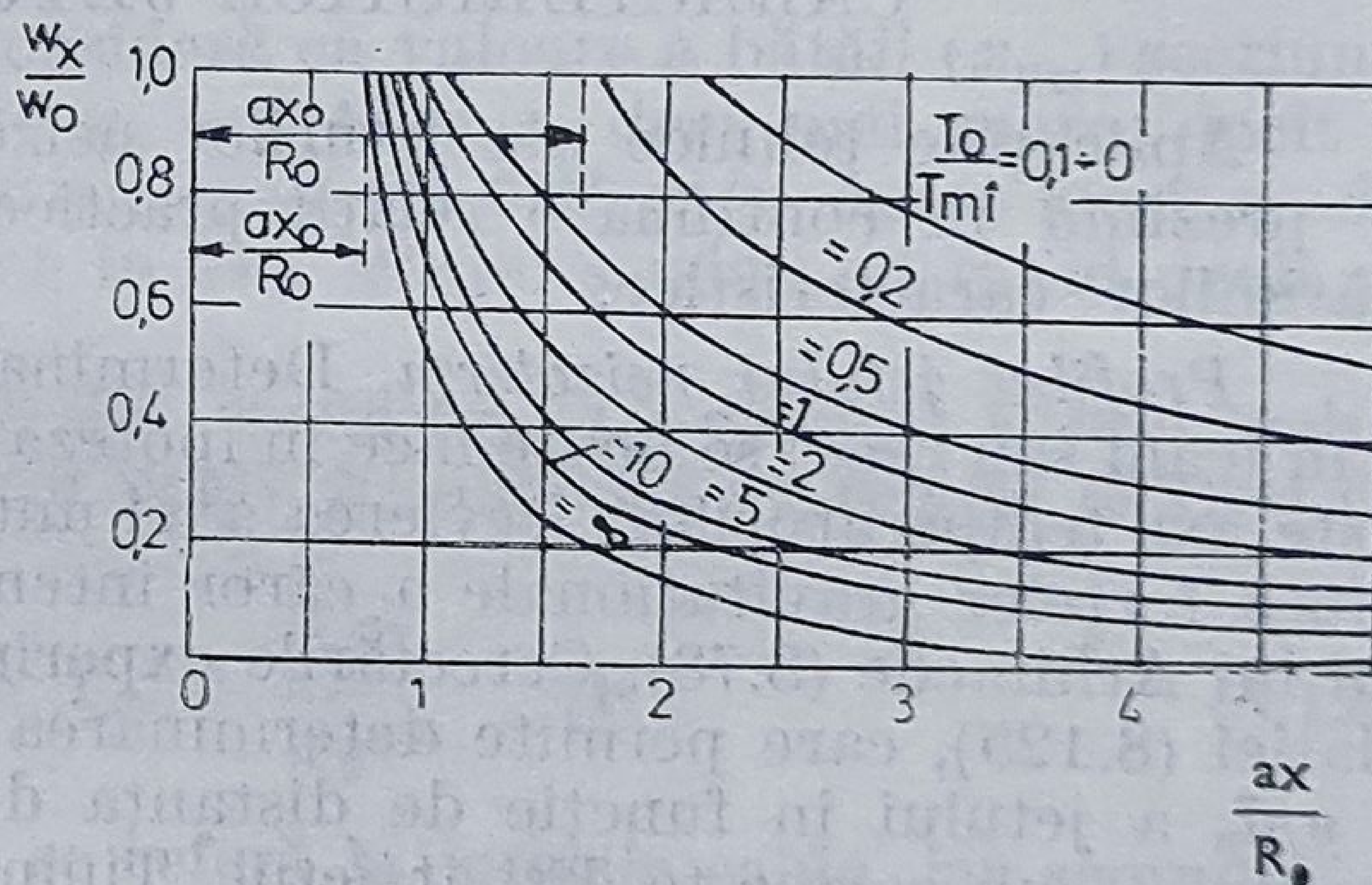


Fig. 8.32. Determinarea vitezei axiale w_m pentru un jet neizoterm.

Pentru obținerea variației temperaturii ΔT_x în axa jetului neizoterm în funcție de distanța x se poate folosi relația (8.105) sau (8.116), care capătă forma (8.124), similară cu relația (8.123):

$$\frac{a \cdot x}{R_0} = \frac{0,7}{\sqrt{\theta}} \frac{\Delta T_0}{\Delta T_x} \sqrt{1 + 0,735(\theta - 1)\frac{\Delta T_x}{\Delta T_0}} \tag{8.124}$$

În figura 8.33 se reprezintă variația temperaturii $\Delta T_x/\Delta T_0$ în axa jetului neizoterm în funcție de distanța x.

Cu ajutorul figurii 8.32 se poate determina și lungimea zonei inițiale x_0 a jetului neizoterm, ea nefiind altceva decît lungimea adimensională ax_0/R_0 pentru care viteza adimensională în axă w_x/w_0 este egală cu unu ($w_m = w_0$).

Deci pentru jetul mai rece, cu cît temperatura este mai scăzută decît a mediului ambiant cu atît zona inițială și bătaia jetului sînt mai mari. Pentru jeturile calde, cu cît temperatura este mai ridicată cu atît zona

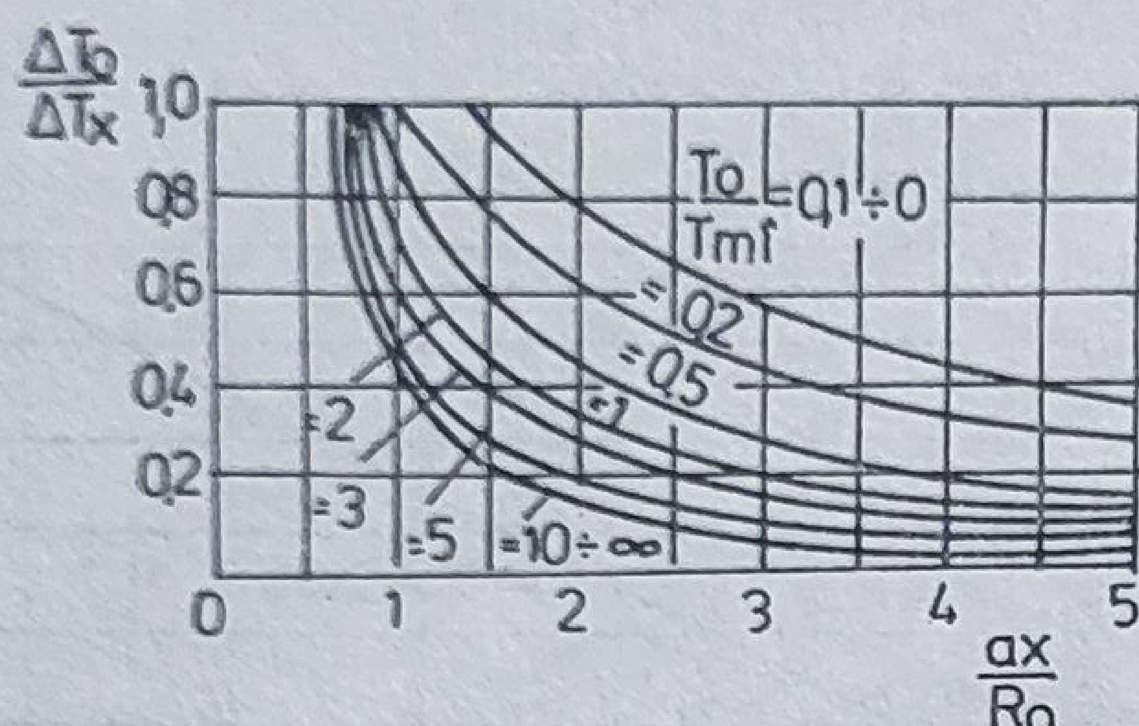


Fig. 8.33. Determinarea temperaturii relative axiale $\Delta T_0/\Delta T_x = f(ax/R_0)$

inițială este mai mică și bătaia este mai scurtă. Această situație are drept corolar consecințe asupra unghiului de evazare a jetului și anume :

— pentru jeturile reci, cu cît temperatura lor este mai scăzută decît a mediului ambiant, cu atît unghiul de evazare este mai mic ;
— pentru jeturile calde cu cît temperatura lor este mai ridicată cu atît unghiul de evazare este mai mare.

8.10. RELAȚII PRACTICE DE CALCUL A MĂRIMILOR CARACTERISTICE JETURILOR CALDE

Aplicațiile tehnice ale jeturilor neizoterme sînt foarte numeroase. Se prezintă în continuare relații practice (experimentale) de calcul a mărimilor caracteristice.

Profilul jetului neizoterm. Determinarea traiectoriei unui jet neizoterm (cald sau rece) se poate face în ipoteza că axa vitezelor este suprapusă peste axa temperaturilor. Devierea axei unui jet neizoterm are loc sub acțiunea forțelor gravitaționale a căror intensitate este exprimată de criteriul lui Arhimede (8.78). Cercetările experimentale au condus la obținerea relației (8.125), care permite determinarea ordonatei adimensionale $Y = y/d_0$ a jetului în funcție de distanța de la gura jetului $X = x/d_0$ și unghiul α sub care este dirijat jetul. Ținînd seama de notațiile din figura 8.34, în care se reprezintă un jet cald :

$$Y = 0{,}9\ \mathrm{Ar}\left[\frac{X}{\cos\alpha}\right]^2\sqrt{\frac{ax}{\cos\alpha}} - X\operatorname{tg}\alpha \tag{8.125}$$

în care:

$$X = \frac{x}{d_0};\quad Y = \frac{y}{d_0};\quad \mathrm{Ar} = g\,\frac{T_0 - T_{mî}}{T_{mî}w_0^2}\,d_0$$

Ecuația traiectoriei axei unui jet neizoterm orizontal, determinată experimental, este

$$\frac{y}{\sqrt{A_0}} = 0{,}238\ \mathrm{Ar}\left[\frac{x}{\sqrt{A_0}}\right]^{2{,}5} \tag{8.126}$$

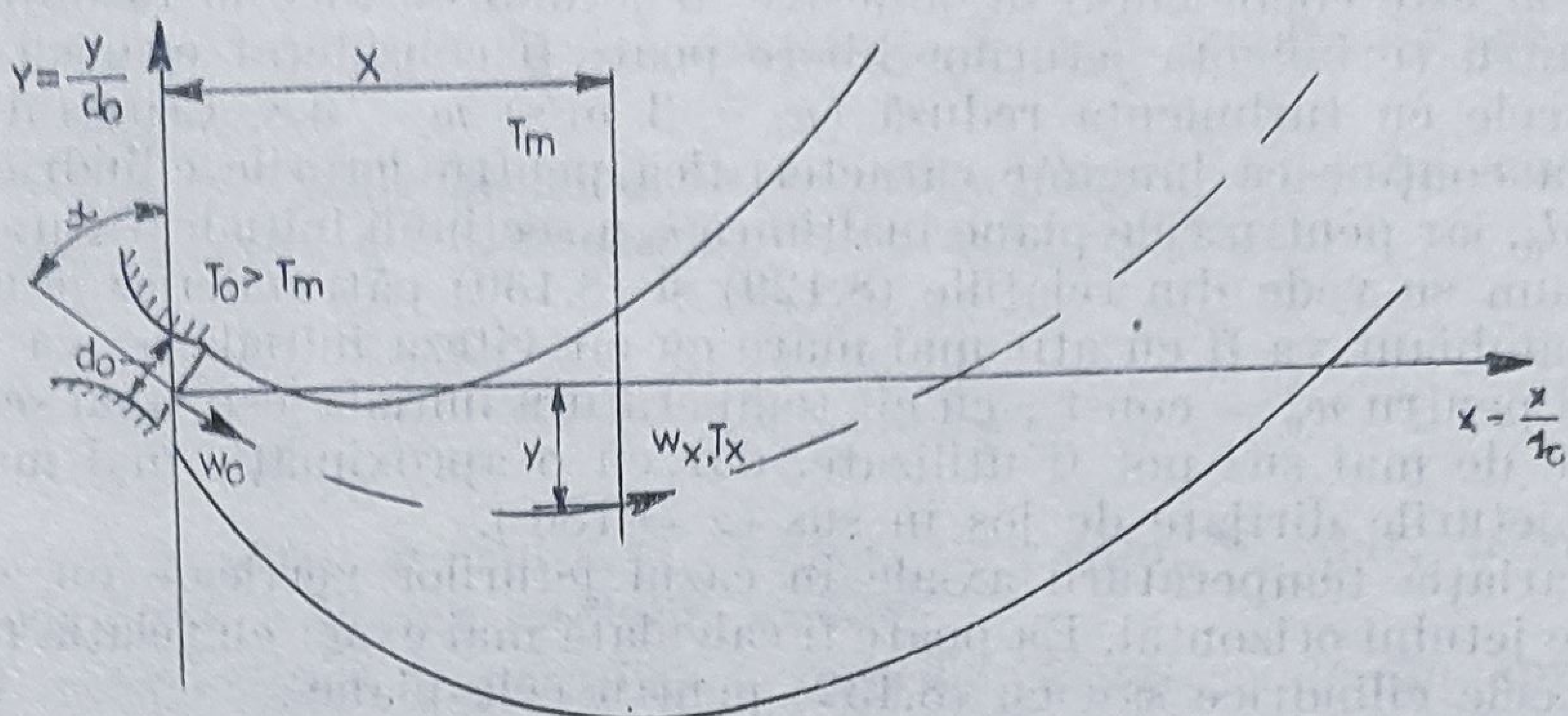


Fig. 8.34. Geometria unui jet neizoterm înclinat.

în care A_0 reprezintă secţiunea efectivă (liberă) a ajutajului de formare a jetului.

Deviaţia axei jetului la capătul bătăii lui (x_{lim}) este dată de relaţia

$$y_{x_{\lim}} = 0{,}238 A_0 g \frac{T_0 - T_{m\hat{i}}}{T_{m\hat{i}}} \frac{7{,}2^{2,5}\sqrt{w_0}}{w_{x_{\lim}}^{2,5}} \quad [\text{m}] \qquad (8.127)$$

Pentru jeturile neizoterme, se consideră ca valoare a bătăii (x_{lim}) secţiunea în care viteza în axa jetului este $w_x = 0{,}45$ m/s, deci mai mare decît a jetului izoterm considerată ca fiind egală cu 0,25 m/s. Acest lucru se datorește faptului că temperatura în axa jetului scade mai rapid decît viteza.

Temperatura la capătul jetului neizoterm. La capătul jetului neizoterm în axa jetului, temperatura poate fi calculată cu relaţia (8.128) determinată experimental :

$$T_{x_{\lim}} = T_{m\hat{i}} \pm \frac{\Delta T_0}{w_0^{1,25}} \quad [\text{K}] \qquad (8.128)$$

Semnul (+) din relaţia (8.128) se referă la jeturile calde, iar semnul (—) la cele reci.

Bătaia și temperatura T_x a jetului neizoterm cu direcţie iniţială verticală. Un caz particular este acela al jetului a cărui direcţie iniţială este verticală ($\alpha = 0°$). Cercetările experimentale privind bătaia jetului au dat rezultate destul de diferite, în funcţie de temperatura iniţială T_0. Totuși, pentru un calcul tehnic cu aproximaţie acceptabilă se poate folosi relaţia (8.129) pentru jeturile rotunde sau (8.130) pentru cele plane :

$$x_{lim} = 1{,}63 d_0 \sqrt{\frac{1}{m\text{Ar}}} \quad [\text{m}] \qquad (8.129)$$

$$x_{lim} = 1{,}1 h_0 \sqrt{\frac{1}{m\text{Ar}^2}} \quad [\text{m}] \qquad (8.130)$$

în care m este coeficientul de amestec al jetului cu mediul înconjurător, care pentru turbulența jeturilor libere poate fi considerat egal cu 1, iar pentru cele cu turbulență redusă ($w_0 < 3$ m/s) $m = 0,8$. Criteriul Arhimede va conține ca lungime caracteristică pentru jeturile cilindrice diametrul d_0, iar pentru cele plane înălțimea h_0 a secțiunii inițiale (figura 8.17). După cum se vede din relațiile (8.129) și (8.130) pătrunderea jetului în mediul ambiant va fi cu atît mai mare cu cît viteza inițială w_0 va fi mai mare, și pentru $w_0 =$ const., cu cît temperatura inițială este mai scăzută. Relațiile de mai sus pot fi utilizate, dar cu o aproximație mai mare, și pentru jeturile dirijate de jos în sus ($\alpha = 180°$).

Variația temperaturii axiale în cazul jeturilor verticale nu ascultă de legile jetului orizontal. Ea poate fi calculată mai exact cu relația (8.131) pentru cele cilindrice sau cu (8.132) pentru cele plane:

$$\frac{T_x - T_{mî}}{T_0 - T_{mî}} = \frac{3}{4}\frac{d_0}{xm} \tag{8.131}$$

$$\frac{T_x - T_{mî}}{T_0 - T_{mî}} = \frac{3}{4}\frac{h_0}{xm} \tag{8.132}$$

8.11 JETURI SUPERSONICE CALDE

La curgerea gazelor prin mașinile rotative sau reactive, jeturile formate la ieșirea din ajutaje sînt neizoterme (puternic încălzite) și au în același timp viteze inițiale supersonice ($w_0 > a$). S-a constatat experimental că pentru curgerea subsonică cu viteză mare $w_0 > 0,4\,a$ sau supersonică, relațiile de calcul prezentate la jetul subsonic cu viteză mică ($w_0 < 0,4\,a$) nu pot fi folosite. Relațiile de calcul determinate experimental ce se pot folosi în cazul vitezelor mari $0,4\,a < w_0 < 2\,a$, sînt:

— pentru $0 < \dfrac{x}{d_0} \leqslant 1,2$:

$$\frac{w_x}{w_0} = 0,008\left(\frac{x}{a_0}\right)^{1,67} \tag{8.133}$$

— pentru $12 < \dfrac{x}{d_0} < 360$

$$\frac{w_x}{w_0} = \frac{8,26}{\left(\dfrac{x}{d}\right)^{1,137}} \tag{8.134}$$

Se constată:

a) pentru un diametru d_0 dat, bătaia jetului (x_{lim}) crește cu creșterea vitezei inițiale;

b) pentru o viteză inițială w_0 dată, bătaia jetului (x_{lim}) crește cu creșterea diametrului;

c) pentru un debit $\dot{V}_0$ dat, secțiunea inițială ascultă de ecuația de continuitate.

Dacă se cunoaște numai debitul volumetric $\dot{V}_0$ al jetului cu viteză mare, viteza de axă poată fi calulată cu relația (8.135):

$$w_x = \frac{10,52}{\varphi} \frac{\dot{V}_0}{d_0^{0,863} \cdot x^{1,137}} \tag{8.135}$$

În care $\varphi = w_{med}/w_0$. Se constată că pentru un debit $\dot{V}_0$ dat, bătaia lui crește odată cu scăderea secțiunii inițiale

O caracteristică importantă a jeturilor foarte calde, în special a celor formate la ieșirea din arzătoarele de gaze combustibile, este debitul de gaz absorbit de jet din mediul înconjurător. Acesta fiind aerul necesar combustiei va determina lungimea flăcării sau fiind gazele arse din focar va determina recirculația. În figura 8.35 se prezintă curbele de debit volumetric constant dintr-un jet liber neturbionat. După cum se vede nucleul de

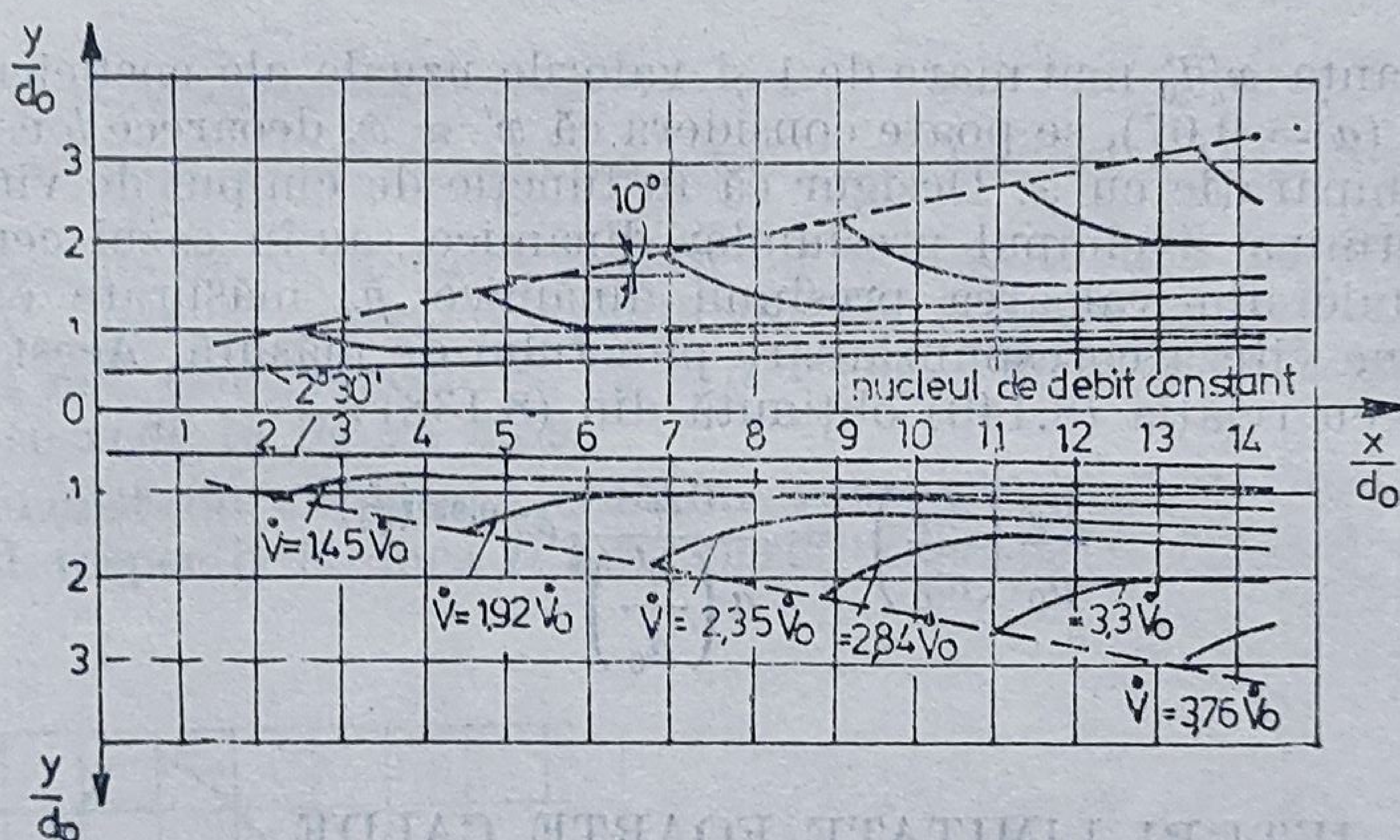


Fig. 8.35. Jet liber foarte cald.

debit se evazează cu 2°30′ iar granița de debit cu circa 20°. Debitul aspirat poate fi calculat cu expresia (8.136) obținută experimental pentru jeturi calde cu $w_0 \approx a$:

$$\frac{\dot{V} - \dot{V}_0}{\dot{V}_0} = 0,207 \frac{x}{d_0} \tag{8.136}$$

Ca urmare, viteza medie de curgere într-o secțiune oarecare a jetului, mărime foarte importantă din punct de vedere tehnic, avînd în vedere că dacă este cunoscută se poate ușor determina cu ecuația de continuitate

debitul total de gaz ce trece prin secţiunea respectivă, se determină cu relaţia

$$w_{med_{sect.}} = w_{med} \frac{1 + 0{,}207 \dfrac{x}{d_0}}{\left(1 + 0{,}353 \dfrac{x}{d_0}\right)^2} \tag{8.137}$$

Viteza w_y într-un punct oarecare de ordonată y al unei secţiuni aşezate la distanţa x' de gura ajutajului se calculează cu relaţia (8.138):

$$\frac{w_y}{w_0} = \frac{0{,}48}{a\left(\dfrac{x'}{d_0}\right)} \exp\left[-0{,}461 \frac{\left(\dfrac{y}{d_0}\right)^2}{a\left(\dfrac{x'}{d_0}\right)^2}\right] = \frac{0{,}48}{a\left(\dfrac{x'}{d_0}\right)} e^{-0{,}461\left(\frac{y}{ax'}\right)^2} \tag{8.138}$$

în care $x' = x + b$ iar b este polul jetului, dat de relaţia

$$b = 0{,}145 \frac{d_0}{a} \tag{8.139}$$

Pentu distanţa x/d_0 mai mare de 1 şi valorile uzuale ale coeficientului de turbulenţă ($a = 0{,}07$), se poate considera că $x' \approx x$, deoarece b este foarte mic în comparaţie cu x. Desigur că în funcţie de cîmpul de viteze w se poate determina şi cîmpul presiunilor dinamice, sau în cazul cercetărilor experimentale din valoarea presiunii dinamice p_y măsurate efectiv să se determine viteza corespunzătoare punctului de măsură. Acest lucru se poate face cu relaţia (8.140) obţinută din (8.138):

$$\frac{p_y}{p_0}\left(\frac{w_y}{w_0}\right)^2 = \frac{0{,}23}{a\left(\dfrac{x'}{d_0}\right)^2} e^{-0{,}922\left(\frac{y}{ax}\right)^2} \tag{8.140}$$

8.12. JETURI LIMITATE FOARTE CALDE

În aplicaţiile tehnice ale jeturilor foarte calde (de exemplu în focare), se întîlneşte foarte des cazul izbirii jetului de un perete aşezat perpendicular pe axa sa (peretele de fund al focarului) sau de unul aşezat axial (ecranul lateral de ţevi sau peretele lateral al focarului).

Se consideră cazul curgerii jetului printr-un canal de diametru D. S-a constatat experimental că apare o descreştere mai rapidă a vitezei pe direcţia de curgere, ba chiar o întoarcere a direcţiei ei, aşa cum se vede în figura 8.36.

Ca urmare a vitezei de sens contrar, va apărea şi o recirculaţie de gaz în secţiune. Pentru ilustrarea fenomenului, în figura 8.37 se reprezintă curbele de debit constant, iar în figura 8.38 debitul absorbit şi cel recir-

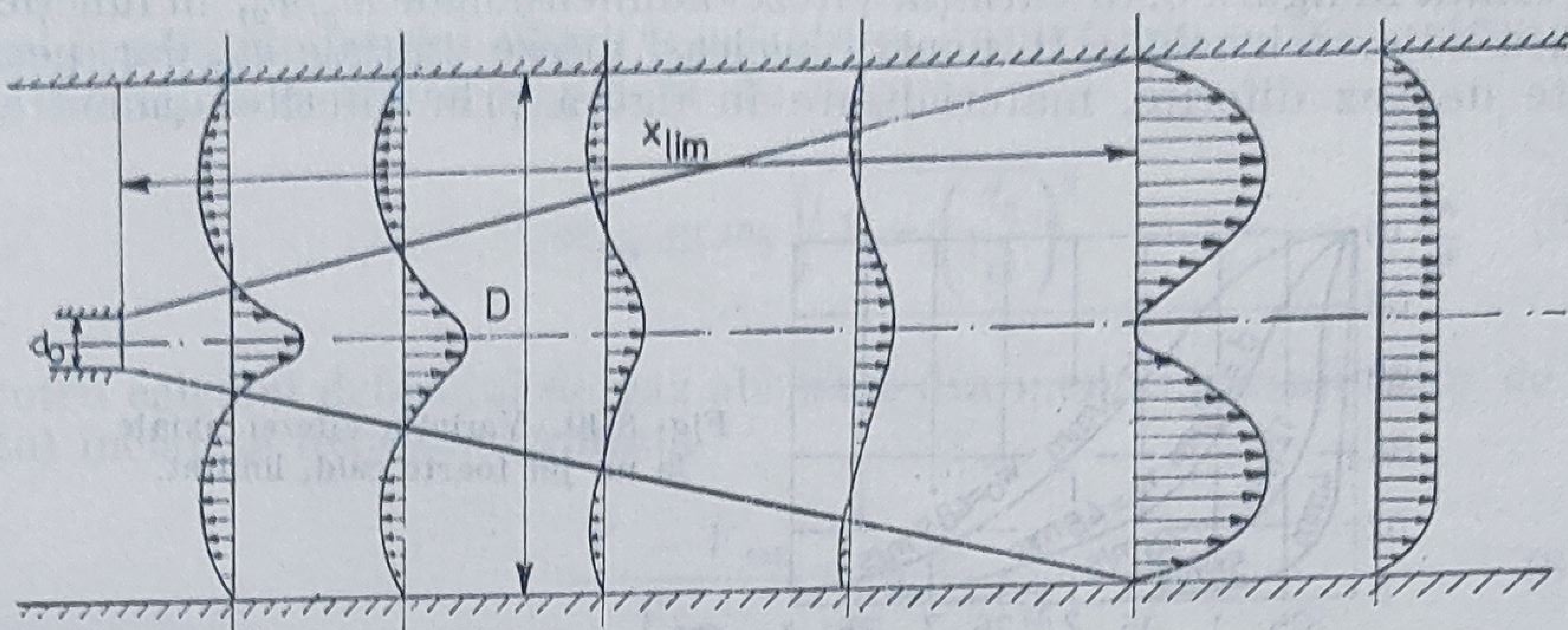


Fig. 8.36. Jet foarte cald limitat în toate direcţiile.

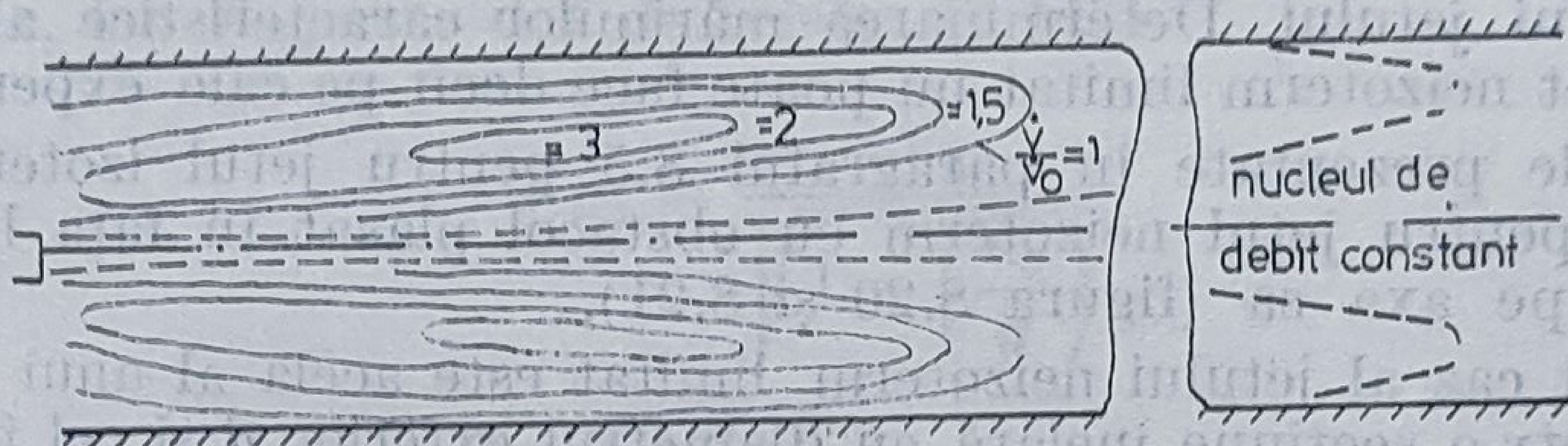


Fig. 8.37. Recirculaţia gazului într-un jet foarte cald limitat în toate direcţiile.

culat în funcţie de distanţa x, pentru un jet foarte cald. Ca urmare a recirculaţiei, ipoteza constanţei cantităţii de mişcare în toate secţiunile jetului nu mai este respectată, ea avînd valori diferite în lungul axei x, aşa cum se vede în figura 8.39.

S-a constatat că bătaia jetului neizoterm limitat lateral depinde de diametrul, respectiv lăţimea D între pereţii limitativi. Cu titlu informativ,

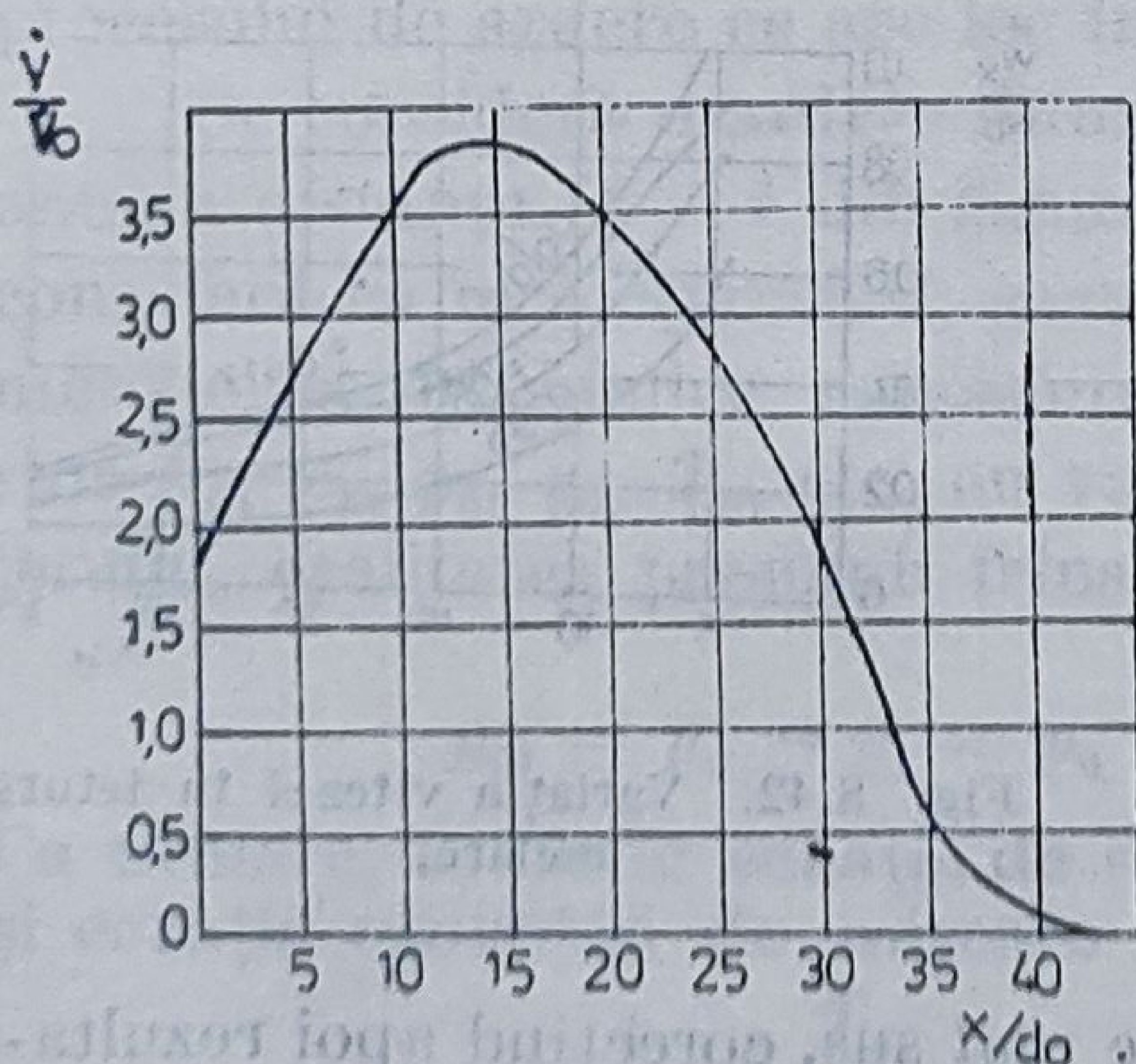


Fig. 8.38. Debitul de gaz absorbit de un jet limitat foarte cald.

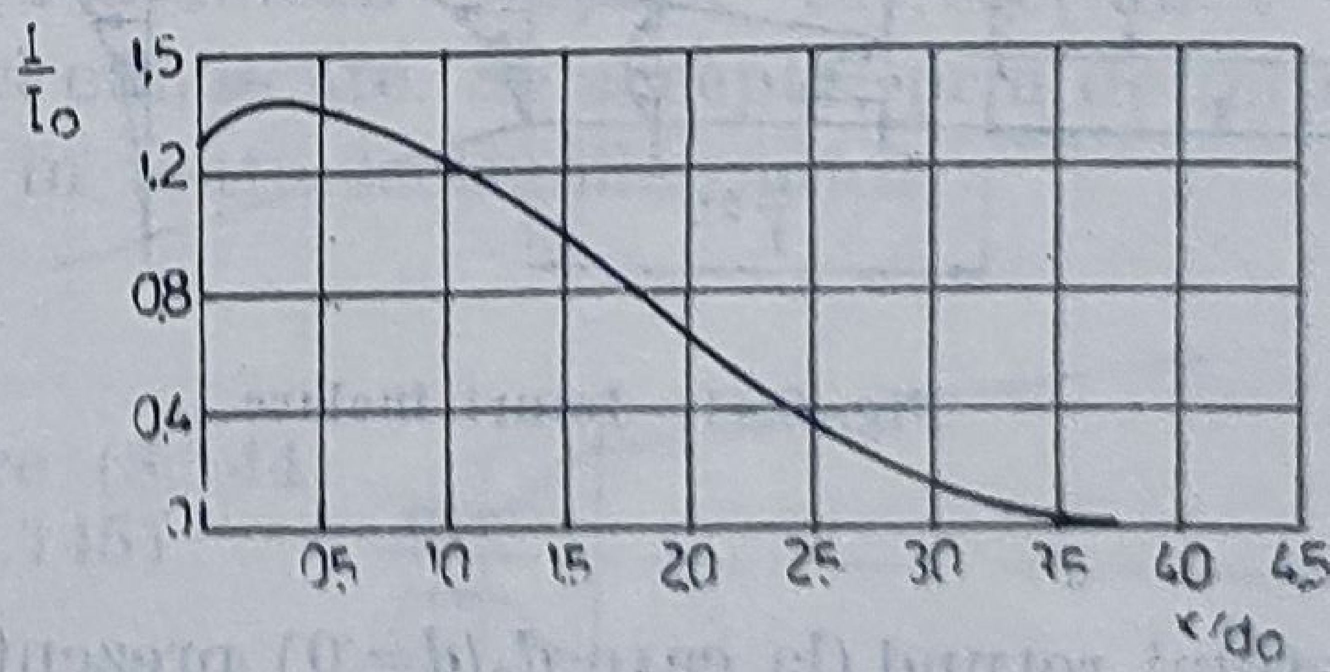


Fig. 8.39. Variaţia impulsului într-un jet limitat foarte cald.

se prezintă în figura 8.40 variaţia vitezei adimensionale w_x/w_0, în funcţie de lăţimea adimensională x/D pentru aceleaşi viteze iniţiale w_0, dar pentru debite de gaz diferite, materializate în figură prin diferite diametre d_0

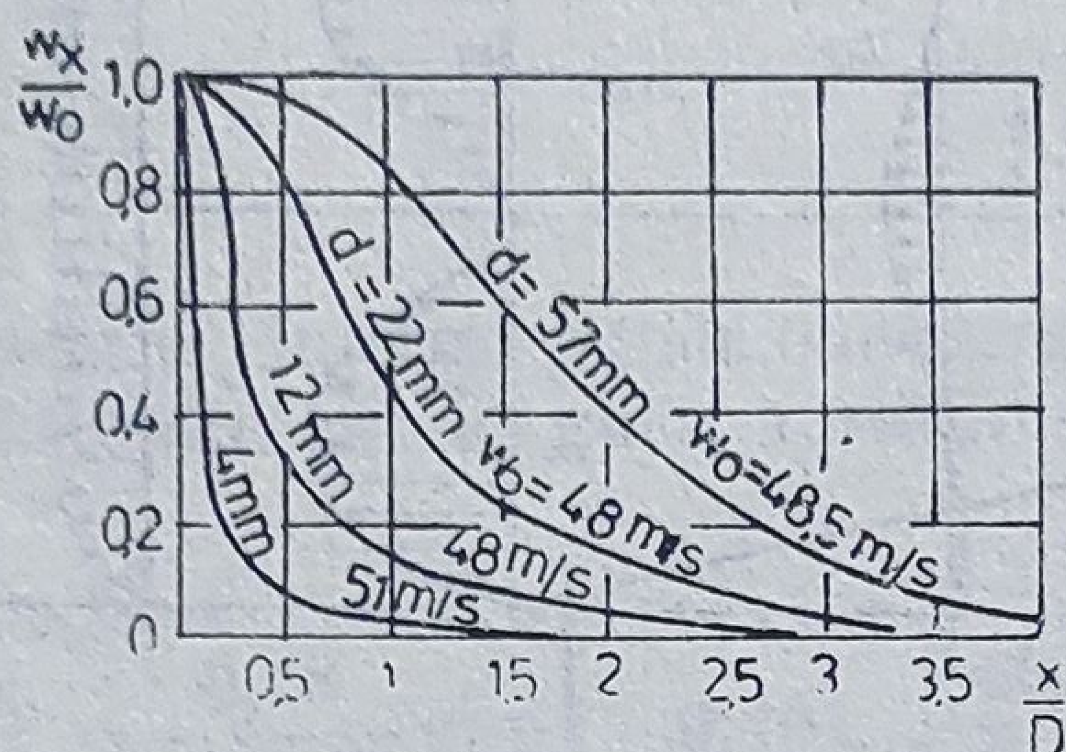


Fig. 8.40. Variaţia vitezei axiale la un jet foarte cald, limitat.

ale ajutajului jetului. Determinarea mărimilor caracteristice ale acestui sistem de jet neizoterm limitat nu poate face decît pe cale experimentală.

Cele prezentate în paragraful 8.5 pentru jetul izoterm rămîn valabile şi pentru jetul neizoterm cu obstacol plasat în faţa lui îi perpendicular pe axa sa (figura 8.20 şi 8.21).

Un alt caz al jetului neizoterm limitat este acela al unui jet ce se formează într-o secţiune inelară, cu diametrul exterior d şi cel interior d_0, aşa cum se arată în figura 8.41. S-a constatat experimental că după o distanţă $x/D \approx 5$, toate jeturile pentru care $0 < d_0/d \leqslant 0{,}8$ capătă caracteristicile unui jet axial simetric obişnuit. Scăderea vitezei axiale după distanţa $x > 5d$ este o funcţie de depărtarea x, dar şi de raportul d_0/d pentru o viteză iniţială constantă (w_0 = const.).

În figura 8.42 se prezintă variaţia vitezei axiale a unui jet neizoterm axial-simetric şi a jetului inelar pentru diferite valori ale raportului d_0/d. Ca urmare, calculul mărimilor unui astfel de jet se va face cu relaţiile

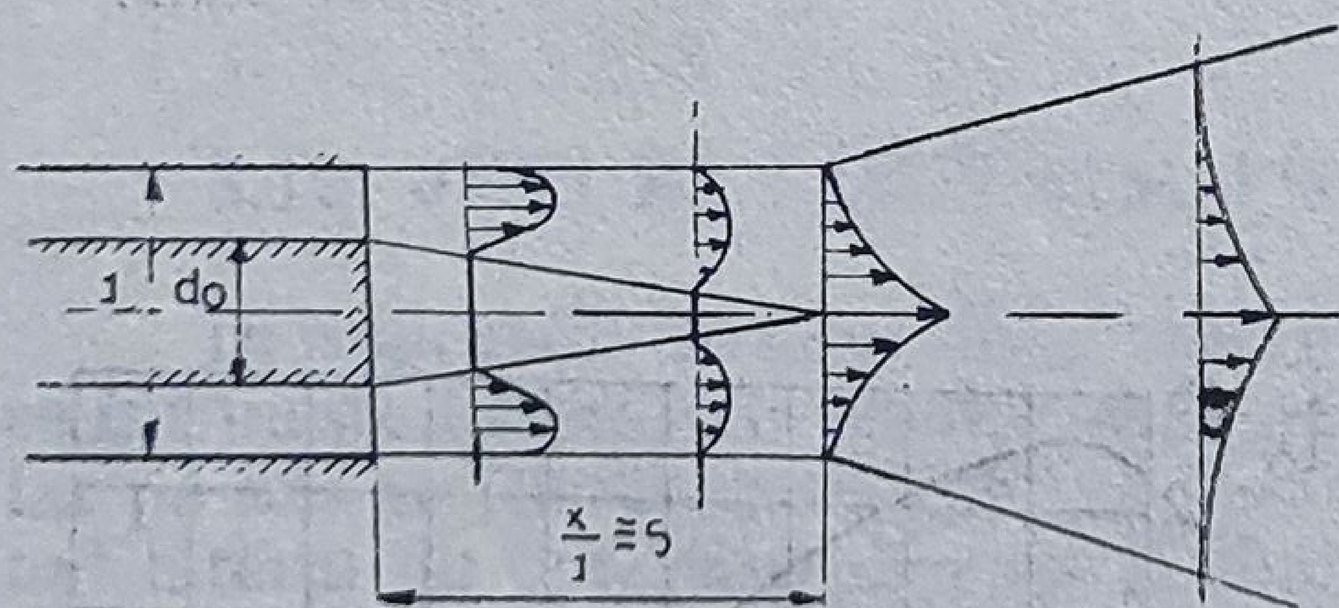


Fig. 8.41. Jeturi inelare.

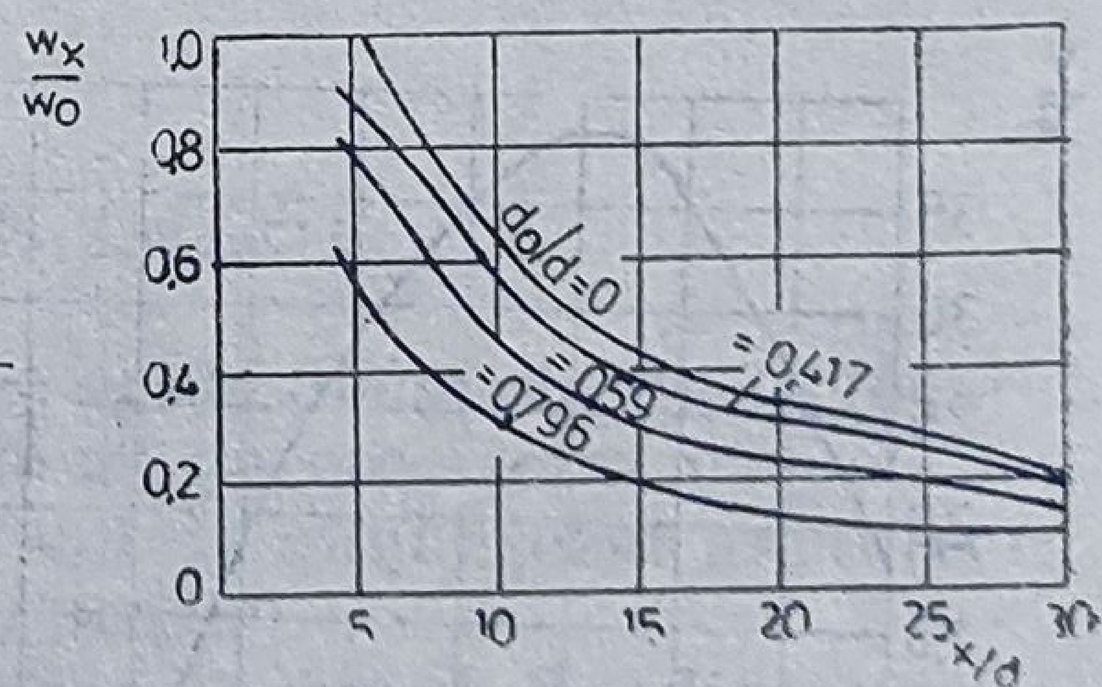


Fig. 8.42. Variaţia vitezei în jeturi inelare.

jetului rotund (la care $d_0/d=0$) prezentate mai sus, corectînd apoi rezultatele obţinute cu un factor de corecţie ce se obţine din diagrama reprezentată în figura 8.42. În cazul cînd este necesar un calcul exact, se face

apel la relațiile jetului cilindric neizoterm, raportîndu-se însă viteza axială w_x sau w_y la o viteză w_{ech} dată de relația

$$w_{ech} = w_0 \sqrt{1 - \left(\frac{d_0}{d}\right)^2} \tag{8.141}$$

Pentru calculul debitului de gaz absorbit din mediul înconjurător de către jetul inelar se folosește expresia

$$\frac{\dot{V} - \dot{V}_{ech}}{\dot{V}_{ech}} = 0{,}25\ \frac{x}{d} \tag{8.142}$$

în care $\dot{V}$ este debitul volumetric ce trece prin secțiunea jetului așezată la distanța x, iar $\dot{V}_{ech}$ este dat de relația (8.143):

$$V_{ech} = \frac{V_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_0}{d}\right)^2}} \tag{8.143}$$

8.13. JET DE FLACĂRĂ DIFUZIVĂ

Pînă acum, prin jet neizoterm, s-a înțeles un jet de gaz perfect, încălzit sau răcit înainte de ieșirea lui din ajutajul respectiv. Jetul de flacără este tot un jet neizoterm, dar care se încălzește după ce gazul a ieșit din secțiunea de formare a lui. Deci gazul perfect iese cu viteza w_0 la o temperatură egală cu a mediului ambiant, deci jet izoterm, iar după terminarea procesului de ardere ce are loc în gazul în curgere el devine jet neizoterm.

Se consideră o ardere difuzivă cu o lungime a flăcării foarte scurtă, anume distanța $O - 1$ din figura 8.43. Pentru simplificarea calculelor se consideră că în secțiunea 1, gazul are o temperatură T_1 determinată prin metode termochimice cunoscute. Parametrii inițiali, în secțiunea O sînt R_0, w_0, p_0, ρ_0, T_0, etc, cu valori cunoscute. Se acceptă, prin definiția jetului, egalitatea presiunii frînate în toate secțiunile, adică

$$p_{01} = p_0 \rightarrow p_1 = p_0$$

Ca urmare, se obțin ecuația de stare (8.144) și ecuația cantității de mișcare (8.145):

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{T_0}{T_1} \tag{8.144}$$

$$\dot{m}_1 \cdot w_1 = \dot{m}_0 \cdot w_0 \tag{8.145}$$

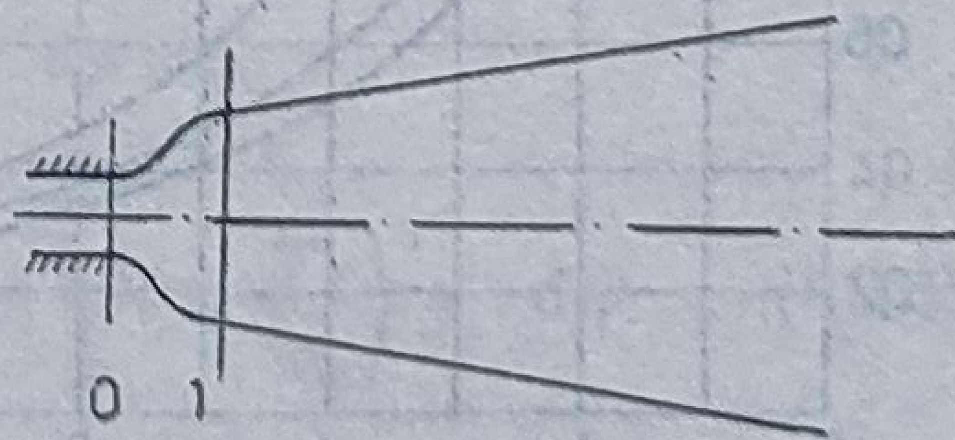


Fig. 8.43. Jet de flacără difuzivă.

Considerînd secţiunea O foarte apropiată de 1, se poate neglija absorbţia din mediul înconjurător, deci se consideră că debitul masic de gaz $\dot{m}_1 = \dot{m}_0$. Deci ecuaţia de continuitate are forma

$$\rho_1 A_1 w_1 = \rho_0 A_0 w_0$$

Din relaţia (8.145) rezultă că pentru $\dot{m}_1 = \dot{m}_0$ şi $w_1 = w_0$, ecuaţia de continuitate capătă forma

$$\rho_1 A_1 = \rho_0 A_0$$

Ţinînd seamă şi de (8.144) se obţine raza stratului limită a jetului în secţiunea 1:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_0}; \quad \frac{R_{gr1}}{R_{gr0}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} \tag{8.146}$$

Deci se poate considera că secţiunea 1 este un ajutaj fictiv de formare a unui jet neizoterm, cu toate mărimile caracteristice cunoscute. De aici înainte jetul este considerat neizoterm, cu mărimile caracteristice R_1, T_1, ρ_1, $w_1 = w_0$, $\dot{m}_1 = \dot{m}_0$, etc. Ca urmare, calculul lui se va face cu relaţiile cunoscute. Astfel viteza axială w_x şi viteza în secţiune w_y, în funcţie de temperatura adimensională a jetului, se obţin cu relaţia (8.147) şi notaţiile de mai sus:

$$\frac{a \cdot x}{R_{gr1}} = \frac{w_1}{w_x}\sqrt{0{,}495\left(1 - \frac{T_{mî}}{T_1}\right)\frac{w_x}{w_1} + 0{,}93\,\frac{T_{mî}}{T_1}} \tag{8.147}$$

Dacă se ţine seama de relaţia (8.146), expresia (8.147) devine (8.148), în care mărimile caracteristice sînt exprimate în funcţie de mărimile iniţiale:

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{w_0}{w_x}\sqrt{0{,}495\,\frac{T_1 - T_{mî}}{T_0}\,\frac{w_x}{w_0} + 0{,}93\,\frac{T_{mî}}{T_0}} \tag{8.148}$$

În cazul particular cînd $T_0 = T_{mî}$, relaţia (8.148) devine

$$\frac{ax}{R_0} = \frac{w_0}{w_x}\sqrt{0{,}495\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)\frac{w_x}{w_0} + 0{,}93} \tag{8.149}$$

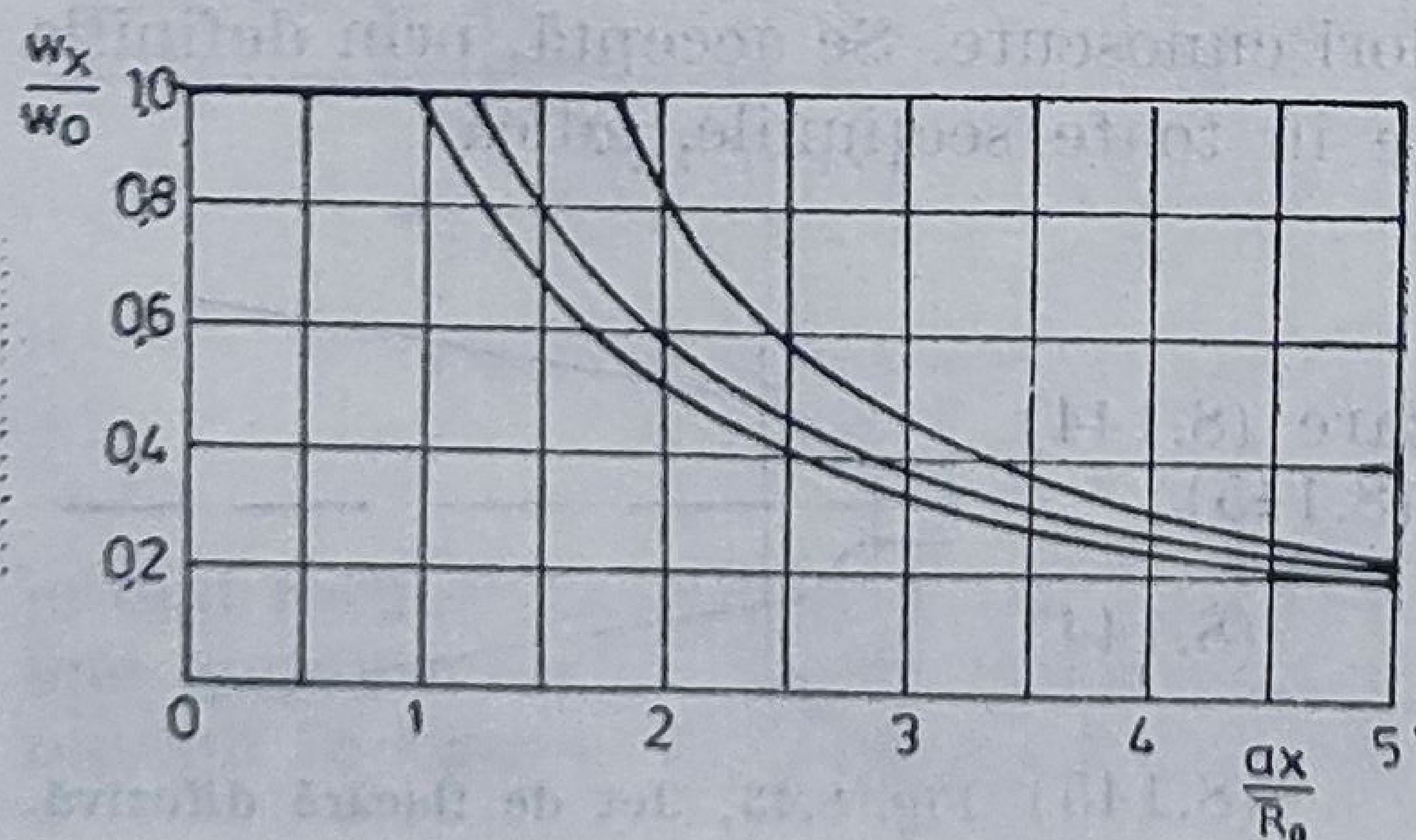


Fig. 8.44. Variaţia vitezei axiale într-un jet de flacără.

Cu relaţia 8.148 s-a întocmit diagrama din figura 8.44, care permite calcularea vitezei adimensionale w_x/w_0 în funcţie de distanţa adimensională ax/R_0.

8.14. JETURI BIFAZICE IZOTERME

Prin jet bifazic, din punct de vedere tehnic, se înţelege jetul care conţine în masa lui picături de lichid sau particule solide de dimensiuni mici în suspensie. Astfel de jeturi se întîlnesc în ejectoarele cu vapori de apă sau fluide organice, în injectoarele de combustibil lichid sau solid pulverizat, în ejectoarele de transport pneumatic etc. Din punct de vedere volumetric, raportul dintre volumul particulelor şi cel al gazului este atît de mic încît se poate considera că jetul este format numai din faza gazoasă, dar din punct de vedere gravimetric raportul dintre masa particulelor şi cea a gazului este foarte apropiat de unitate.

Se admite ipoteza că viteza de deplasare a particulelor este egală cu aceea a gazului, în orice secţiune.

Deoarece raportul maselor este aproape unitar, impulsul unui jet bifazic va trebui să ţină seama de prezenţa particulelor şi ca urmare el va avea o altă expresie de calcul şi deci o altă valoare decît a jetului format numai din gaz. Cantitatea de mişcare a unui jet bifazic, presupusă constantă în lungul lui, este dată de expresia

$$\int_0^A \rho_g(1 + C_y)w_y^2 \mathrm{d}A = \dot{m}_g w_{0g} + \dot{m}_p w_{0p} = \text{Const.} \qquad (8.150)$$

în care ρ_g, $\dot{m}_g$, w_{0g}, sînt respectiv densitatea, masa şi viteza iniţială a gazului; $\dot{m}_p$, w_{0p} — masa şi viteza iniţială a particulelor nedeformabile (îngheţate) de fază lichidă sau solidă; C_y este concentraţia locală a amestecului (în punctul y); $\mathrm{d}A$ — un element de suprafaţă din secţiunea jetului, care pentru jetul cu secţiune iniţială cilindrică are expresia

$$\mathrm{d}A = 2\pi y \mathrm{d}y = 2\pi(ax)^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi$$

în care a este coeficientul de turbulenţă; $\varphi = y/ax$.

Deci pentru un jet cilindric, ecuaţia impulsului capătă forma

$$2\pi(ax)^2\rho_g w_x^2 \int_0^{\varphi_{gr}} \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 (1 + C_y)\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \dot{m}_g w_{0g}\left(1 + \frac{\dot{m}_p}{\dot{m}_g}\frac{w_{0p}}{w_{0g}}\right) \qquad (8.151)$$

Integrala din (8.151) se poate scrie sub forma

$$\int_0^{\varphi_{gr}} \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 (1 + C_y)\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\varphi_{gr}} \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \varphi \cdot \mathrm{d}\varphi + \int_0^{\varphi_{gr}} C_y \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \varphi \cdot \mathrm{d}\varphi \qquad (8.152)$$

Deoarece, aşa cum s-a spus mai înainte un jet bifazic se poate considera că este format numai din faza gazoasă, viteza adimensională w_y/w_x este funcţie numai de ordonata adimensională, deci se poate scrie

$$\frac{w_y}{w_x} = f(\varphi).$$

Prin ipoteză, s-a considerat o egalitate între viteza gazului şi a particulelor în orice punct al jetului şi, ca urmare, integralele din relaţia (8.152) se pot calcula cu ajutorul tabelului 8.3. Astfel:

$$\int_0^{\varphi} \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \varphi \cdot d\varphi = \varphi_{gr}^2 \int_0^1 \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 \eta \cdot d\eta = 3{,}4^2 \int_0^1 \left(\frac{w_x}{w}\right)^2 \eta \cdot d\eta = 0{,}535 \qquad (8.153)$$

Înlocuirea lui φ prin η a fost posibilă avînd în vedere că prin definiţie $\varphi/\varphi_{gr} = y/R_{gr} = \eta$, iar valoarea lui φ_{gr} s-a obţinut din relaţia (8.118).

Presupunînd că în axa jetului concentraţia mediului ambiant este $C_m = 0$, deci $\Delta C_x = C_x$ şi $\Delta C_y = C_y$, din expresia (8.95) se obţine:

$$\frac{C_y}{C_x} = \sqrt{\frac{w_y}{w_x}}$$

Ca urmare, exprimînd pe C_y în funcţie de C_x se obţine

$$C_x \int_0^{\varphi_{gr}} \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^{2,5} \varphi \cdot d\varphi = C_x \cdot \varphi_{gr}^2 \int_0^1 \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^{2,5} \eta \cdot d\eta = 0{,}415 C_x \qquad (8.154)$$

Din relaţiile (8.96) şi (8.114) se obţine

$$\frac{C_x}{C_0} = 0{,}72 \frac{w_x}{w_0} \qquad (8.155)$$

Ca urmare, pentru ecuaţia de conservare a impulsului se obţine forma:

$$2\pi(ax)^2 \rho_g w_x^2 \int_0^{\varphi_{gr}} \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2 (1 + C_y)\varphi \cdot d\varphi =$$

$$= 2\pi(ax)^2 \rho_g w_x^2 \left(0{,}535 + 0{,}3\, C_0 \frac{w_x}{w_{0g}}\right)$$

sau ţinînd seamă de expresia (8.151):

$$\dot{m}_g \cdot w_{0g} \left(1 + \frac{m_p}{m_0} \frac{w_{0p}}{m_{0g}}\right) = \pi\, R_0^2 \rho_g w_{0g}^2 (1 + C_0 \cdot \nu_0)$$

în care: $\nu_0 = \frac{w_{0p}}{w_{0g}}$ este raportul dintre viteza particulelor și a gazului în secțiunea inițială, iar $C_0 = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_g}$.

Introducînd expresiile de mai sus în relația (8.151) și aranjînd convenabil termenii, se obține legea de variație a vitezei axiale a unui jet bifazic, exprimată prin relația (8.156):

$$2\pi(ax)^2 \rho_g w_x^2 \left(0,535 + 0,3C_0 \frac{w_x}{w_0}\right) = \pi \cdot R_0^2 \rho_g w_{0g}(1 + C_0 \cdot \nu_0)$$

$$\frac{ax}{R_0} = 0,96 \frac{w_{0g}}{w_x} \frac{\sqrt{1 + C_0 \nu_0}}{\sqrt{1 + 0,56 C_0 \frac{w_x}{w_{0g}}}} \tag{8.156}$$

După cum se vede, pentru un jet monofazic (gazos) cînd $C_0 = 0$ relația (8.156) devine (8.54). Din relația (8.156), se constată că modificarea vitezei axiale a jetului bifazic depinde de concentrația inițială C_0 și de raportul dintre vitezele inițiale ale celor două faze.

În tehnică, cel mai des se întîlnesc două cazuri limită și anume:

1. Cazul jetului bifazic omogenizat înainte de formarea lui, în care la ieșirea din ajutajul de formare atît faza gazoasă cît și particulele au aceeași viteză inițială ($w_{0g} = w_{0p}$).
În acest caz relația (8.156) capătă forma (8.157) și este prezentată grafic în figura 8.45.

$$\frac{a \cdot x}{R_0} = 0,96 \frac{w_0}{w_x} \sqrt{\frac{1 + C_0}{1 + 0,56 \cdot C_0 \frac{w_x}{w_0}}}\Bigg|_{w_{0g} = w_{0p}} \tag{8.157}$$

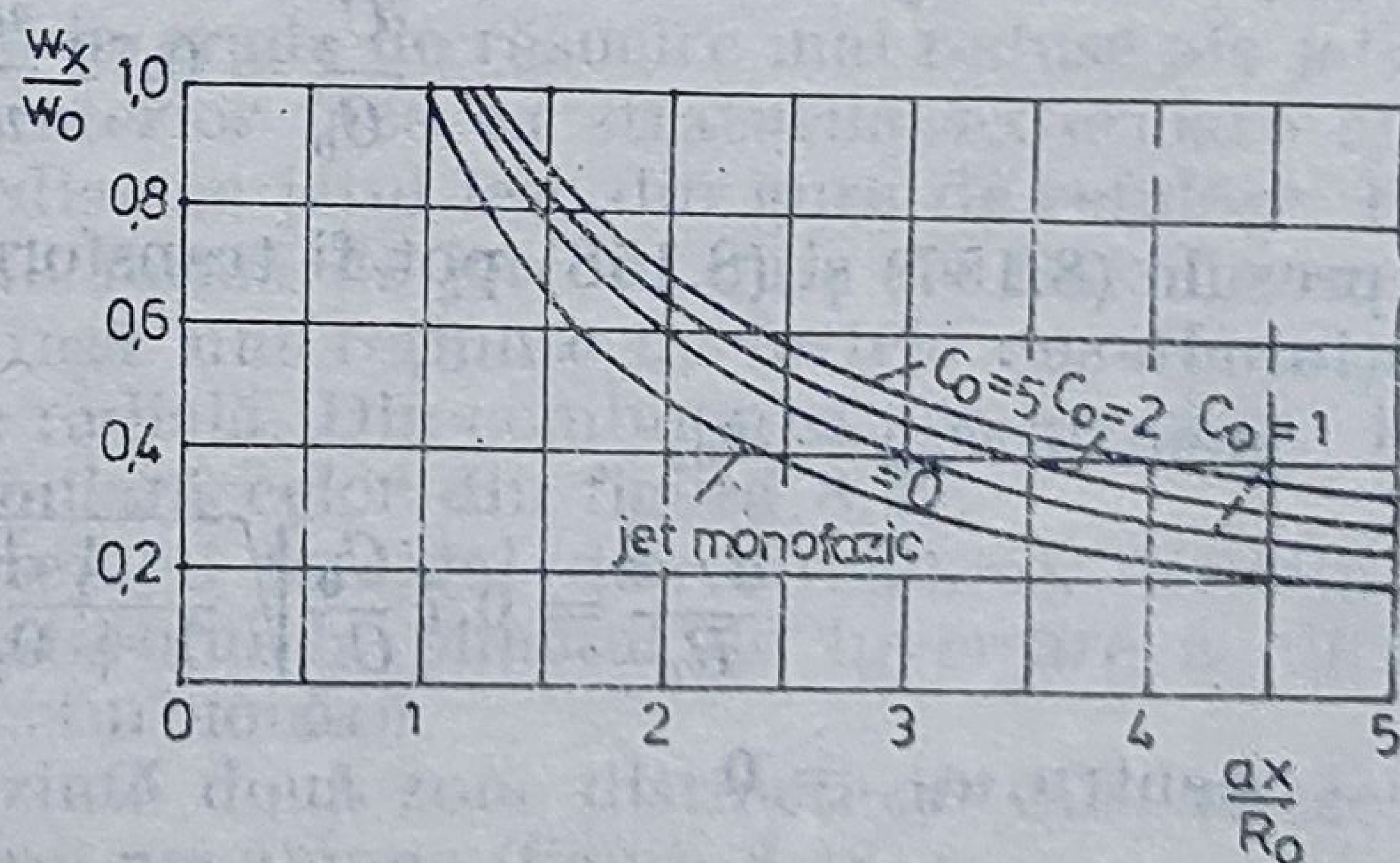


Fig. 8.45. Variația vitezei axiale într-un jet bifazic.

2. Cazul jetului bifazic la care viteza inițială a particulelor este egală cu zero ($w_{0p} = 0$). Din punct de vedere fizic, aceasta înseamnează că la gura de formare jetul este monofazic gazos, iar particulele solide sînt absorbite din mediul înconjurător chiar în secțiunea inițială sau

introduse mecanic în ea. În aceste condiții numărătorul fracției de sub radical devine egal cu unitatea, deoarece $w_0 = 0$ și $\nu_0 = 0$, iar relația (8.156) capătă forma simplă (8.158). Expresia (8.158) este reprezentată și grafic în figura 8.46 :

$$\frac{a \cdot x}{R_0} = \frac{0{,}96}{\frac{w_x}{w_{0g}} \sqrt{1 + 0{,}56 \cdot C_0 \frac{w_g}{w_{0g}}}} \Bigg|_{w_0p=0} \tag{8.158}$$

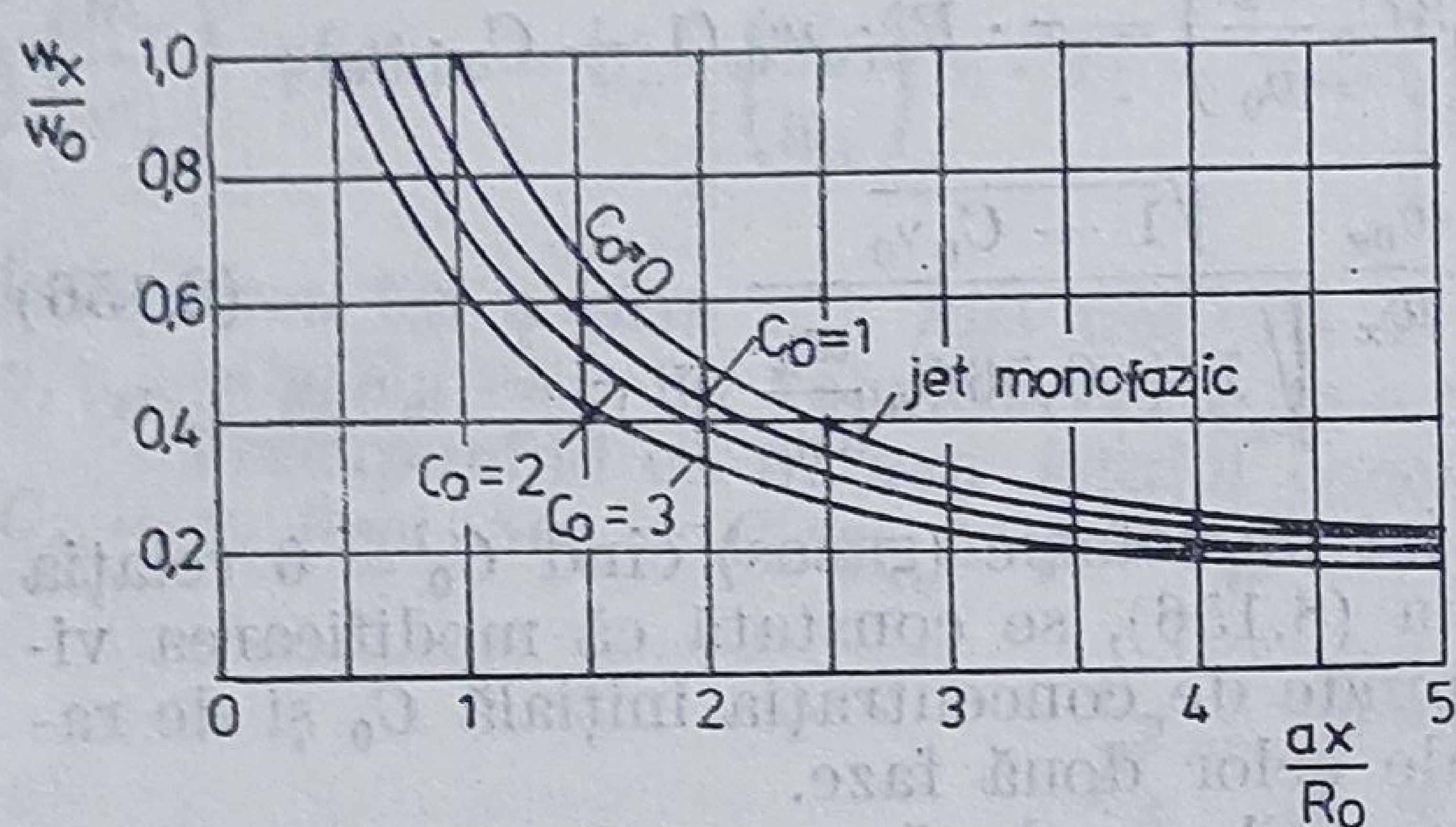


Fig. 8.46. Variația vitezei axiale într-un jet bifazic ce antrenează faza lichidă.

După cum se vede din figurile 8.45 și 8.46, particulele solide sau lichide indeformabile din jetul de gaz măresc impulsul lui dacă $w_{0p} = w_{0g}$, ducînd la o bătaie mai mare a jetului cu cît concentrația este mai mare, sau la scăderea impulsului în cazul cînd particulele sînt introduse în secțiunea inițială cu o vitetă $w_{0p} \approx 0$. Această frînare a jetului în cel de al doilea caz se datorește faptului că jetul gazos trebuie să cheltuiească din energia inițială a lui pentru antrenarea particulelor.

Ținînd seama că între viteza și concentrația axială există o proporționalitate dată de relația

$$\frac{C_x}{C_0} = 0{,}72 \frac{w_x}{w_0} \tag{8.159}$$

expresiile (8.157) și (8.158) pot fi transformate în funcție de concentrație, obținîndu-se :

pentru $w_{0p} = w_{0g}$

$$\frac{a \cdot x}{R_0} = 0{,}7 \frac{C_0}{C_x} \sqrt{\frac{1 + C_0}{1 + 0{,}77 \cdot C_x}} \Bigg|_{\nu=1} ; \tag{8.160}$$

pentru $w_{0p} = 0$

$$\frac{a \cdot x}{R_0} = \frac{0{,}7 \cdot C_0}{C_x \sqrt{1 + 0{,}77 \cdot C_x}} \Bigg|_{w_{0p}=0} \tag{8.161}$$

Desigur că scăderea concentrației în funcție de mărirea distanței x se datorește absorbției de mediu înconjurător de către jet.

8.15. STRUCTURA JETURILOR TURBIONATE ŞI TEHNICI FOLOSITE PENTRU GENERAREA LOR

Curgerile turbulente libere cu mişcare de rotaţie (curgeri turbionate sau răsucite) pot fi întîlnite sub diferite forme: curgeri în spatele unui corp cu mişcare de rotaţie ce se deplasează într-un fluid (de exemplu siajele ce se formează în spatele unui profil care se roteşte); jeturi cărora li se imprimă o mişcare de rotaţie înainte de ieşirea dintr-un ajutaj; jeturi care pătrund în medii aflate în mişcare de rotaţie, ş.a.

Dintre aceste tipuri de curgeri, o largă aplicare o au jeturile turbionate ce ies dintr-un dispozitiv de turbionare şi se dezvoltă într-un mediu fluid staţionar sau în mişcare.

În comparaţie cu jeturile drepte (nerăsucite), jeturile turbionate au un unghi de evazare mai mare, o adîncime de penetrare (lungime axială) mai mică şi o capacitate de ejecţie-absorbţie mărită. De asemenea, presiunea statică pe toată întinderea jetului este mai mică decît presiunea mediului înconjurător, iar cantităţile de fluid antrenate în mişcare sînt mai mari, ceea ce permite o amestecare mai bună pe distanţe mai scurte.

Mişcarea jetului turbionat este o combinaţie complexă a două mişcări: o mişcare de translaţie turbulentă (tip jet liber turbulent nerăsucit) şi o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară ω. Ca urmare, în afara componentelor axiale şi radiale ale vitezei, curgerea turbionară a jetului prezintă şi o componentă tangenţială, iar procesul de curgere este influenţat de gradienţi radiali de presiune statică. Comportarea aerodinamică a jetului turbionat poate fi caracterizată cu ajutorul a două mărimi: cantitatea de mişcare (sau impulsul axial) şi momentul cantităţii de mişcare, care în cursul evoluţiei jetului se pot considera, cu o bună aproximare, că rămîn constante (legea conservării impulsului şi momentului cantităţii de mişcare).

În cazul jeturilor turbionate rotunde, care prezintă un grad mediu sau ridicat de turbionare, ca şi în cazul jeturilor turbionate cu secţiune inelară (întîlnite frecvent la arzătoare) se produc vîrtejuri axial simetrice interioare (persistente chiar şi la grade de răsucire mai reduse ale jetului). Prezenţa vîrtejului toroidal interior face ca straturile exterioare ale jetului să expandeze rapid imediat ce jetul iese din gura de refulare. Particulele fluidului care curge sub formă de jet din gura de refulare au tendinţa de a zbura tangenţial însă sînt reţinute de forţele de vîscozitate şi supuse unei forţe de presiune radială. Din combinarea acestor efecte liniile de curent capătă o formă similară celor din figura 8.47.

Lungimea miezului vîrtejului toroidal (de recirculare), definită prin distanţa de la gura turbionatorului la punctul de inversare a direcţiei curgerii, creşte cu creşterea turbionării.

Curentul turbionat prezintă două zone distincte în care vitezele de rotaţie variază după legi diferite şi anume (figura 8.48):

— zona periferică (denumită şi zonă de vîrtej liber) prezentînd o mişcare potenţială $w_t \cdot r = \text{const.}$ (sau $w_t \cdot r^n = \text{const}$, unde $0 \leqslant n \leqslant 1$);

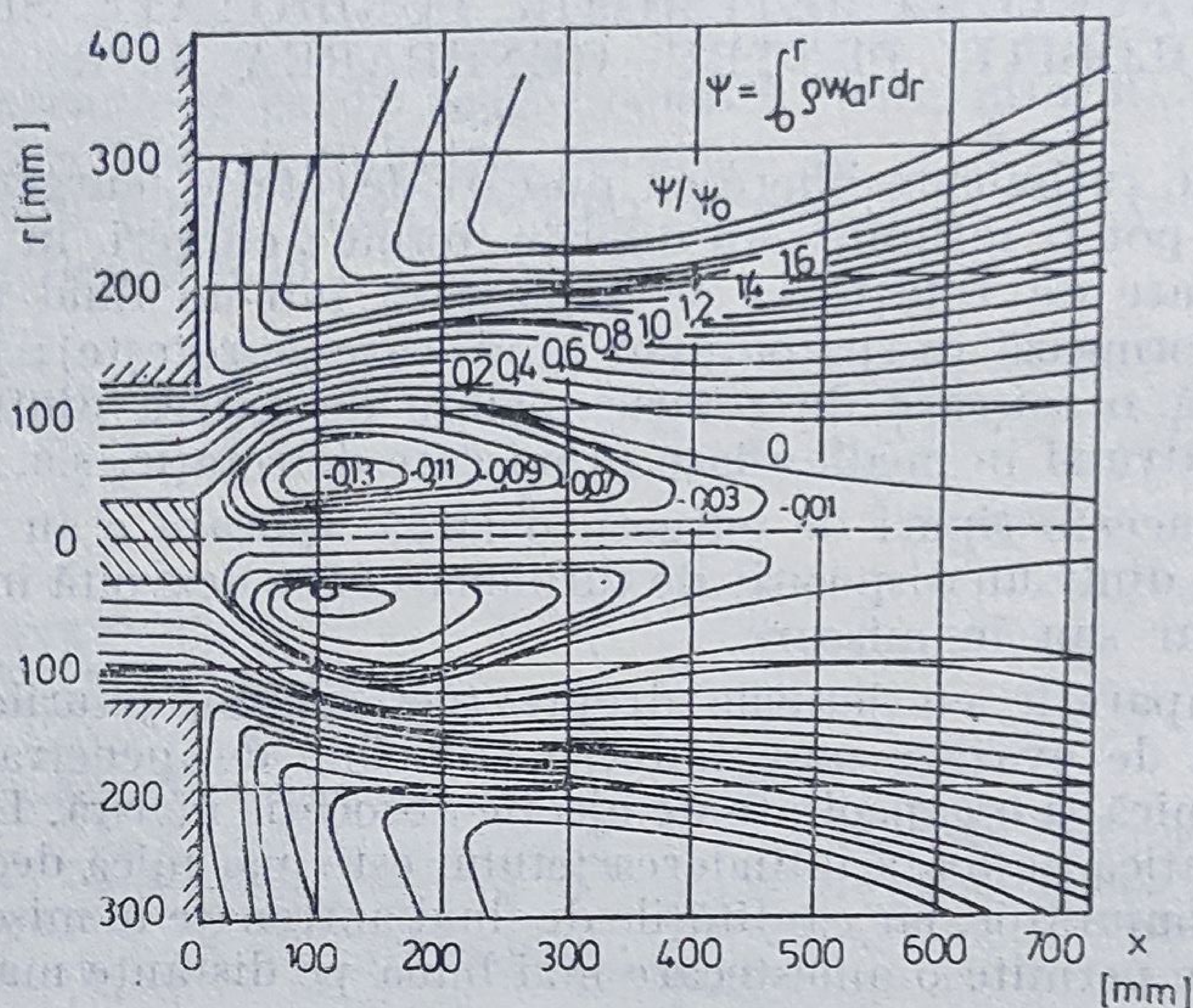


Fig. 8.47. Liniile de curent la un jet turbionat cu miez de recirculare.

— zona nucleului central (zona de rotație cvasisolidă, miez de recirculare, sau de vîrtej forțat), avînd ca lege de variație a vitezei unghiulare de rotație $w_t \cdot r^{-1} = \text{const}$ (sau $w_t \cdot r^n = \text{const}$, unde $-1 \leqslant n \leqslant 0$).

Cele două zone sînt despărțite una de alta prin suprafața vitezelor maxime de rotație. De distribuția vitezelor de rotație depinde și repartiția presiunii statice de-a lungul razei jetului ($p_{\max}$ la exterior și $p_{\min}$ în partea centrală, figura 8.48 *a*). Viteza axială a curetului în diferite secțiuni transversale (*1*, *2*, *3*) variază în funcție de rază ca în figura 8.48 *b*. Zona

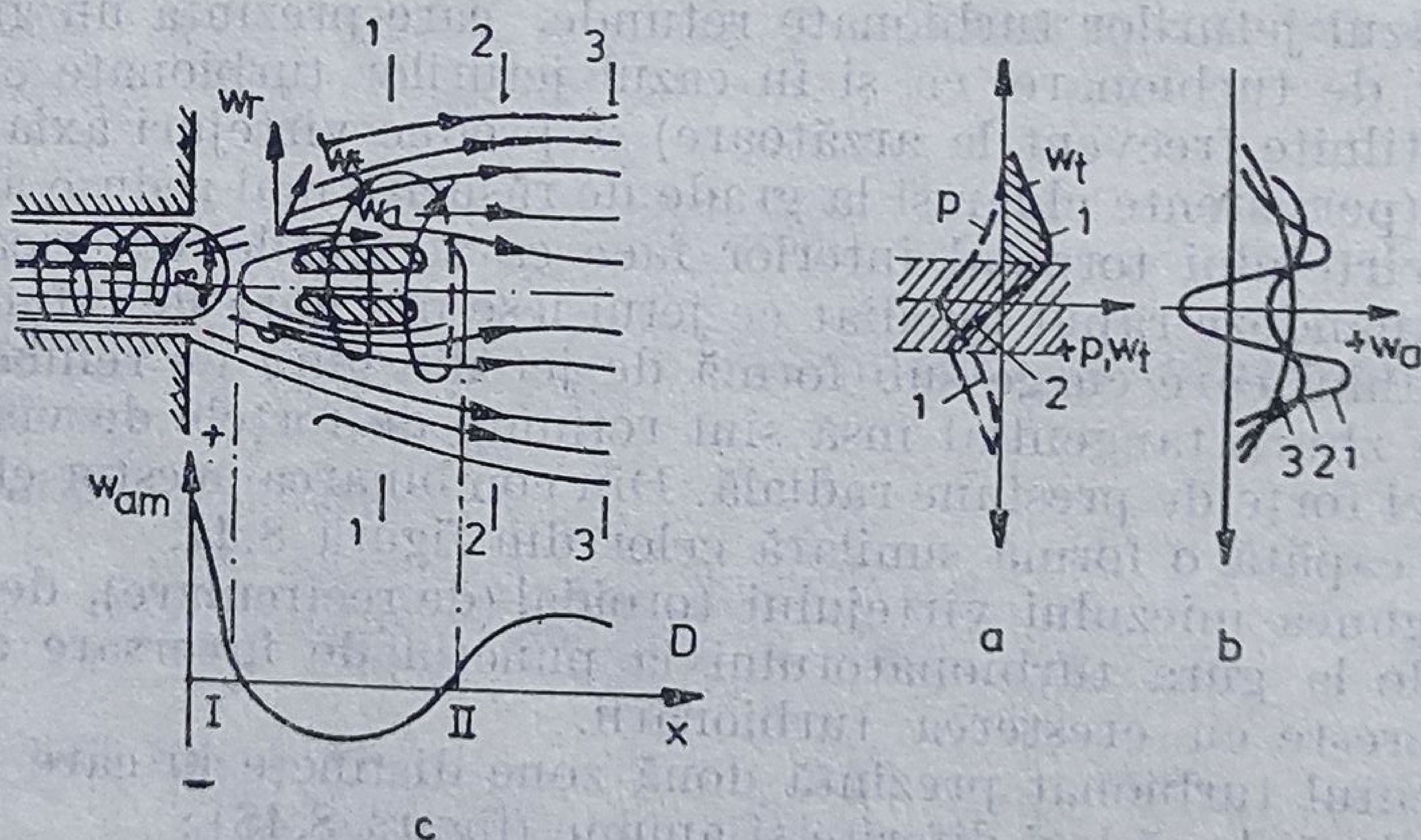


Fig. 8.48. Distribuția presiunii statice și vitezei într-un jet turbionat cu miez de recirculare (w_a — viteză axială; w_t — viteză tangențială; w_r — viteză radială).

nucleului central este delimitată pe axa jetului de punctele I și II în care componenta axială a vitezei este egală cu zero (figura 8.48 *c*).

În general componenta radială a vitezei jetului turbionat este mică în raport cu celelalte două componente (axială și tangențială) putînd fi neglijată. Totuși, în zona situată în apropierea gurii ajutajului pentru jeturile mediu și puternic turbionate toate componentele vitezei devin comparabile ca valoare (figura 8.49 *a, b*).

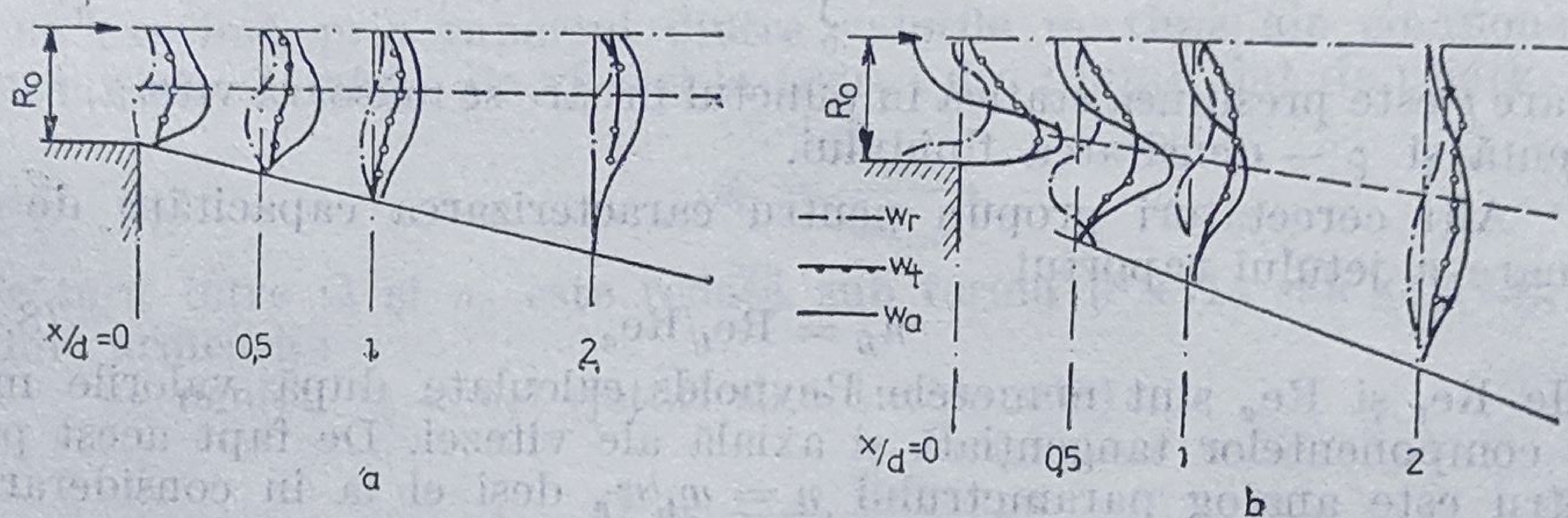


Fig. 8.49. Distribuția vitezelor la un jet turbionat:
a — jet slab turbionat; *b* — jet puternic turbionat.

8.16. PARAMETRII CARACTERISTICI JETURILOR TURBIONATE

Intensitatea mișcării de rotație a curenților de fluid, respectiv intensitatea turbionării jetului, este apreciată cantitativ, de obicei, cu ajutorul caracteristicilor locale și integrale de turbionare.

Drept *caracteristică locală* a turbionării se consideră de regulă raportul dintre componentele tangențială (w_t) și axială (w_a) ale vitezei adică

$$n = \frac{w_t}{w_a},$$

iar drept *caracteristică integrală* raportul dintre momentul cantității de mișcare a jetului M (considerat constant de-a lungul jetului) și cantitatea de mișcare a jetului K (denumită și impulsul axial al jetului); pentru ca acest ultim raport să fie adimensional numitorul se înmulțește cu o dimensiune caracteristică (raza R_0 sau diametrul d_0 al ajutajului):

$$\Omega = \frac{2M}{K \cdot R_0} \qquad (8.162)$$

Valorile mărimilor M și K se determină prin integrare, utilizînd distribuțiile componentelor axiale (w_a) și tangențiale (w_t) ale vitezei într-o

secţiune oarecare a jetului (mai frecvent în planul gurii ajutajului), cu ajutorul relaţiilor

$$M = 2\pi \int_0^R \rho w_a w_t r^2 \mathrm{d}r \tag{8.163}$$

$$K = 2\pi \int_0^R r(\pi w_a^2 + p)\,\mathrm{d}r \tag{8.164}$$

în care p este presiunea statică în punctul în care se măsoară viteza, r—raza curentă şi ρ — densitatea fluidului.

Alţi cercetători propun pentru caracterizarea capacităţii de turbionare a jetului raportul

$$n_B = \mathrm{Re}_t/\mathrm{Re}_a \tag{8.165}$$

unde Re_t şi Re_a sînt numerele Reynolds calculate după valorile medii ale componentelor tangenţială şi axială ale vitezei. De fapt acest parametru este analog parametrului $n = w_t/w_a$ deşi el ia în considerare şi dimensiunile geometrice ale canalelor generatorului de turbionare.

Parametrul de turbionare se exprimă uneori şi cu ajutorul cantităţilor de mişcare ale curgerii fluidului în direcţie tangenţială (K_t) şi axială (K_a) cu relaţia (8.166)

$$n_G = \frac{K_t}{K_a} R_0 \tag{8.166}$$

în care R_0 este raza gurii de ieşire. Acest parametru are neajunsul că nu ia în considerare punctul de aplicare a componentelor vitezei şi în plus el are dimensiunea unei lungimi, ceea ce nu este recomandat.

Determinarea gradului de turbionare se poate face şi în funcţie de elementele geometrice ale turbionatorului. Astfel, pentru un turbionator cu cameră cilindrică cu admisie tangenţială a fluidului, se recomandă relaţia [3]:

$$n_A = \frac{l \cdot w_t}{R_0 \cdot w_a} \tag{8.167}$$

(în care l este lungimea de la axa canalului de admisie la axa carcasei turbionatorului, R_0 — raza corespunzătoase secţiunii de ieşire, w_t şi w_a sînt vitezele medii la intrarea şi la ieşirea din carcasă), sau relaţia

$$n_S = \frac{M_{\mathrm{med}} \cdot c}{K_{\mathrm{med}} \cdot d_0} \tag{8.168}$$

(în care c este un coeficient numeric introdus pentru simplificarea formei finale, $c = 8/\pi$; d_0 — diametrul secţiunii de ieşire a turbionatorului, iar M_{med} şi K_{med} — sînt momentul cantităţii de mişcare şi respectiv cantitatea de mişcare, calculate cu valorile medii ale vitezei curentului).

Pentru cracterizarea curgerilor turbionare izotermice în literatura engleză de specialitate [21, 25] se foloseşte un grad de turbionare (notat cu S) definit ca un raport adimensional între momentul impulsului

unghiular (G_φ) și produsul impulsului axial (G_x) al fluxului cu raza R_0 (respectiv diametrul D_0) al gurii de ieșire, dat de relația

$$S = 2G_\varphi / G_x D_0 ; \tag{8.169}$$

unde: G_φ se calculează cu o relație similară momentului cantității de mișcare, iar G_x — similar cantității de mișcare (v. relațiile 8.163 și 8.164).

Caracteristica locală n și integrală Ω sînt legate nemijlocit între ele, putîndu-se stabili și o relație de dependență. Astfel, dacă parametrul n se exprimă prin raportul dintre valorile maxime ale componentelor tangențială și axială ale vitezei la ieșirea din ajutaj, dat de relația

$$n_0 = \frac{w_{t_{max}}}{w_{a_{max}}}, \tag{8.170}$$

legătura între Ω și n_0 este redată sub forma (8.171) sau (8.172), după cum urmează:

— pentru $n_0 < 0{,}4$ (jeturi slab turbionate)

$$\Omega = \frac{n_0}{1 - 0{,}25 \cdot n_0^2}; \tag{8.171}$$

— pentru $n_0 \geqslant 0{,}4$ (jeturi mediu și puternic turbionate);

$$\Omega = \frac{n_0}{1 - 0{,}5 \cdot n_0}, \tag{8.172}$$

Pentru aprecierea turbionării se recomandă calcularea numărului de turbionare folosind distribuția vitezelor în secțiunea de ieșire a generatorului și nu distribuția în jet, neglijînd termenul presiunii statice din expresia impulsului axial și folosind geometria turbionatorului, respectiv se indică folosirea unui *parametru constructiv de turbionare*. S-au stabilit astfel o serie de relații de calcul al gradului de turbionare pentru diferite tipuri de generatoare, relații care în bună parte concordă cu datele experimentale. În unele lucrări, de exemplu, în loc de S se recomandă folosirea parametrului constructiv S' definit prin relația [25]

$$S' = \frac{G_\varphi}{G'_x \cdot R} \tag{8.173}$$

unde $$G'_x = 2\pi \int_0^R \rho w_a^2 r dr$$

iar G_φ se calculează cu o relație similară momentului cantității de mișcare și w_a și w_t reprezintă componentele axială și tangențială ale vitezelor în generatorul de turbionare. După valorile acestui număr de turbionare se poate face o clasificare a jeturilor turbionate și anume: pentru $S' < 0{,}6$ jet cu turbionare slabă (fără zonă de recirculare la axa jetului); pentru $S' > 0{,}6$ jet cu o turbionare puternică (cu apariția unei curgeri de recirculare în porțiunea centrală a jetului între două puncte de stagnare, de forma unui turbion toroidal).

De asemenea, în lucrarea [17] se recomandă folosirea unui parametru constructiv de turbionare n_c în loc de Ω, indicîndu-se diferite relații de calcul pentru el, exprimate numai în funcție de dimensiunile și particularitățile constructive. Astfel, pentru diferite sisteme de turbionare, parametrii caracteristici se pot determina cu ajutorul următoarelor relații:

— *turbionatoare cu admisie tangențială simplă*

$$n_c = \frac{d(d-a)}{ab}, \qquad (8.174\ a)$$

unde: a și b sînt lățimea și lungimea canalului de admisie: d— diametrul canalului de ieșire;

— *turbinatoare cu admisie tangențială și carcasă melcată*

$$n_c = \frac{dl_t}{ab} \qquad (8.174\ b)$$

unde l_t este distanța dintre axa canalului de admisie și axa canalului de evacuare;

— *turbionatoare cu palete tangențiale* drepte și admisie periferică:

$$n_c = d^2 \cos\beta / (Lz\varepsilon) \qquad (8.174\ c)$$

unde: β este unghiul de înclinare a paletelor față de tangenta la circumferința corespunzătoare punctului de rotire:

ε — distanța minimă între palete; L — lățimea paletei;

z — numărul de palete;

— *turbionatoare cu palete axiale înclinate*, față de direcția curgerii

$$n_c = \frac{8d}{3\pi}\frac{d^3-d_o^3}{(d^2-d_o^2)^2}\operatorname{tg}\alpha \qquad (8.174\ d)$$

unde: α este unghiul de înclinare a paletelor față de axa canalului cilindric; d — diametrul canalului cilindric; d_o —diametrul butucului cu palete.

8.17. STRUCTURA JETURILOR TURBIONATE

În funcție de gradul de turbionare a jetului (n, Ω, sau n_c) curgerea poate căpăta diferite structuri. Astfel în cazul unui jet cu un grad mic de turbionare (slab răsucit), ca urmare a prezenței forței centrifuge, se constată o creștere a unghiului de evazare a jetului, maximul componentei axiale a vitezei găsindu-se tot pe axa jetului ca și la jetul drept (neturbionat) (figura 8.50 *a* și *b*). De asemenea, ca și la jetul drept, distribuția vitezei axiale în diferite secțiuni transversale are forma unei curbe Gauss normală.

Pe măsura creșterii gradului de turbionare, profilul vitezei axiale capătă o formă asemănătoare literei M (fig. 8.50 *c*), în zona de lîngă secțiunea de ieșire maximul vitezei fiind deplasat față de axă, iar la o distanță mai mare maximul vitezei axiale revenind pe axă. Dacă se mărește și mai mult turbionarea, forțele de presiune depășesc impulsul axial și în apropierea secțiunii ajutajului, în zona de lîngă axă, se formează o curgere inversă. La distanțe mai mari de secțiunea de ieșire a ajutajului, zona de

curgere inversă dispare (figura 8.50 *d*). În continuare, crescînd gradul de turbionare, se constată că zona ocupată de curgerea inversă se dezvoltă în așa măsură, încît nici la distanțe mari ea nu dispare (figura 8.50 *e*).

După caracterul distribuției componentei axiale a vitezei, jeturile turbionate pot fi grupate în următoarele categorii :

— jeturi slab turbionate, pentru care componenta axială a vitezei în orice secțiune transversală prin jet are valoarea maximă pe axă, iar profilul distribuției de viteză este asemănător jeturilor drepte ;

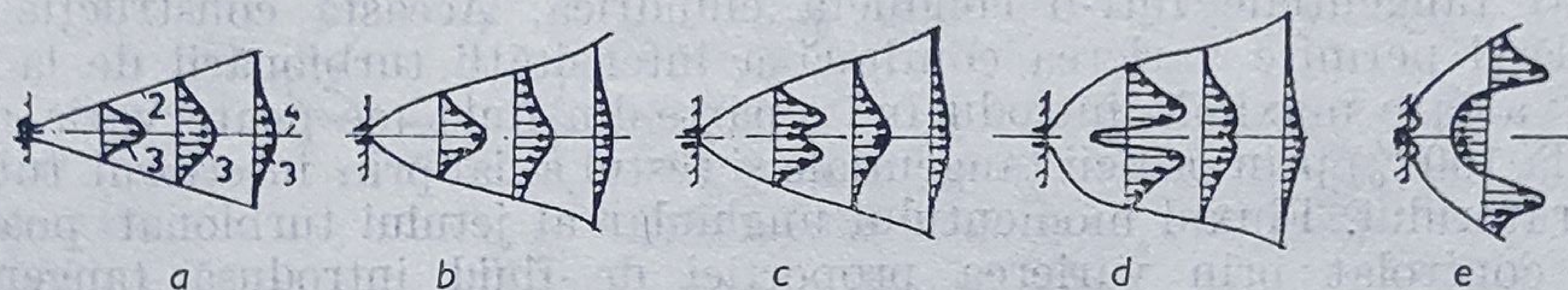


Fig. 8.50. Profilul vitezei axiale la jeturi turbionate :

a — jet neturbionat ; *b* — jet slab turbionat (cu miez central) ; *c* — jet mediu turbionat: *d* — jet puternic turbionat cu circulație inversă inchisă ; *e*—jet puternic turbionat cu circulație inversă deschisă.

— jeturi medii turbionate, caracterizate printr-o scădere a valorii componentei axiale a vitezei în apropierea axei jetului dar fără apariția zonelor de curgere în sens invers. Profilul distribuției vitezei axiale în secțiunile transversale din apropierea secțiunii de ieșire a ajutajului capătă forma literei *M* culcată ;

— jeturi puternic turbionate, caracterizate prin existența unei zone de curgere inversă.

Deși nu este universal aplicabilă, clasificarea menționată este foarte mult utilizată pentru aprecierea calitativă a gradului de răsucire a jeturilor produse de diferite tipuri de turbionatoare.

8.18. PROCEDEE PENTRU GENERAREA ȘI STUDIUL JETURILOR TURBIONATE

În literatura de specialitate sînt descrise diferite procedee de obținere a jeturilor turbionate. De exemplu, pentru turbionarea unui curent de aer sînt prezentate turbionatoare statice (combinații de orificii tangențiale cu palete) sau turbionatoare dinamice (tuburi cu mișcare de rotație de circa 9500 rot/min). Se mai utilizează, pentru realizarea turbionării și o placă perforată rotitoare cu orificii situate atît paralel cu axa cît și la un unghi de 45°, obținînd o variație continuă a vitezei unghiulare în secțiune. Procedeele descrise permit însă obținerea numai a unor jeturi slab turbionate.

Ulterior au fost dezvoltate și aplicate în industrie procedee care au permis obținerea jeturilor cu grade de turbionare de la slab la puternic. Majoritatea metodelor de generare a jeturilor turbionate folosite pînă în prezent în construcțiile de tip industrial (inclusiv la construcțiile de arzătoare) se bazează fie pe introducerea tangențială a curentului de fluid

sau a unei părţi din el (prin unul sau mai multe canale sau cu ajutorul unor palete directoare) într-o conductă cilindrică, fie pe utilizarea unor palete directoare montate în direcţie axială a curgerii.

Metodele ce utilizează dispozitive mecanice pentru imprimarea unei mişcări de turbionare a fluidului care circulă prin ele (cum ar fi paletele rotitoare sau reţelele şi tuburile care se rotesc) se aplică de obicei în cazul cercetărilor experimentale asupra jeturilor turbionare.

În figura 8.51 este reprezentat un generator turbionar cu patru intrări tangenţiale într-o conductă cilindrică. Această construcţie este simplă şi permite varierea continuă a intensităţii turbionării de la zero la o valoare maximă, introducînd o parte din fluid (ce poate varia de la zero la 100%) prin orificii tangenţiale şi restul axial prin interiorul tubului generatorului. Fluxul momentului unghiular al jetului turbionat poate fi deci controlat prin varierea proporţiei de fluid introdusă tangenţial.

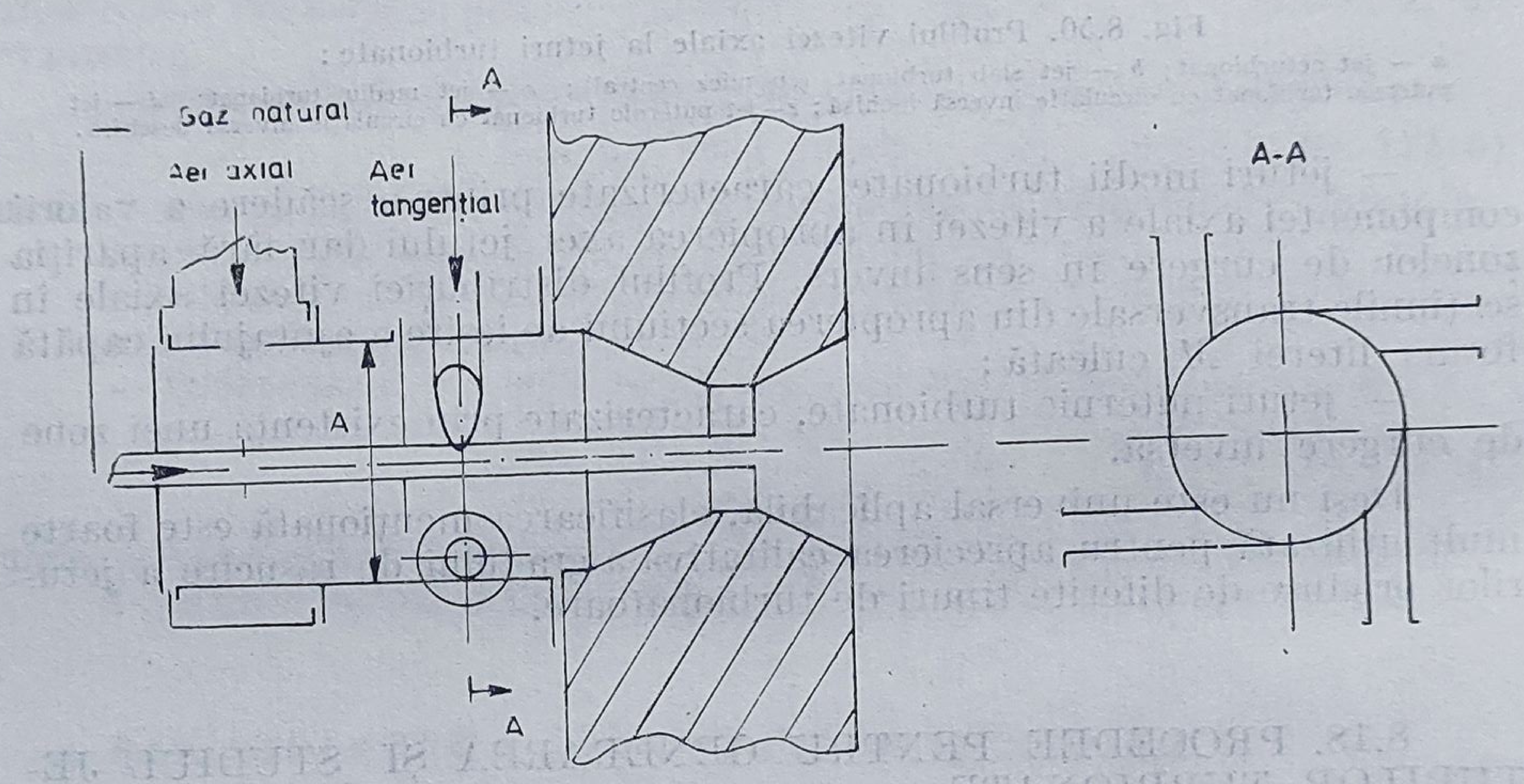


Fig. 8.51. Generator de turbionare cu admisii multiple tangenţiale.

Un alt dispozitiv este cel cu un principiu de funcţionare asemănător, numai că în loc de conducte scurte plasate tangenţial s-au folosit fante tangenţiale dreptunghiulare (figura 8.52). Modificarea gradului de turbionare se realizează tot prin varierea proporţiei dintre debitul de fluid intrat tangenţial şi cel axial.

Un alt generator de turbionare, denumit „bloc mobil de turbionare" este prezentat în figura 8.53. El este prevăzut cu două plăci inelare, una fixă şi una mobilă, şi două serii de blocuri tip pană care se întrepătrund, fiecare fiind ataşată la una din plăci. Blocurile sînt montate intercalat, astfel încît să se realizeze o alternare a canalelor de curgere radială şi tangenţială. Astfel curentul de fluid, dirijat de la periferie spre centru, se divizează într-un număr egal de curenţi radiali şi tangenţiali care se combină mai departe în lungul curentului într-o curgere turbionară. Prin rotirea simplă a blocurilor fixate de placa mobilă

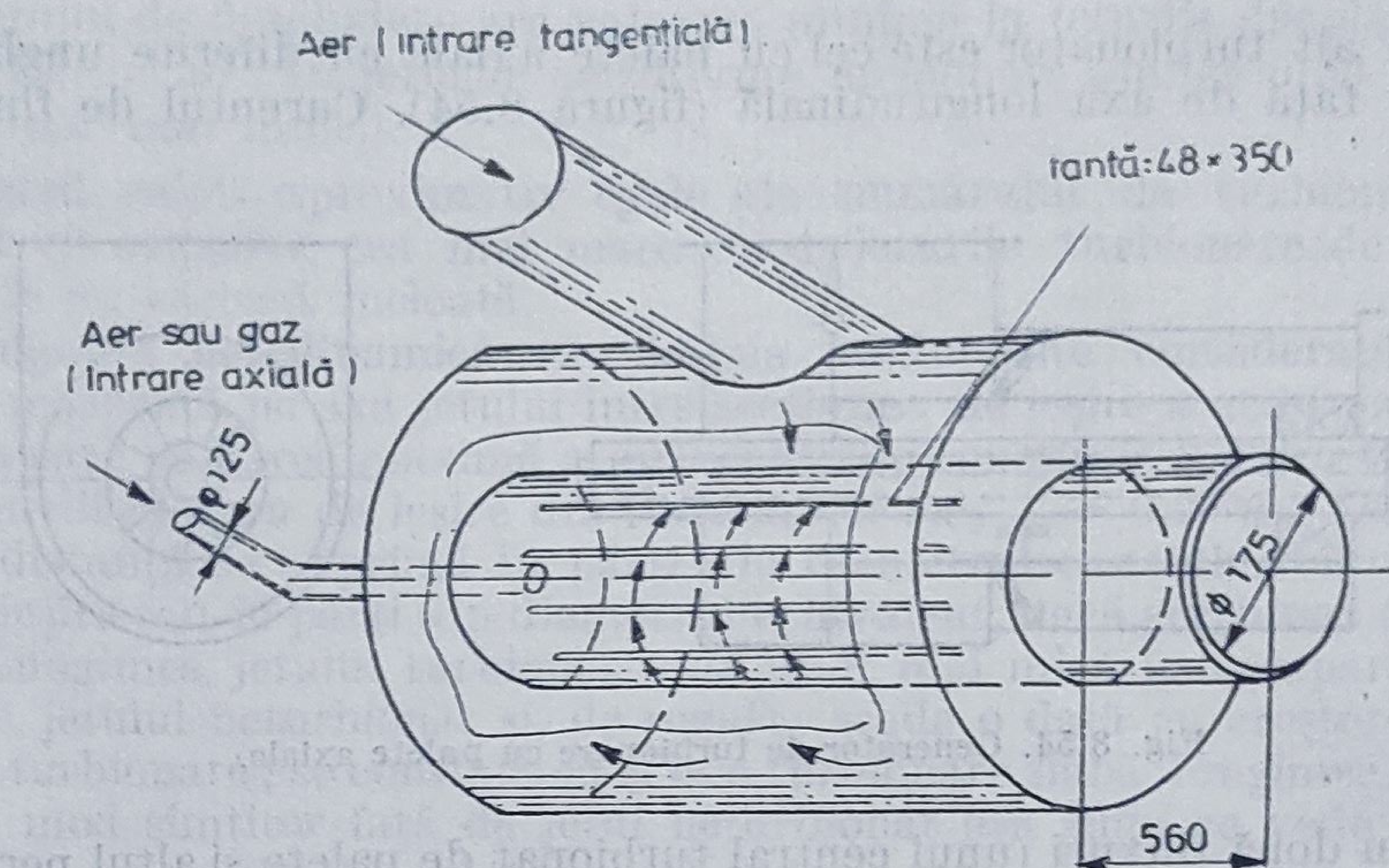


Fig. 8.52. Generator de turbionare cu fante tangențiale.

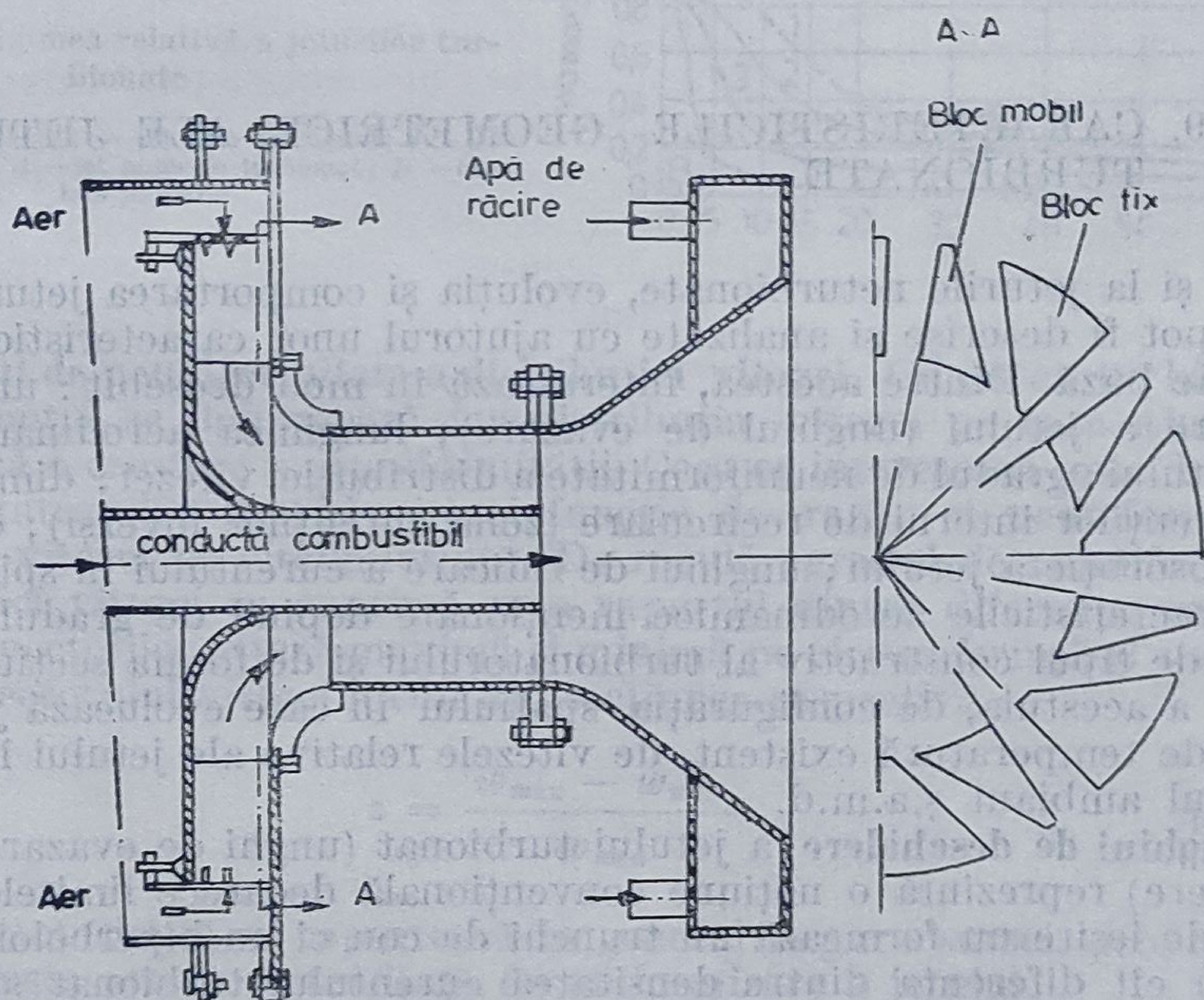


Fig. 8.53. Generator de turbionare cu admisie tangențială.

în raport cu cele de pe placa fixă, canalele radiale se închid progresiv și canalele tangențiale se deschid (sau invers) obținîndu-se o variație continuă a gradului de turbionare de la zero la o valoare maximă.

Un alt turbionator este cel cu palete axiale cu diferite unghiuri de înclinare faţă de axa longitudinală (figura 8.54). Curentul de fluid este

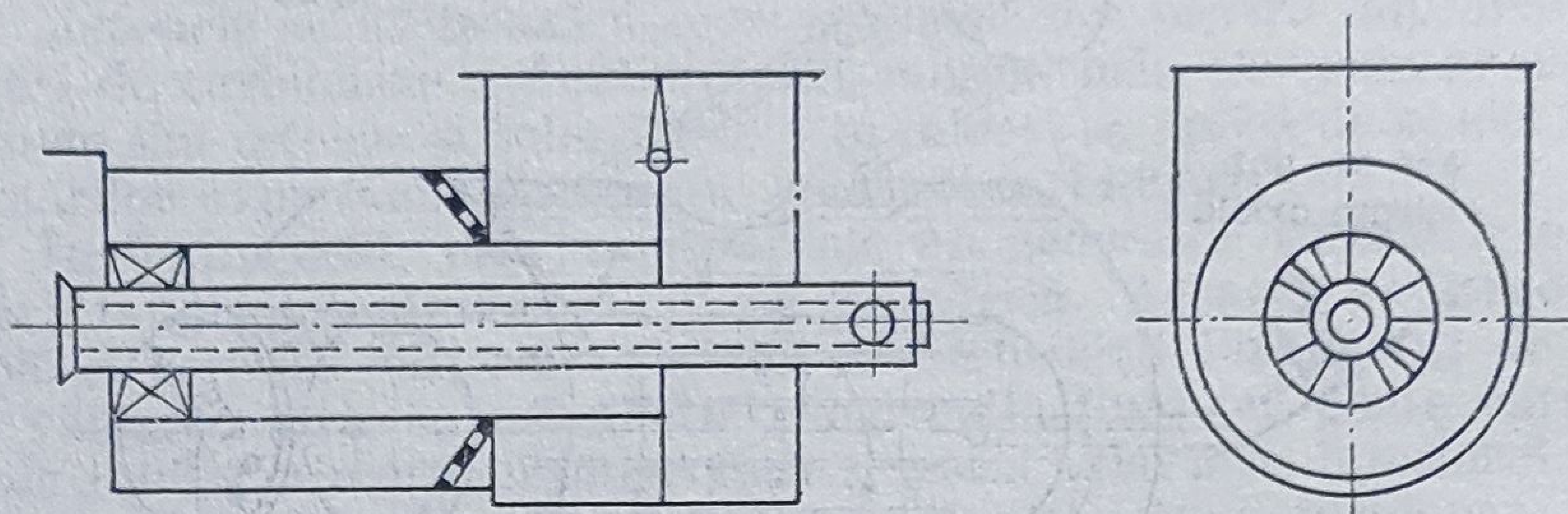


Fig. 8.54. Generator de turbionare cu palete axiale.

divizat în două fluxuri (unul central turbionat de palete şi altul periferic), iar bucşa cu palete axiale este interschimbabilă.

În lucrarea [26] sînt prezentate tipurile de turbionatoare recomandate pentru diferite categorii de arzătoare turbionare.

8.19. CARACTERISTICILE GEOMETRICE ALE JETURILOR TURBIONATE

Ca şi la jeturile neturbionate, evoluţia şi comportarea jeturilor turbionate pot fi descrise şi analizate cu ajutorul unor caracteristici aerodinamice de bază. Dintre acestea, interesează în mod deosebit: unghiul de deschidere a jetului (unghiul de evazare); lungimea aerodinamică sau bătaia jetului; gradul de neuniformitate a distribuţiei vitezei; dimensiunile zonei curenţilor interni de recirculare (zona curenţilor inverşi); capacitatea de absorbţie a jetului; unghiul de ridicare a curentului în spirală.

Caracteristicile aerodinamice menţionate depind de gradul de turbionare, de tipul constructiv al turbionatorului şi de forma secţiunii gurii de ieşire a acestuia, de configuraţia spaţiului în care evoluează jetul, de regimul de temperatură existent, de vitezele relative ale jetului în raport cu mediul ambiant ş.a.m.d.

Unghiul de deschidere a jetului turbionat (unghi de evazare sau de împrăştiere) reprezintă o noţiune convenţională deoarece limitele jetului la gura de ieşire nu formează un trunchi de con ci un hiperboloid de rotaţie. Cu cît diferenţa dintre densitatea curentului turbionat şi mediul înconjurător este mai mare şi cu cît turbionarea este mai puternică, cu atît forma jetului se deosebeşte mai mult de forma conică.

Partea iniţială a jetului turbionat este conică iar unghiul din vîrf ce reprezintă unghiul de deschidere sau de evazare a jetului se măsoară în această zonă:

$$0 \leqslant x/D_0 \leqslant 4$$

Unghiul de deschidere are valoarea minimă la jeturile drepte și este de circa 12° ... 25°. În jeturile neizoterme turbionate ajunge pînă la circa 100° și chiar mai mult.

Pentru valori aproximativ egale ale numărului de turbionare s-a constatat că evazarea cea mai mare o au jeturile turbionate de turbionatoarele cu carcasă melcată.

Lungimea aerodinamică sau bătaia jetului este considerată drept distanța măsurată pe axa jetului între secțiunea de ieșire a acestuia și secțiunea în care valoarea maximă a vitezei axiale constituie 0,2 din valoarea vitezei medii la gura de ieșire din turbionator : $w_{x\,max} = 0{,}2 \cdot w_0$. De obicei această distanță se exprimă în părți din diametrul canalului cilindric al gurii de ieșire sau în părți din diametrul echivalent, dacă secțiunea are alte forme. Lungimea jetului turbionat este mult mai mică în comparație cu lungimea jetului neturbionat și, de regulă, scade o dată cu creșterea gradului de turbionare ; se constată că și la o turbionare slabă lungimea jetului scade în mod simțitor față de jetul neturbionat așa cum se vede din figura 8.55.

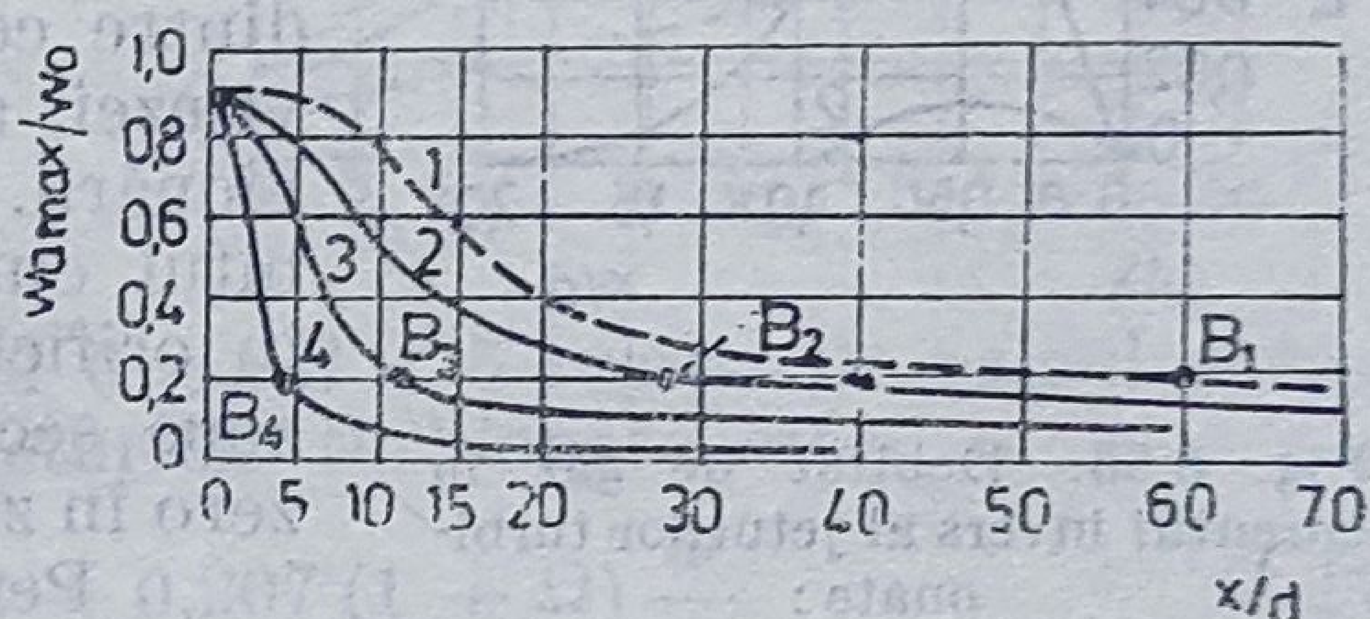


Fig. 8.55. Lungimea relativă a jeturilor turbionate :

1 — jet neturbionat ; *2* — jet slab turbionat ; *3* — jet mediu turbionat ; *4* — jet puternic turbionat ; *B* — bătaia jetului.

Gradul de neuniformitate a distribuției vitezei. Odată cu turbionarea jetului curentul se deformează iar distribuția vitezei pe raza ajutajului înregistrează o creștere a neuniformității. Ceea ce interesează este însă nu neuniformitatea distribuției vitezei funcție de rază, ci neuniformitatea distribuției vitezei pe circumferință. De regulă, gradul de neuniformitate a distribuției vitezei se exprimă prin raportul dintre diferența valorilor scalare ale vectorilor viteză maximă și minimă pe circumferință și valoarea scalară a vectorului vitezei medii din secțiunea respectivă :

$$\varepsilon = \frac{w_{max} - w_{min}}{w_{med}} \tag{8.175}$$

Această caracteristică se raportează în general la gura sursei, deoarece în aval de aceasta are loc o tendință de uniformizare a jetului.

Gradul de neuniformitate diferă de la un tip de generator de turbionare la altul și poate varia în limite foarte largi în funcție de parametrii constructivi ai acestora. La turbionatoarele de tipul cu palete tangențiale, gradul de neuniformitate ε scade cu micșorarea unghiului α de înclinare a paletelor, iar la cele cu palete axiale scade o dată cu creșterea lui α, avînd în general valori cuprinse între 0,03 și 0,08.

Dimensiunile zonei curenților interni de recirculare (curenți de curgere inversă). În jeturile puternic turbionate, în regiunea din apropierea secțiunii de ieșire a ajutajului se formează lîngă axa jetului o curgere orientată în sens opus mișcării principale, numită zona curenților inverși. Drept limită a acestei zone este considerată suprafața pe care componenta axială a vitezei este zero.

Lungimea zonei curgerii inverse este dată de distanța pe axa jetului, de la gura ajutajului pînă la punctul unde curba limitei zonei intersectează axa, iar diametrul zonei este plasat în planul normal pe axa jetului al secțiunii respective.

Lungimea și diametrul zonei curentului invers se exprimă în unități relative, de obicei în fracțiuni din diametrul ajutajului. Modelul fizic al formării curenților inverși nu este încă complet clarificat; se consideră, totuși, ca satisfăcător mecanismul conform căruia curenții inverși se formează sub acțiunea gradientului presiunii statice din jet. Dinamica curentului invers depinde direct de raportul dintre componentele tangențiale și axiale ale vitezei, adică de caracteristica locală a turbionării. La jeturile puternic turbionate, debitul curenților inverși este apropiat de zero în orificiul de ieșire, atinge un maxim în zona secțiunilor $x/d \approx 0{,}5$ și scade din nou la zero în zonele $x/d = 1 \ldots 2$ (fig. 8.56).

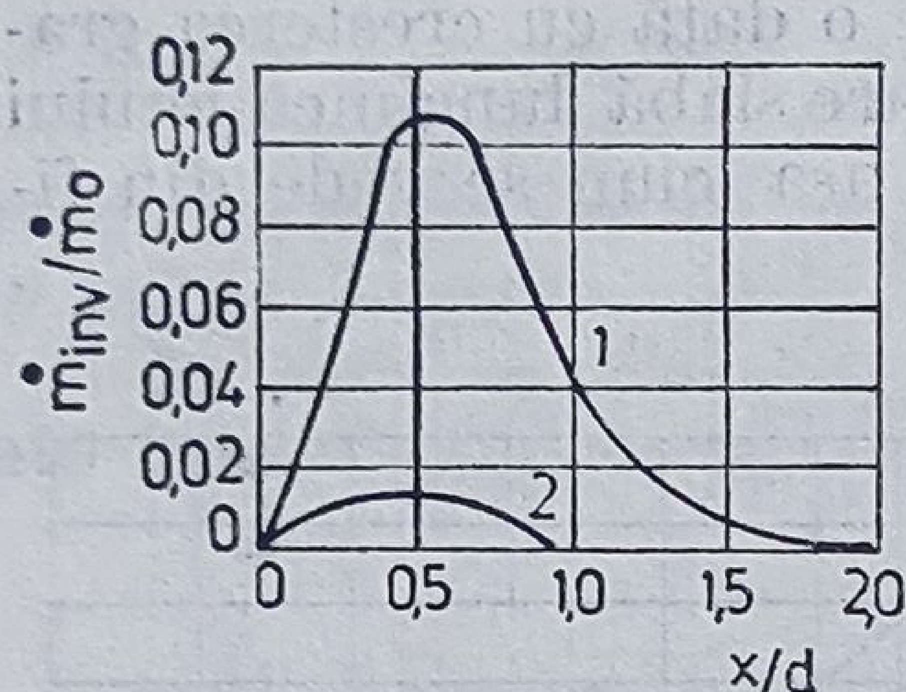


Fig. 8.56. Debitul de gaz în curentul invers al jeturilor turbionate:

1 — jet puternic turbionat; *2* — jet mediu turbionat.

Pentru calculul debitului masic al curentului invers într-o secțiune oarecare se utilizează o relație ce folosește cîmpul vitezei axiale în zona de recirculare de forma

$$\dot{m}_{inv} = 2\pi\rho \int_0^{R_{inv}} w_a r dr \tag{8.176}$$

unde ρ este densitatea; R_{inv} — raza limitei zonei curenților inverși în secțiunea respectivă; r — valoarea curentă a razei jetului; w_a — viteza axială.

Lățimea și lungimea zonei de recirculare, pentru diferite grade de turbionare, pot fi calculate cu relațiile

$$(b_{inv}/D_0)_{max} = 0{,}09 n_c + 0{,}28;\ (l_{inv}/D_0)_{max} = 0{,}7 n_c^{2/3} + 0{,}8,$$

iar debitul recirculat $(\dot{m}_{inv}/\dot{m}_0)_{max} = 0{,}03 + 0{,}02(n_c - 1)^2$.

Capacitatea de absorbție a jetului. În cursul evoluției sale jetul liber își mărește masa, în aval de ajutaj, în mod continuu, datorită masei absorbite din mediul ambiant. Debitul jetului în diferite secțiuni transversale pe direcția de curgere se poate calcula cu relația:

$$\dot{m} = 2\pi\rho \int_0^{R_{lim}} w_a r dr \tag{8.177}$$

unde: ρ este densitatea fluidului; R_{lim} — raza corespunzătoare graniței jetului; r — valoarea curentă a razei jetului; w_a — componenta axială a vitezei.

Notînd cu $\dot{m}_0$ debitul la secțiunea de ieșire din ajutaj se poate afla valoarea debitului absorbit din mediul ambiant de la gura ajutajului pînă la secțiunea aleasă, sub forma

$$\Delta\dot{m} = \dot{m} - \dot{m}_0 \tag{8.178}$$

Legat de acestea se definește și capacitatea de absorbție a jetului. Ea se exprimă fie prin raportul $\dot{m}/\dot{m}_0$, fie ca raport între debitul atașat și debitul inițial $\Delta\dot{m}/\dot{m}_0$.

Capacitatea de absorbție crește puternic o dată cu creșterea gradului de turbionare (fig. 8.57). Diferența cea mai mare în ceea ce privește capacitatea de absorbție între jeturile turbionate și neturbionate apare în

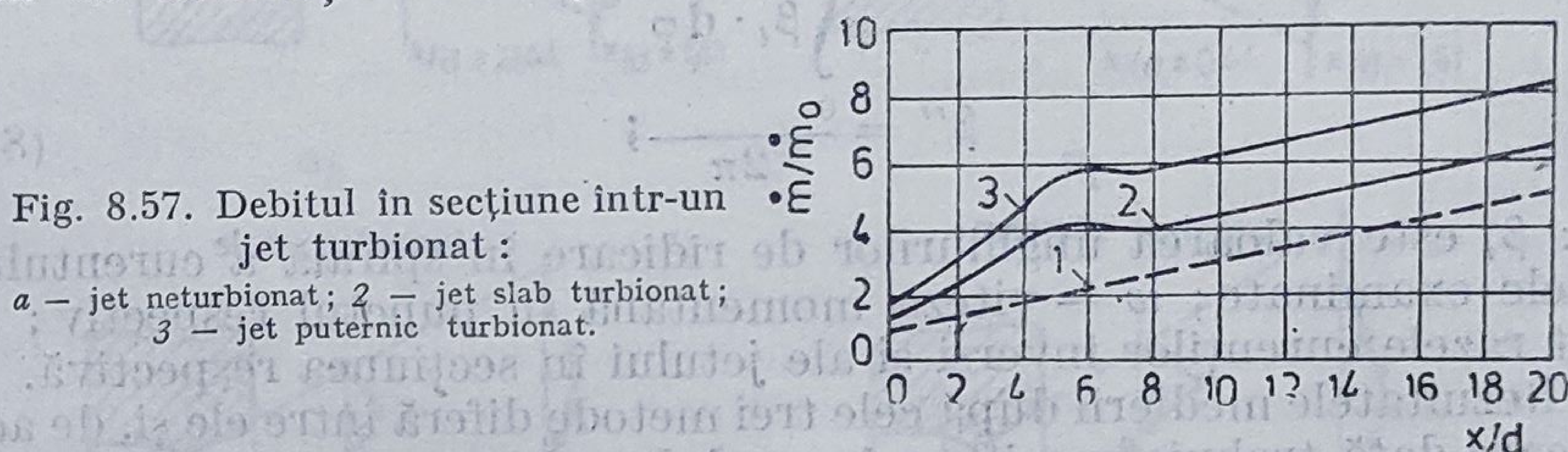


Fig. 8.57. Debitul în secțiune într-un jet turbionat:
a — jet neturbionat; *2* — jet slab turbionat; *3* — jet puternic turbionat.

apropierea gurii. Pentru intervalul $0 \leqslant x/d \leqslant 5$ relația de calcul a capacității de absorbție a debitului jeturilor turbionate este

$$\Delta\dot{m} = 0{,}5\,\Omega + 0{,}207\,(1 + \Omega)\,\frac{x}{d} \tag{8.179}$$

unde Ω este parametrul de turbionare (v. relația 8.162).

Unghiul de ridicare a curentului în spirală. Prin acest unghi (notat de regulă cu β) se înțelege unghiul dintre direcția vectorului viteză într-un punct de pe traiectoria particulelor aflate în curgere turbionară și direcția radială perpendiculară pe axa jetului. El nu este constant în lungul jetului și ca urmare poate reprezenta numai o caracteristică indirectă a turbionării curentului.

De exemplu, viteza reală se află prin împărțirea vitezei medii (calculată pe baza debitului ce străbate secțiunea respectivă) la sin β. Deoarece unghiul de ridicare a curentului în spirală variază nu numai în lungul jetului turbionat ci și transversal, el se mediază în secțiune. Medierea se poate face:

— după viteza axială:

$$\beta = \frac{\int\limits_{R_{inv}}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi} \beta_i w \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi}{\int\limits_{R_{inv}}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi} w_x \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi}; \tag{8.180}$$

— după debit :

$$\beta' = \frac{\int_{R_{inv}}^{R}\int_{0}^{2\pi} \beta_i w_x r dr d\varphi}{\int_{R_{inv}}^{R}\int_{0}^{2\pi} w_x r dr d\varphi}; \qquad (1.181)$$

— după vectorii vitezelor maxime în secțiunile respective :

$$\beta'' = \frac{\int_{0}^{2\pi} \beta_i \cdot d\varphi}{2\pi}; \qquad (8.182)$$

unde : β_i este valoarea unghiurilor de ridicare în spirală a curentului în punctele examinate ; w — viteza momentană în punctul respectiv ; R_{inv}, R sînt razele curenților inverși și ale jetului în secțiunea respectivă.

Rezultatele medierii după cele trei metode diferă între ele și, de aceea, de fiecare dată trebuie specificat în mod deosebit procedeul după care s-a făcut medierea. De exemplu, unghiul de ridicare în spirală după diferite formule, în cazul unui turbionator cu palete axiale duce la următoarele rezultate :

$$n = 0{,}38 \rightarrow \beta' = 50°;\ \beta = 63°;$$

$$n = 0{,}64 \rightarrow \beta' = 48°;\ \beta = 69°;$$

$$n = 0{,}80 \rightarrow \beta' = 44°;\ \beta = 58°,$$

iar pentru un turbionator cu palete tangențiale la $n = 0{,}638$ și $\alpha = 20°$

$$x/d = 0{,}5 \rightarrow \beta = 43°$$

$$x/d = 1 \rightarrow \beta = 45°$$

$$x/d = 1{,}5 \rightarrow \beta = 56°$$

Influența formei secțiunii de ieșire a turbionatorului asupra caracteristicilor aerodinamice ale jetului. Cercetările experimentale efectuate asupra jeturilor turbionate produse de diferite generatoare de turbionare au arătat că asupra aerodinamicii jeturilor o puternică influență o are forma secțiunii de ieșire și raportul diametrelor țevilor centrale coaxiale.

Astfel, o influență puternică asupra structurii aerodinamice a jeturilor o are îngustarea secțiunii de ieșire a gurii de refulare. Prin îngustare se mărește bătaia jetului, se micșorează unghiul de evazare a jetului și se scurtează în mod simțitor zona curenților inverși. O creștere a unghiului de deschidere a gurii de refulare duce la mărirea zonei curenților inverși și a unghiului de deschidere a jetului turbionat. În anumite condiții, jetul

poate crește în așa măsură că el începe să se disperseze în toate direcțiile în planul unui perete frontal.

În figuta 8.58 este reprezentat profilul vitezei axiale la ieșirea din ajutajul unui turbionator în situația în care gura cilindrică a acestuia

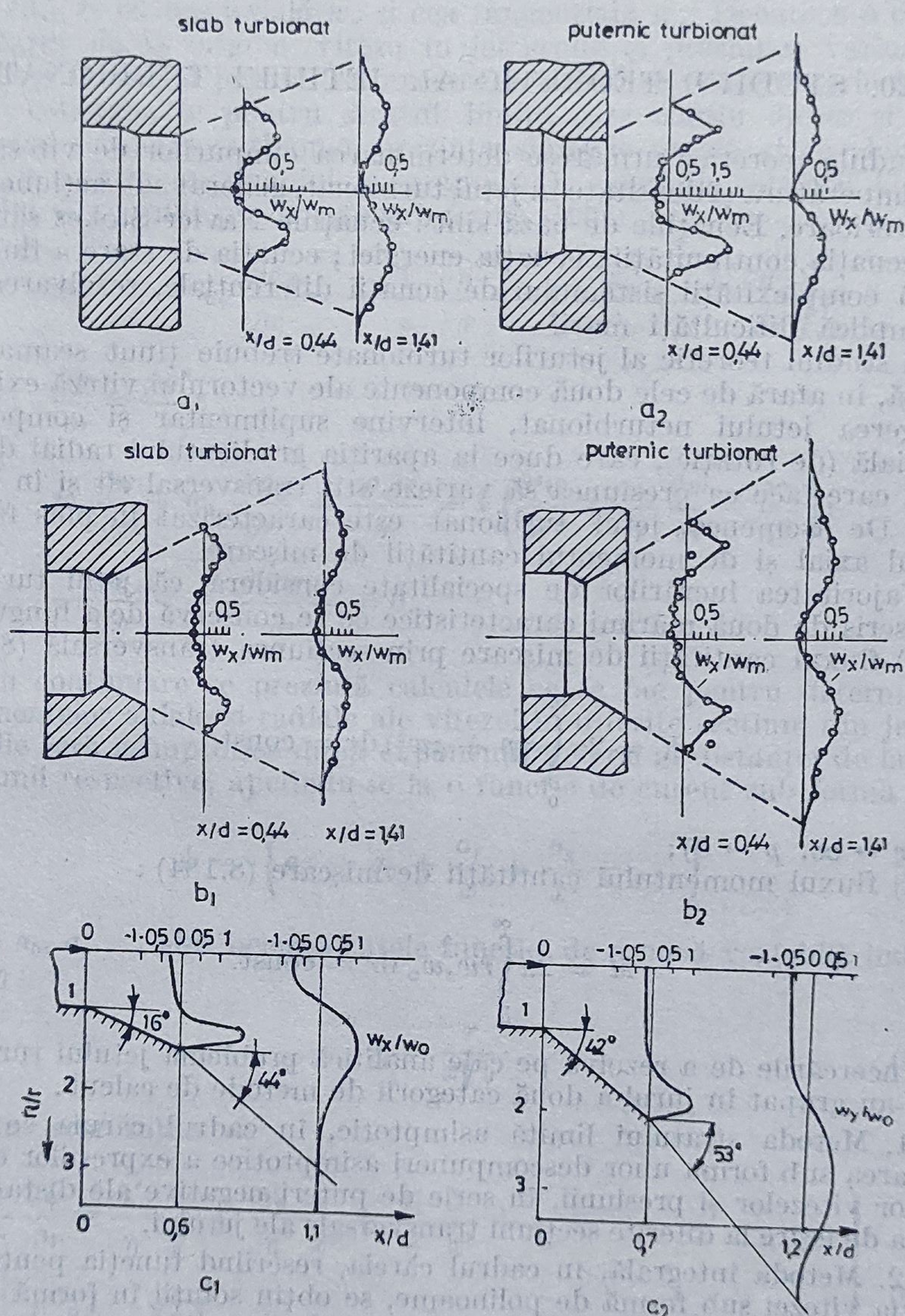


Fig. 8.58. Distribuția vitezei axiale la un jet turbionat:
a_1 — jet slab turbionat cu îngustare a secțiunii de formare; a_2 — idem puternic turbionat; b_1 — jet slab turbionat cu îngustare și evazare a secțiunii de formare; b_2 — idem puternic turbionat; c_1 — jet slab turbionat cu secțiune evazată cu un unghi de 16°; c_2 — idem cu un unghi de 42°.

suferă : o îngustare (fig. 8.58, a), o îngustare urmată de o lărgire (fig. 8.58 b), sau gura are o formă conică cu diferite unghiuri de evazare (fig. 8.58 c). Figurile redau intuitiv modul cum variază structura aerodinamică a jetului în funcție de forma gîtului și gradul de turbionare.

8.20. STUDIUL TEORETIC AL JETULUI TURBIONAT

Studiile teoretice urmăresc determinarea cîmpurilor de viteză, presiune, temperatură și densitate în jetul turbionat, generat sub acțiunea unor forțe exterioare. Ecuațiile de bază sînt : ecuațiile Navier-Stokes sau Reynolds ; ecuația continuității ; ecuația energiei ; ecuația de stare a fluidului. Datorită complexității sistemului de ecuații diferențiale, rezolvarea analitică implică dificultăți mari.

În studiul teoretic al jeturilor turbionate trebuie ținut seama și de faptul că, în afară de cele două componente ale vectorului viteză existente în curgerea jetului neturbionat, intervine suplimentar și componenta tangențială (de rotație), care duce la apariția gradientului radial de presiune și care face ca presiunea să varieze atît transversal cît și în lungul jetului. De asemenea, jetul turbionat este caracterizat în plus față de impulsul axial și de momentul cantității de mișcare.

Majoritatea lucrărilor de specialitate consideră că jetul turbionat este descris de două mărimi caracteristice ce se conservă de-a lungul lui :

1) fluxul cantității de mișcare prin secțiunea transversală (8.183) :

$$K = 2\pi \int_0^\infty r(p + \rho w_x^2)\, dr = \text{const} \tag{8.183}$$

(cînd $r \to \infty$, $p \to 0$) ;

2) fluxul momentului cantității de mișcare (8.184) :

$$M = 2\pi \int_0^\infty r w_x w_\varphi\, dr = \text{const.} \tag{8.184}$$

Încercările de a rezolva pe cale analitică problema jetului turbionat liber s-au grupat în jurul a două categorii de metode de calcul :

1. Metoda stratului limită asimptotic, în cadrul căruia se caută rezolvarea sub forma unor descompuneri asimptotice a expresiilor componentelor vitezelor și presiunii, în serie de puteri negative ale distanței de la gura de ieșire la diferite secțiuni transversale ale jetului.

2. Metoda integrală, în cadrul căreia, rescriind funcția pentru distribuția vitezei sub formă de polinoame, se obțin soluții în formă închisă ce descriu amortizarea jetului în spațiu și divergența lui.

Ambele metode, datorită ipotezelor simplificatoare (neglijarea vitezelor radiale în jet, în comparație cu cele axiale și anularea derivatelor

parțiale în raport cu unghiul măsurat în jurul axei jetului), sînt valabile în general pentru calculul jeturilor slab și mediu răsucite.

Metodele analitice, consideră jetul ca un strat limită la care dimensiunea transversală este mică. Componenta radială a vitezei w_r se consideră mică în raport cu cea axială w_x și cea tangențială w_φ. Deoarece o dată cu îndepărtarea de la origine viteza în jet scade și presiunea variază atît radial cît și în lungul jetului. Ca urmare mișcarea se poate descrie folosind ecuațiile generalizate pentru stratul limită care conțin $\partial p/\partial x$ și $\partial p/\partial r$. Considerînd că jetul turbionat prezintă simetrie axială și că derivatele parțiale în raport cu unghiul φ se anulează, ecuațiile mișcării laminare a fluidului vîscos sînt prezentate sub forma [20]:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_x}{\mathrm{d}r}\right);$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho w^2}{r}; \tag{8.185}$$

$$w_x \frac{\partial w}{\partial x} + w_r \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{w_\varphi w_r}{r} = \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w_\varphi}{r^2}\right);$$

$$\frac{\partial (r w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (r w_r)}{\partial r} = 0.$$

În continuare se prezintă calculele ce se fac pentru determinarea componentelor axiale și radiale ale vitezei în diferite secțiuni din jet, sub formă de serii asimptotice după exponenții inverși ai distanței de la sursă a secțiunii respective, apelîndu-se la o funcție de curent sub forma

$$\psi = \nu\left(ax + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right) \tag{8.186}$$

unde a, a_0, a_1 ... sînt necunoscutele funcției de o nouă variabilă independentă η:

$$\eta = \frac{r}{x\sqrt{\nu}}. \tag{1.187}$$

Se obțin expresiile:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{a'}{\eta}\frac{1}{x} + \frac{a'_0}{\eta}\frac{1}{x^2} + \frac{a'_1}{\eta}\frac{1}{x^3} + \ldots \\ w_r &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\sqrt{\nu}}{x}\left[a' - \frac{a}{\eta} + a'_0\frac{1}{x} + \left(a'_1 + \frac{a_1}{\eta}\right)\frac{1}{x^2} + \ldots,\right. \end{aligned}\right\} \tag{8.188}$$

apostroful reprezentînd derivata după η.

Pentru componenta tangențială a vitezei și pentru presiune se folosesc descompunerile în serie :

$$w_\varphi = \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots \qquad (8.189)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots, \qquad (8.190)$$

în care $b_1, b_2, \ldots ; c_1, c_2, \ldots$ sînt necunoscutele funcției de variabilă η. Descompunerile (8.188), (8.189) și (8.190) se substituie în sistemul de ecuații (8.185) obținîndu-se sistemul de ecuații diferențiale obișnuite pentru determinarea coeficienților $a, a_0, a_1 \ldots, b_1, b_2, c_1, c_2, \ldots$

Impunînd condițiile la limită, rezultatele calculului teoretic se prezintă sub forma (8.191) :

$$w_x = \frac{2\alpha^2\eta}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\beta\cdot\alpha^2\frac{1-\frac{3}{4}\alpha^2\cdot\eta^2}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)^3}\frac{1}{x^2};$$

$$w_r = \sqrt{\nu}\left[\frac{\alpha^2\cdot\eta\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)^2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\alpha^2\beta\frac{\left(1-\frac{3}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)^3}\frac{1}{x^2}\right];$$

$$(8.191)$$

$$w_\varphi = \gamma\frac{a\cdot\eta}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)^2}\frac{1}{x^2};$$

$$p = -\frac{2}{3}\rho\cdot\gamma^2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\cdot\eta^2\right)^3}\frac{1}{x^4}.$$

Mărimile α și γ se exprimă în funcție de impulsul K, respectiv momentul cantității de mișcare M, densitatea ρ și viscozitatea μ, sub formele

$$\alpha = \sqrt{\frac{3K}{16\pi\mu}}; \quad \gamma = \frac{(3K)^3M^2}{(16\pi\mu)^3\nu} \qquad (8.192)$$

iar constanta β ca o corecție pentru caracterul finit al debitului jetului la ieșirea din turbionator.

După cum reiese din sistemul de relații (8.191), în comparație cu componentele axială și radială ale vitezei (care descresc proporțional cu $1/x$), componenta tangențială descrește mai repede (proporțional cu $1/x^2$),

iar cîmpul de presiune se amortizează și mai repede (proporțional cu $1/x^4$). Dacă x este suficient de mare, al doilea termen din partea dreaptă a primelor două ecuații ale sistemului (8.191) poate fi neglijat și aceste ecuații se reduc la soluția clasică al jetului neturbionat. Compararea curbelor teoretice cu rezultatele experimentale arată că valorile distanței de la gura de ieșire a ajutajului nu pot fi luate mai mici ca $x \approx (8 \ldots 10)\, d$ și că pentru viteza axială și tangențială se constată o bună coincidere în centru și slabă la marginea jetului, dar la distanța $x \geqslant 8d$ pentru w_x și $x \geqslant 4d$ pentru w_φ.

În paralel cu metodele bazate pe descompuneri asimptotice se utilizează și o serie de metode integrale.

Astfel se obțin soluții pentru jetul turbionat axial simetric turbulent utilizînd profile ale vitezelor de tipul distribuțiilor gaussiene sub forma

$$\left.\begin{aligned} w_x(x, r) &= w_x(x) f(-r^2/b^2);\\ w_\varphi(x, r) &= w_\varphi(x) f(r/b). \end{aligned}\right\} \tag{8.193}$$

unde $b(x)$ este valoarea lui r pentru care $w_x = \dfrac{1}{e} w_{x\,\max}$, iar $f(r/b)$ — funcție ce redă distribuția vitezei tangențiale $w_\varphi(x, r)$ determinată din experiențe.

Substituind aceste relații în ecuațiile de bază ale mișcării și integrîndu-le după r de la 0 la ∞ se obține

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(w_x, b^2) = -\, b w_r(x, b). \tag{8.194}$$

Această relație exprimă că în direcție axială creșterea fluxului de masă este compensată de aspirația masei din mediul înconjurător în direcție radială.

Se identifică apoi $w_r(x, b)$ cu viteza de aspirație

$$w_r(^3x, b) = -\,\alpha w_x(x) \tag{8.195}$$

unde α este coeficientul de aspirație, a cărei valoare depinde de profilul adoptat pentru w_x.

Se determină astfel distribuția vitezelor w_x și w_φ pe axa x. Măsurările experimentale arată că în realitate profilele asemenea ale vitezei axiale și de răsucire, sub forma curbei Gauss, sînt sesizabile abia începînd de la distanța $x = 3{,}06d$ de la secțiunea de formare. În acest mod se determină valoarea coeficientului de aspirație $\varkappa = 0{,}08$. Pentru o mai bună concordanță între datele teoretice și cele experimentale se propune introducerea noțiunii de „pol al jetului răsucit" deplasat în avalul curgerii cu $x = 3{,}06d$ față de secțiunea inițială de formare. Această tratare face însă necesar să se introducă doi „poli" ai jetului, unul pentru componenta tangențială și altul pentru cea axială a vitezei.

Urmărind problema repartiției presiunii și temperaturii în curentul turbionat, utilizînd ecuațiile bilanțului energetic și transformărilor politrope, se determină o distribuire a vitezelor tangențiale în curent de forma $w_\varphi\, r^n =$

$= \text{const}$, unde pentru n, din determinări experimentale, se dă valoarea $n = 0{,}68$.

Trebuie de fapt precizat că nici în acest caz nu este indicat să se atribuie o dependenţă w_φ de r, din moment ce exponentul coordonatei radiale variază între 0,68 şi 3 (după rezultatele experimentale).

Folosind sistemul de coordonate cilindrice x, r, φ şi integrînd ecuaţiile continuităţii, cantităţii de mişcare, energiei şi de stare de la 0 la ∞ după coordonata radială r (după un şir de transformări), în condiţiile iniţiale şi la limită, se obţin legile de conservare a componentelor axiale ale cantităţii de mişcare şi momentul cantităţii de mişcare sub forma (8.196) şi (8.197):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty \rho \cdot r\left[\left(w_x^2 - \frac{1}{2}w_\varphi^2\right)\right]\mathrm{d}r = 0\,; \qquad (8.196)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty \rho \cdot r^2 \cdot w_x \cdot w_\varphi \,\mathrm{d}r = 0 \qquad (8.197)$$

În continuare, ca de obicei în metoda integrală, se face supoziţia similitudinii la distanţe suficient de mari ale profilelor vitezei şi se iau în consideraţie valori mici pînă la moderate ale turbionării — apreciată prin $S' = G_\varphi/G_x R_0$ (vezi relaţia 8.173).

Aceasta a permis să se utilizeze relaţiile (8.198) şi (8.199):

$$w_x/w_{x\max} = f(\lambda). \qquad (8.198)$$

$$w_\varphi/w_{\varphi\max} = g(\lambda), \qquad (8.199)$$

unde $\lambda = r/\chi$ (χ fiind măsurat de la originea virtuală a jetului apreciată, pe baza datelor experimentale, ca fiind la circa $2{,}3d_0$ în interiorul gurii de formare), iar $w_{x\max}$ şi $w_{\varphi\max}$ sînt valorile maxime ale componentelor axiale şi tangenţiale ale vitezei considerate că apar în axa jetului.

Substituind valorile lui w_x şi w_φ din relaţiile (8.198) şi (8.199) în relaţiile (8.196) şi (8.197) se obţine [21]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\rho x^2 (w_{x\max} - N^2 w_{\varphi\max}^2)\right] = 0 \qquad (8.200)$$

unde

$$N^2 = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \lambda g^2 \mathrm{d}\lambda \Big/ \int_0^\infty \lambda g^2 \mathrm{d}\lambda\right]$$

sau:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3 w_{x\max} w_{\varphi\max}\right) = 0. \qquad (8.201)$$

Integrînd (8.201) rezultă :

$$x^3 \cdot w_{x\max} \cdot w_{\varphi\max} = C. \qquad (8.202)$$

Considerînd valorile în secțiunea gurii de formare ca mărimi de referință ($x_0 = \bar{C} \cdot d_0$; $w_{x_0\max}$ și $w_{\varphi_0\max}$) și notînd cu

$$\alpha_1 = \frac{w_{x\max}}{w_{x_0\max}}; \quad \alpha_2 = \frac{w_{\varphi\max}}{w_{\varphi_0\max}}; \quad \alpha_3 = \frac{w_{\varphi_0\max}}{w_{x_0\max}}; \quad X = \frac{x}{d_0},$$

din integrarea relațiilor (8.200) și (8.201) rezultă :

$$\alpha_1 = \frac{w_{x\max}}{w_{x_0\max}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\bar{C}^2(1 - N^2\alpha_3^2)}}{X} 1 + \left[\sqrt{1 + \frac{4\bar{C}^2N^2\alpha_3^2}{(1 - N^2 \cdot \alpha_3^2)^2}\frac{1}{X^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (8.203)$$

$$\alpha_2 = \frac{w_{\varphi\max}}{w_{\varphi_0\max}} = \frac{\bar{C}^3}{X^3}\frac{1}{\alpha_1} \qquad (8.204)$$

Pe baza datelor experimentale obținute pentru jeturi slab turbionate ($0{,}066 \leqslant S' \leqslant 0{,}64$) relațiile (8.203) și (8.204) pot fi reduse la formele

$$\alpha_1 = \frac{\bar{C}\sqrt{1 - N \cdot \alpha_3^2}}{X} = \frac{C_1}{x/d_0}; \qquad (8.205)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\bar{C}^3}{C_1}\right)\frac{1}{(x/d_0)^2} = \frac{C_2}{(x/d_0)^2}, \qquad (8.206)$$

unde C_1 și C_2 sînt funcții de gradul de turbionare S', ale căror valori se determină experimental.

Pentru $S'=0$ (cazul jetului neturbionat) $C_1 = 6{,}3$, iar cînd $S \rightarrow 1$, atunci C_1 scade la circa 1, așa cum se vede din figura 8.59.

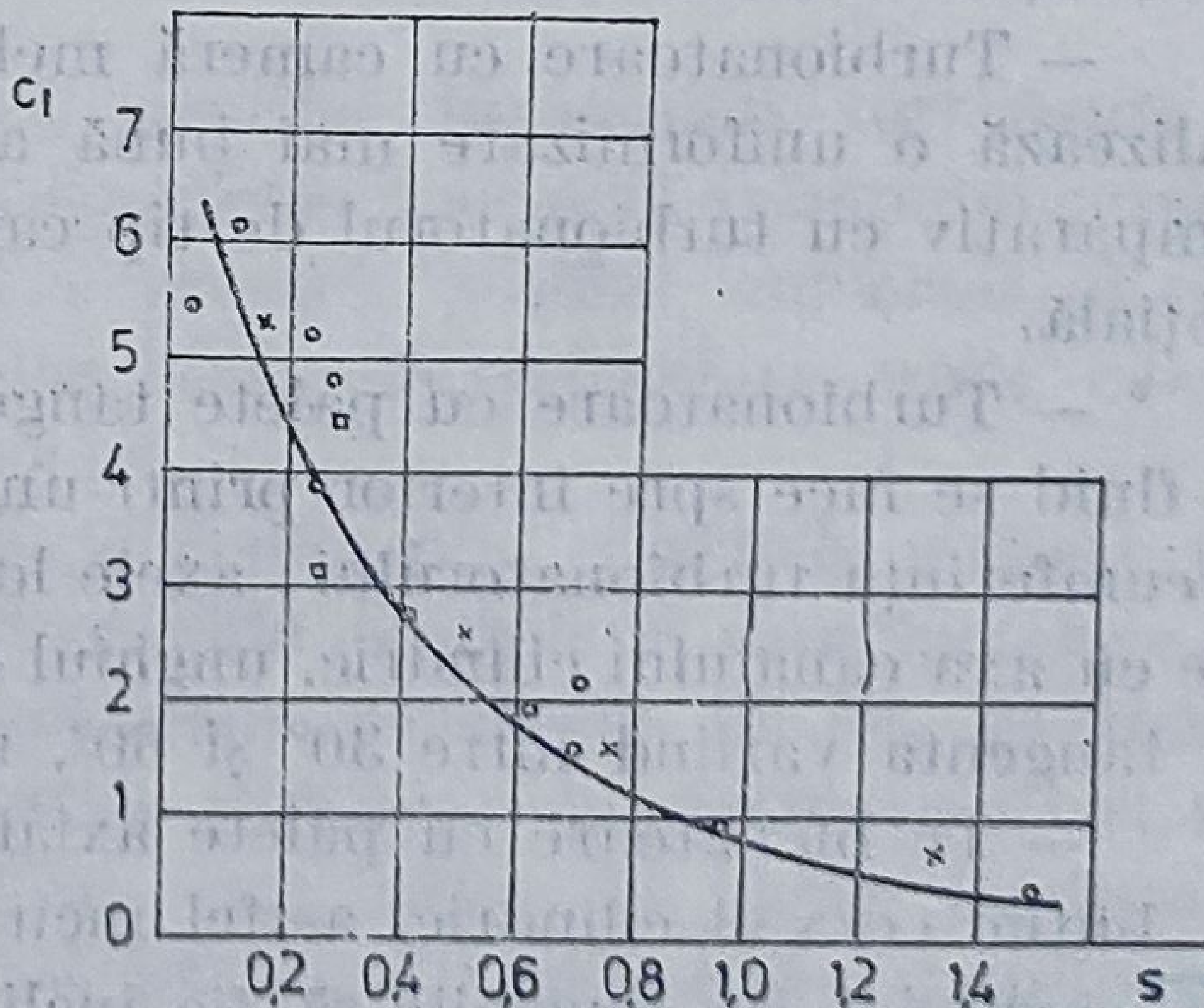


Fig. 8.59, Valoarea constantei C_1 pentru diverse grade de turbionare S'.

În cazul lui C_2 valorile obținute de diferite cercetări nu concordă întotdeauna. După unele cercetări rezultă pentru $S' = 0{,}6$, $C_2 = 6{,}46$ și pentru $S' = 0{,}64$, $C_2 = 3{,}96$. Pînă în prezent nu există o relație de dependență certă care să fie recomandată pentru a calcula valorile lui C_2 în funcție de S'.

Pentru stabilirea distribuțiilor presiunii în jetul turbionat se recomandă relația

$$p_\infty - p_{max} = \rho \cdot w^2_{\varphi max} \int_0^\infty \frac{g^2}{\lambda} d\lambda \tag{8.207}$$

sau :

$$p_\infty - p_{max} \sim 1/(x/d_0)^4.$$

8.21. CONSIDERAȚII ASUPRA JETURILOR TURBIONATE

Din cele expuse reiese că jeturile turbionate reprezintă o categorie distinctă importantă de jeturi turbulente, ale căror proprietăți, structuri, legități de distribuție a parametrilor caracteristici și evoluții necesită încă studii atît experimentale cît și teoretice.

Făcînd o sinteză a tuturor procedeelor de obținere a jeturilor turbionate se disting următoarele categorii :

— Turbionatoare cu cameră cilindrică cu admisie tangențială simplă sau multiplă, la care numărul canelelor de aducțiune poate varia de la 1 la 4 ; la creșterea numărului canalelor se mărește și uniformizarea distribuției curentului în secțiunea de ieșire a canalului cilindric dar cresc rezistențele aerodinamice.

— Turbionatoare cu cameră melcată cu admisie tangențială, care realizează o uniformizare mai bună a curentului în secțiunea de ieșire comparativ cu turbionatorul de tip cameră cilindrică cu admisie tangengențială.

— Turbionatoare cu palete tangențiale, la care admisia curentului de fluid se face spre interior printr-un șir de palete înclinate, dispuse pe circumferința turbionatorului ; axele longitudinale ale paletelor sînt paralele cu axa canalului cilindric, unghiul de înclinare α al paletelor în raport cu tangenta variind între 30° și 60°, iar numărul lor $z = 12 \ldots 24$.

— Turbionatoare cu palete axiale, la care paletele sînt dispuse pe un butuc coaxial cilindric, astfel încît axele lor să fie perpendiculare pe axa canalului iar muchiile să fie înclinate în raport cu direcția curgerii.

— Turbionatoare cu palete axial-tangenţiale, care din punct de vedere constructiv ocupă un loc intermediar între turbionatoarele de tip cu palete tangenţiale şi cu palete axiale.

În funcţie de procedeul de turbionare şi construcţia ajutajului se pot obţine astfel diferite regimuri de curgere atît cu dezvoltare de curenţi inverşi cît şi fără. Modificînd aria secţiunii de intrare şi raportul dimensiunilor acesteia la turbionatoarele tip tangenţial şi melcat, sau unghiul α de înclinare a paletelor la turbionatoarele cu palete, se pot obţine diferite grade de tubionare a curenţilor la ieşirea din turbionator.

Experienţele efectuate cu diferite tipuri de generatoare de turbionare au arătat că parametrul local n şi gradele de turbionare Ω, n_c sau S, definite mai sus, sînt criterii de similitudine semnificative pentru aprecierea turbionării jeturilor.

Totuşi, parametrul $n = w_t/w_a$ are neajunsul că nu ia în considerare punctul de aplicare a vectorului componentei tangenţiale a vitezei. Prin urmare, la aceeaşi valoare a acestui parametru pentru diferite jeturi, momentul cantităţii de mişcare a jetului turbionat poate avea valori complet diferite. De asemenea, calculul numărului de turbionare Ω sau S necesită măsurări exacte ale distribuţiei vitezelor şi presiunilor statice în secţiunile transversale ale jeturilor turbionate.

Utilizarea unor parametri de turbionare „constructivi" de genul S' sau n_c are dezavantajul că turbionarea reală pentru aceleaşi valori ale lui S' sau n_c nu poate fi identică pentru diferite tipuri de turbionatoare datorită unor cauze care depind de arhitectura interioară a turbionatorului. Dintre aceste cauze cele mai importante sînt :

— pierderea de energie a curentului de gaz prin frecările interioare şi la contactul cu pereţii canalului;

— neuniformitatea cîmpului de viteze în diferite secţiuni ale părţii de trecere a turbionatorului;

— condiţii diferite de formare a structurii aerodinamice a curentului la ieşirea din turbionator.

Tratarea teoretică a curgerii jeturilor turbionare turbulante nu este completă, deoarece nu duce la descrierea completă a cîmpului curgerii. Aceasta datorită dificultăţilor de a prescrie profilul universal al componentelor vitezei în zona curenţilor interni de recirculare, unde vitezele axiale au valori negative în zona axei.

Trebuie menţionat că soluţiile obţinute prin diferitele metode prezentate sînt adevărate numai în domeniile curgerii în care ipotezele admise îşi păstrează veridicitatea (presiune constantă în jet, gradientul radial al vitezei în lungul axei jetului turbionat nu devine nicăieri nul, regimul de curgere este automodelat ş.a.), adică de regulă la distanţe mari în aval de secţiunea iniţială a jetului. De asemenea, simplificările

27 — c. 668

operate asupra ecuaţiilor de mişcare fac ca soluţiile generale analitice pentru jetul turbulent turbionat să fie afectate de un grad mare de incertitudine sau să necesite constante suplimentare ce trebuie determinate experimental pentru fiecare tip de jet în parte.

Nici metoda analogiei cu teoria conducţiei termice [17] care se pare că are un grad mai mare de aplicabilitate şi adaptabilitate la calculul curgerilor turbionate, nu are un caracter universal, deoarece pentru fiecare curgere trebuie să se cunoască profilul iniţial al distribuţiilor parametrilor (determinat tot experimental), iar valoarea parametrului caracteristic de pe axă, aşa-numita „cheie empirică", de calcul, nu este uşor de stabilit.

În prezent studiile teoretice întreprinse pentru calcalul curgerilor jeturilor turbionate utilizează metodele de integrare numerică a ecuaţiilor de mişcare [25].

9. CALCULUL TERMOGAZODINAMIC AL MAȘINILOR ENERGETICE

Procesele termogazodinamice desfășurate în mașinile energetice nu au loc într-o singură treaptă din motive legate de limitarea creșterii de entropie și necesitatea asigurării unor răciri sau încălziri intermediare ale agentului.

În cazul turbinelor, de acțiune, prin destinderea adiabată a agentului are loc transformarea energiei potențiale în lucru mecanic, procesul propriu-zis desfășurîndu-se în două etape, care constituie o treaptă, și anume : în ajutaje (fixe) are loc transformarea energiei potențiale în energie cinetică, iar în palete (mobile) energia cinetică se transformă în lucru mecanic sau în unele cazuri se realizează și transformarea energiei potențiale în cinetică. Ajutajele și paletele parcurse în serie de agentul termic constituie o treaptă, turbinele fiind formate în general din mai multe trepte de destindere. În cazul turbinelor axiale, agentul parcurge mașina pe o direcție preponderent axială, la ultimele trepte producîndu-se totuși o ușoară evazare determinată de creșterea volumului specific cu scăderea presiunii. Prin scăderea presiunii în ajutaj de la p_0 la p_1, valoarea vitezei absolute a agentului crește de la c_0 la c_1, viteză cu care agentul intră în paletă (figura 9.1).

Valoarea vitezei relative de intrare a agentului în paletă w_1 rezultă din triunghiul de viteze constituit din c_1, w_1 și viteza periferică u_1 ($\bar{c}_1 = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$). Destinderea desfășurată în continuare în paletele turbinelor cu reacțiune de la p_1 la p_2 are ca efect creșterea vitezei relative $\bar{w}_2$.

Scăderea presiunii în ajutaje de la p_0 la p_1 și în continuare în palete pînă la p_2 corespunde unor variații de entalpie $\Delta h_s'$ respectiv $\Delta h_s''$, pentru procesul izentropic (figura 9.2). Gradul de reacțiune al turbinelor cu reacțiune este definit prin relația

$$r = \frac{\Delta h_s''}{\Delta h_s' + \Delta h_s''} \tag{9.1}$$

Cazul $r = 0$ corespunde turbinei cu acțiune, celelalte situații caracterizînd turbina cu reacțiune. O valoare ridicată pentru gradul de reacțiune prezintă dezavantajul unei transformări mai restrînse a energiei

cinetice în lucru mecanic şi deci o mai mică cădere de entalpie pe fiecare treaptă. Pentru cazul unei valori reduse a gradului de reacţiune este necesară o admisie parţială a agentului termic, la limită ea putîndu-se reduce

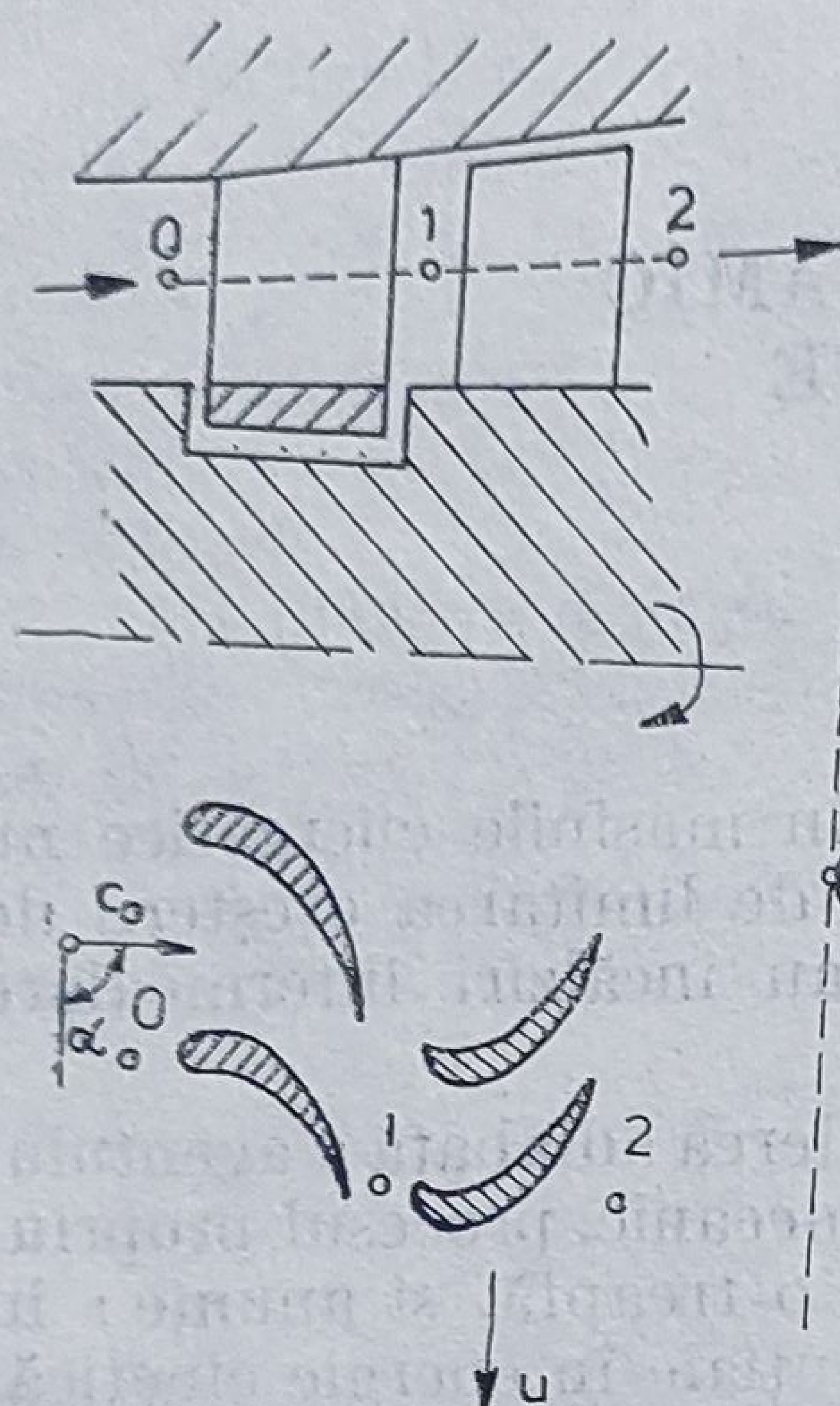


Fig. 9.1. Procese gazodinamice în turbina axială cu acţiune.

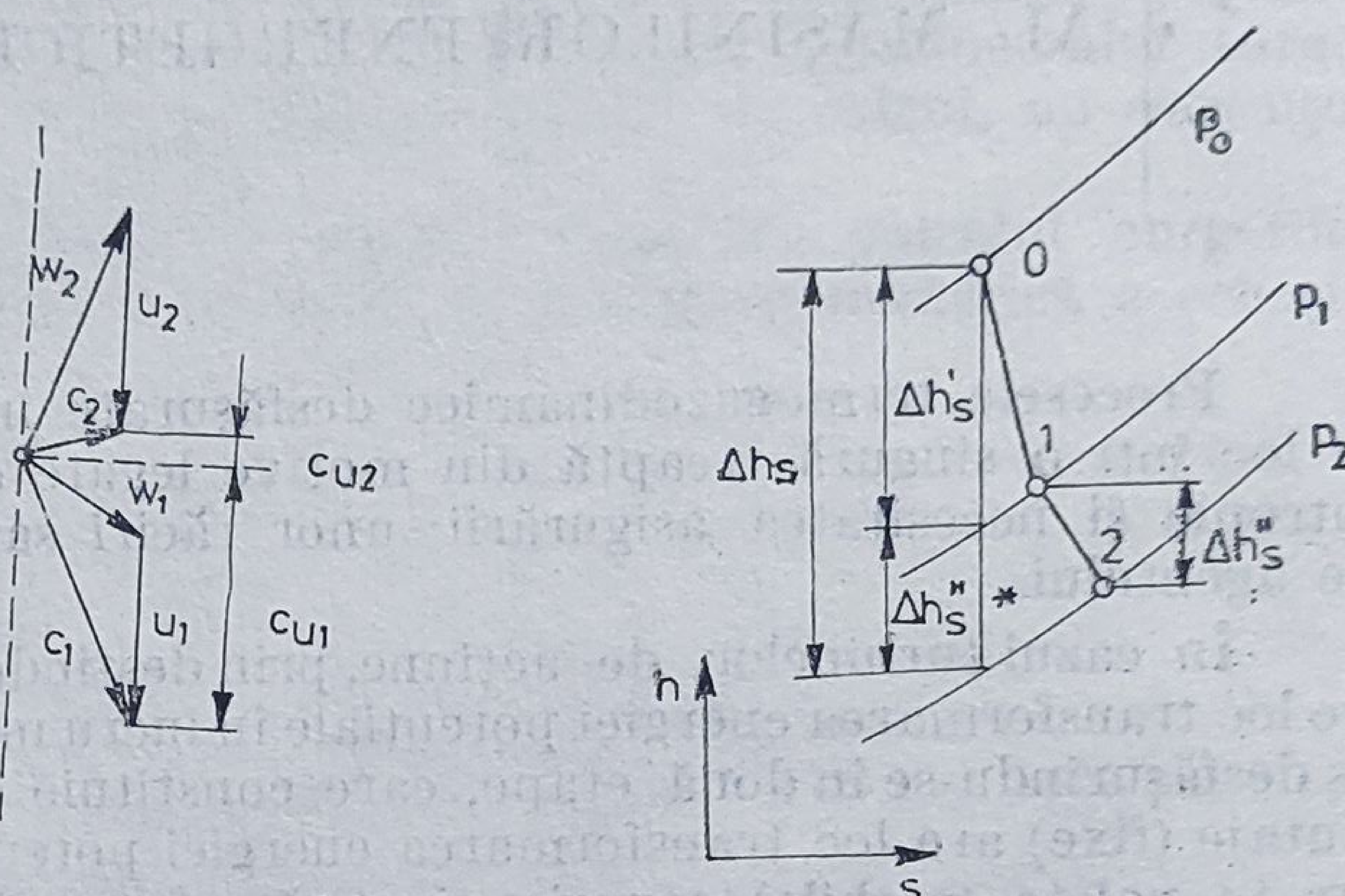


Fig. 9.2. Reprezentarea procesului din treapta de turbină cu reacţiune în diagrama $h-s$.

la un singur ajutaj prin care iese un jet de fluid îndreptat spre paletele turbinei (turbina de tip Laval).

În cazul turbinelor de tip radial (Ljungström) valoarea vitezei relative se modifică foarte mult de la o treaptă la alta, căderea de entalpie pe fiecare treaptă fiind de 2 . . .4 ori mai mare decît la cele de tip axial. Avantajele utilizării acestor turbine sînt legate de asigurarea unei mai bune uniformităţi a încărcării termice şi deci a deformaţiilor.

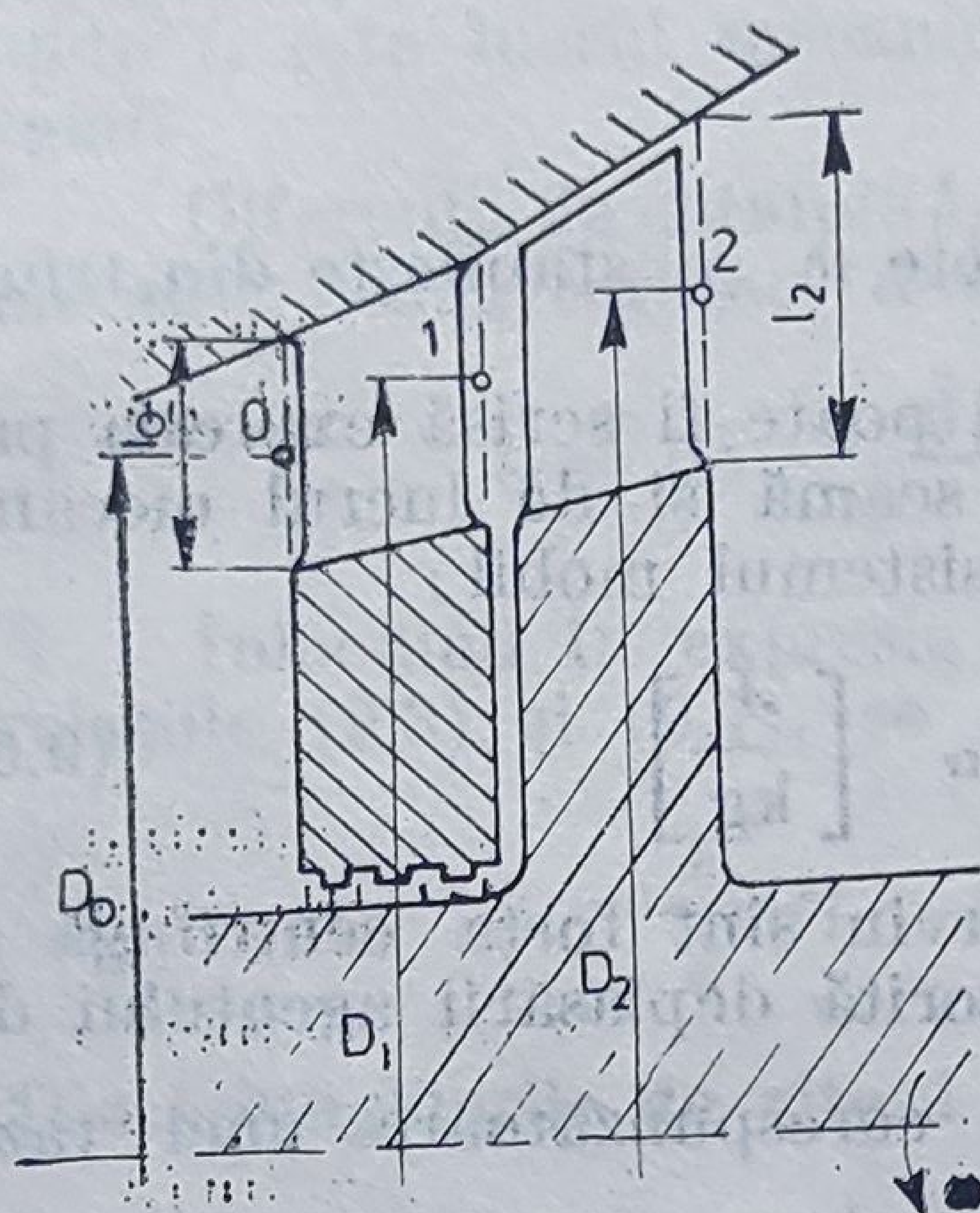
Compresoarele rotative asigură transformarea energiei cinetice în energie potenţială de presiune; creşterea de presiune în fiecare treaptă a compresoarelor de tip axial este redusă, realizînd astfel valori apropiate pentru viteze la intrarea şi ieşirea agentului. Compresorul rotativ de tip radial realizează valori ridicate ale vitezelor periferice, de pînă la 460 m/s, la ieşirea din rotor fiind prevăzut cu un difuzor în care energia cinetică se transformă în energie potenţială.

9.1. TEORIA CURGERII UNIDIRECŢIONALE A GAZULUI PERFECT PRIN TREAPTA DE TURBINĂ

Datorită complexităţii repartiţiei de viteze în treptele turbinelor, pentru simplificarea metodei de calcul se consideră că procesul de curgere

este unidirecţional, desfăşurat în condiţii adiabate. Considerînd o treaptă de turbină cu acţiune, formată dintr-un ajutaj şi o paletă (figura 9.3), expresia primului principiu al termodinamicii pentru secţiunile de control 0—1, corespunzătoare ajutajului, este

$$h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_0 + \frac{c_0^2}{2} \tag{9.2}$$



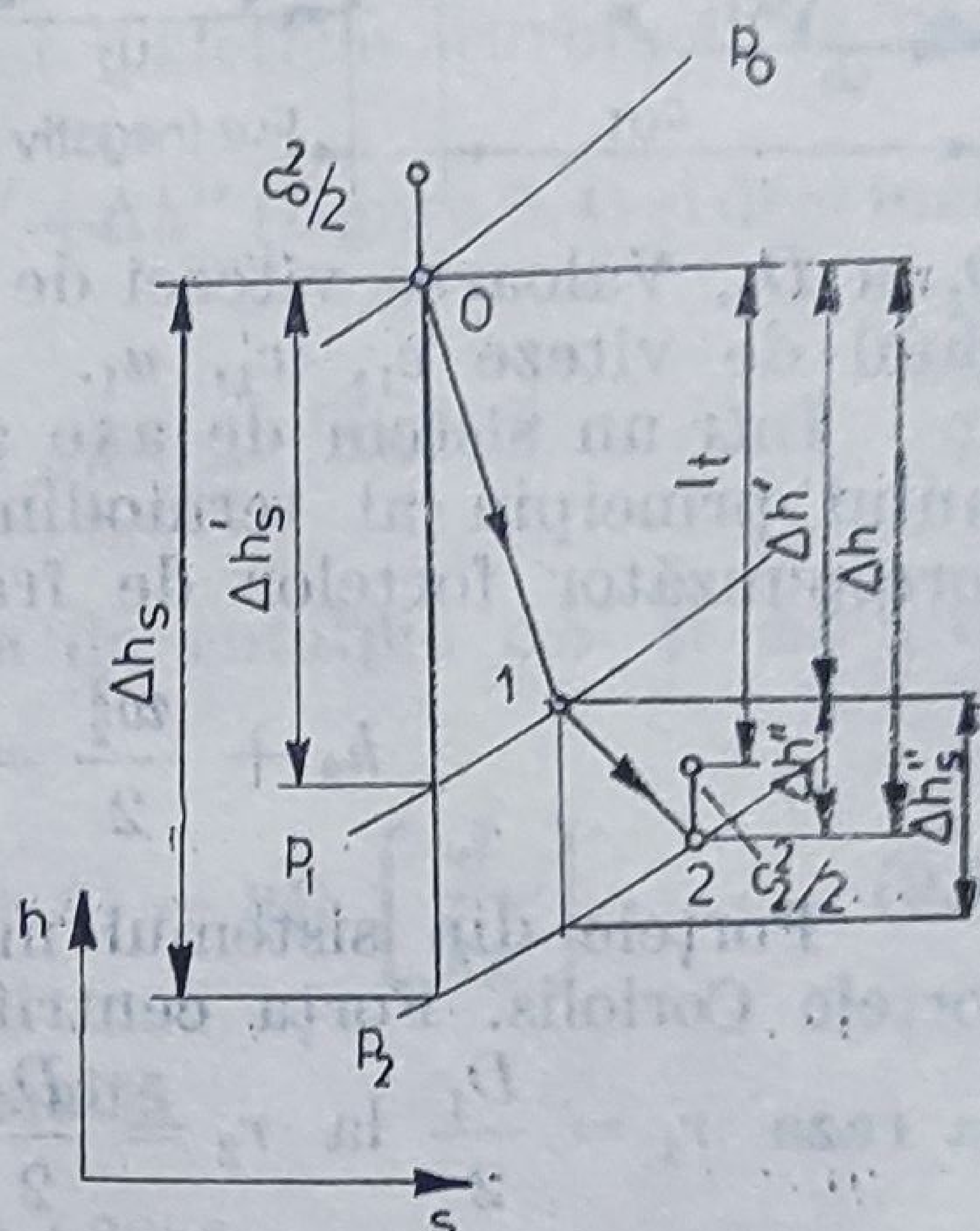


Fig. 9.4. Reprezentarea completă a procesului desfăşurat în treapta de turbină în diagrama $h-s$.

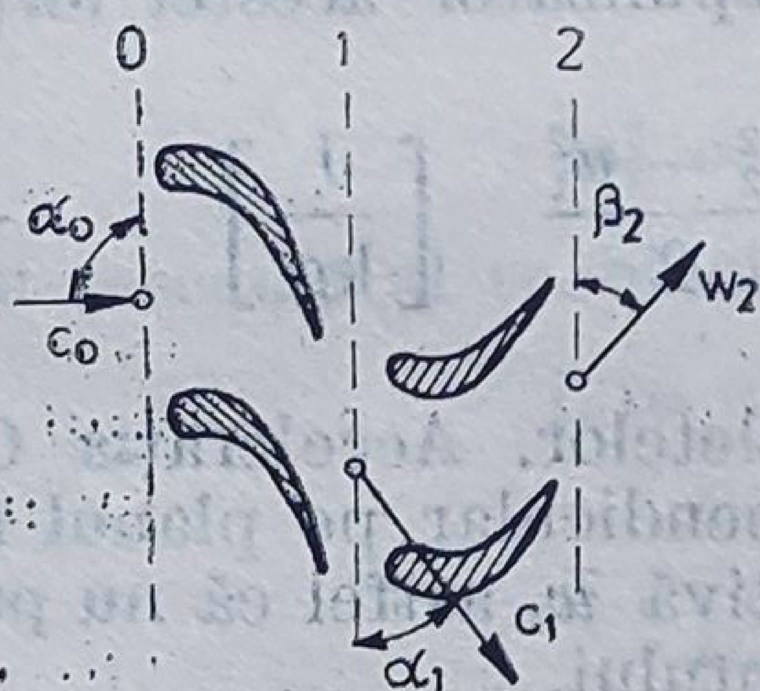


Fig. 9.3. Treapta de turbină.

în care c_0 şi c_1 reprezintă valorile absolute ale vitezelor la intrare, respectiv ieşire, iar h_0 şi h_1 — entalpiile corespunzătoare celor două stări.

Dacă se notează diferenţa de entalpie $h_0 - h_1 = \Delta h'$ (figura 9.4) rezultă

$$\Delta h' = \frac{c_1^2 - c_0^2}{2} \tag{9.3}$$

această cădere de entalpie luînd în considerare procesul real, în care apare o creştere de entropie datorită frecării.

În cazul neglijării frecării căderea de entalpie este $\Delta h_s'$, valoarea vitezei la ieşirea din ajutaj fiind dată de expresia

$$\frac{c_{1s}^2}{2} = \Delta h_s' + \frac{c_0^2}{2} \tag{9.4}$$

Unghiul de ieșire din ajutaj este α_1, astfel că triunghiurile de viteze la intrarea, respectiv ieșirea din palete se prezintă ca în figura 9.5, în care w este viteza relativă, iar u viteza tangențială corespunzătoare diametrelor

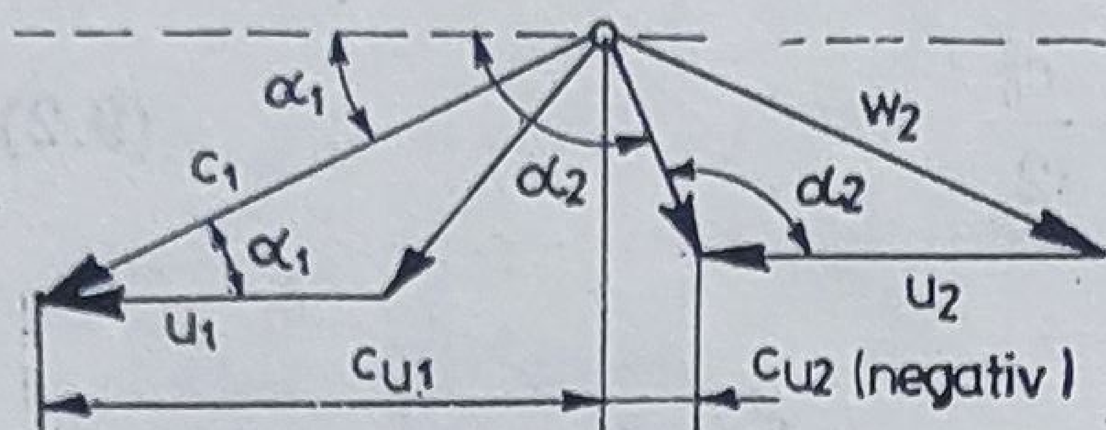


Fig. 9.5. Triunghiurile de viteze pentru palete.

D_1 și D_2. Valoarea vitezei de intrare în palete w_1 se stabilește din triunghiul de viteze c_1, w_1, u_1.

Într-un sistem de axe atașat turbinei poate fi scrisă expresia primului principiu al termodinamicii ținînd seamă și de lucrul mecanic corespunzător forțelor de frecare l_{fr} din sistemul mobil:

$$h_2 + \frac{w_2^2}{2} = h_1 + \frac{w_1^2}{2} + l_{fr} \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{9.5}$$

Forțele din sistemul mobil care intervin sînt forța centrifugă și forțele Coriolis. Forța centrifugă apare datorită deplasării agentului de la raza $r_1 = \frac{D_1}{2}$ la $r_2 = \frac{D_2}{2}$, accelerația corespunzătoare unei raze curente fiind $\bar{a}_c = \bar{r}\,\omega^2$; lucrul mecanic corespunzător acestei forțe este

$$l_{fc} = \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} r \cdot dr = \omega^2 \, \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{9.6}$$

în care ω reprezintă viteza unghiulară a paletelor. Accelerația Coriolis are expresia $a_{co} = 2(\bar{\omega} \cdot \bar{w})$ și este dirijată perpendicular pe planul format din vectorii viteză unghiulară $\bar{\omega}$ și viteză relativă $\bar{w}$, astfel că nu produce lucru mecanic pe direcția de mișcare a agentului.

Ținînd deci seamă că $l_{fr} = l_{fc}$, înlocuind în expresia (9.5) rezultă

$$h_2 + \frac{w_2^2}{2} = h_1 + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

sau, notînd $h_1 - h_2 = \Delta h''$ (figura 9.4), relația se poate scrie sub forma

$$\frac{w_2^2}{2} = \Delta h'' + \frac{w_1^2 + u_2^2 - u_1^2}{2} \tag{9.7}$$

Neglijînd frecarea, valoarea vitezei relative la ieșirea din paletele turbinei este

$$\frac{w_{2s}^2}{2} = \Delta h_s'' + \frac{w_1^2 + u_2^2 - u_1^2}{2}$$

Pentru întreg procesul termodinamic desfăşurat între stările 0—2, expresia conservării energiei este

$$h_0 + \frac{c_0^2}{2} = h_2 + \frac{c_2^2}{2} + l_t \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{9.8}$$

unde l_t este lucrul mecanic specific cedat paletelor turbinei de către agent.

Diferenţa de entalpie $h_0 - h_2 = \Delta h = \Delta h' + \Delta h''$ (figura 9.4) şi deci lucrul mecanic cedat turbinei devine

$$l_t = \Delta h + \frac{c_0^2 - c_2^2}{2} = \Delta h' + \Delta h'' + \frac{c_0^2 - c_2^2}{2} \tag{9.9}$$

Înlocuind în expresia (9.9) variaţiile de entalpie $\Delta h'$ şi $\Delta h''$, din relaţiile (9.3) şi (9.7), se obţine

$$l_t = \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2^2 + w_2^2 - w_1^2 + u_1^2 - u_2^2) \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{9.10}$$

Din triunghiurile de viteză (figura 9.5) rezultă

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1c_1 \cdot \cos\alpha_1$$

şi :

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2c_2 \cdot \cos\alpha_2,$$

lucrul mecanic al turbinei devenind :

$$l_t = u_1c_1 \cdot \cos\alpha_1 - u_2c_2 \cdot \cos\alpha_2$$

sau :

$$l_t = u_1c_{u1} - u_2c_{u2} \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{9.11}$$

Această relaţie este cunoscută în literatură sub denumirea de „ecuaţia momentului a lui Euler".

Dacă puterea dezvoltată de turbină este P_t, iar momentul de rotaţie corespunzător M_t, lucrul mecanic are expresia

$$l_t = \frac{P_t}{\dot{m}} = \frac{M_t \cdot \omega}{\dot{m}} = \frac{\omega(\dot{m}r_1c_{u1} - \dot{m}r_2c_{u2})}{\dot{m}}$$

sau :

$$l_t = \omega(r_1c_{u1} - r_2c_{u2}) \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{9.12}$$

Dacă treapta de turbină este pur axială, adică $r_1 = r_2 = r$, rezultă că expresia lucrului mecanic devine

$$l_{ta} = u \cdot \Delta c_u \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right] \tag{9.13}$$

deci valoarea lucrului mecanic obţinut este condiţionată de variaţia componentelor tangenţiale ale vitezelor absolute.

În cazul turbinelor cu mai multe trepte, energia cinetică din secţiunea de ieşire $c_2^2/2$ nu trebuie considerată ca pierdere, ea reprezentînd energia de intrare pentru treapta următoare.

În afara pierderilor de energie cauzate de ireversibilitatea procesului de destindere în ajutaje şi palete, apar şi o serie de pierderi cauzate de pierderile de agent prin labirint, diafragmă sau carcasă, toate luate în considerare ca o micşorare corespunzătoare a cantităţii de agent care parcurge treapta respectivă. De asemenea mişcarea similară a agentului determină apariţia unor pierderi prin ventilaţie l_v, astfel că lucrul mecanic intern, stabil la nivelul rotorului turbinei, este

$$l_i = l_t - \Sigma l_j \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right] \tag{9.14}$$

în care Σl_j reprezintă suma pierderilor de energie datorită ireversibilităţii procesului, neetanşeităţii şi ventilaţiei.

Un tip special de pierderi apare la ultimele trepte ale turbinelor cu abur, datorită particulelor de umiditate în stare lichidă. În orice punct

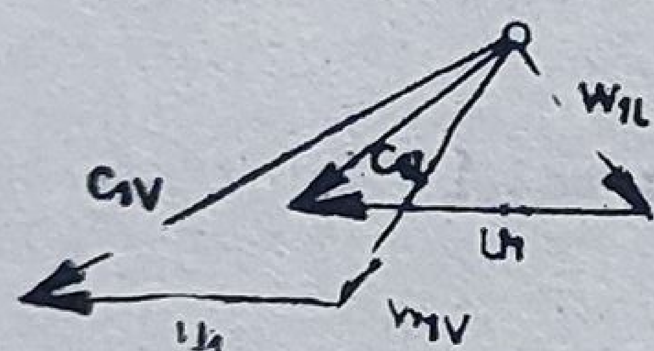


Fig. 9.6. Triunghiul de viteză pentru vapori de apă şi particulele de lichid.

mărimea vitezei şi direcţia de mişcare a particulelor de apă sînt diferite de ale aburului, astfel că se poate construi un triunghi de viteze pentru abur şi unul pentru picăturile de lichid (figura 9.6). Picăturile de lichid ajung pe extradosul paletelor, unde energia lor de mişcare se transformă, în cea mai mare parte, în căldură. Procesul fiind echivalent cu o frînare a rotorului turbinei (datorită impulsului cedat de picături paletelor). Aprecierea din punct de vedere termodinamic a gradului de perfecţiune a procesului de transformare a energiei potenţiale a agentului în lucru mecanic se poate face cu ajutorul randamentului intern al turbinei, definit prin expresia

$$\eta_i = \frac{l_i}{\Delta h_0 + \dfrac{c_0^2 - c_2^2}{2}}$$ — pentru cazul neluării în considerare a pierderilor la ieşirea din treaptă.

$$\eta_i^* = \frac{l_i}{\Delta h_s + \dfrac{c_0^2}{2}}$$ — luînd în considerare pierderile de energie la ieşirea din palete.

Debitul masic de agent care trece prin palete rezultă din ecuația de continuitate aplicată în secțiunea de ieșire și este

$$\dot{m} = z k_2 \frac{\pi D_2 l_2 \varepsilon w_2 \cdot \sin \beta_2}{v_2} \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right] \quad (9.15)$$

în care : z reprezintă numărul de palete ; k_2—factor de corecție care ia în considerare repartiția de viteză în secțiune ; l_2 — lungimea paletei ; ε — gradul de admisie a agentului pe circumferința paletelor ; w_2 — viteza relativă în secțiunea de ieșire ; β_2 — unghiul de ieșire al agentului din palete ; v_2 — volumul specific la ieșire.

Pentru dimensionarea diametrului treptei unei turbine este necesar să se pornească de la o valoare recomandată pentru raportul l_2/D_2, rezultînd diametrul corespunzător secțiunii de ieșire :

$$D_2 = \sqrt{\frac{\dot{m} v_2}{\pi k_2 \left(\frac{l_2}{D_2}\right) w_2 \sin \beta_2}} \; [\mathrm{m}] \quad (9.16)$$

9.2. TEORIA CURGERII UNIDIRECȚIONALE A GAZULUI PRIN TREAPTA UNUI TURBOCOMPRESOR

Ipotezele de calcul sînt identice cu cele prezentate anterior la treapta de turbină ; principalele se referă la procesul adiabat de curgere și înlocuirea distribuției de viteze într-o secțiune oarecare prin valoarea medie corespunzătoare. Schematic, curgerea agentului prin grupul paletă-difuzor în cazul turbocompresoarelor axiale și radiale se prezintă ca în figura 9.7.

Expresia legii conservării energiei între secțiunile $1-2$ este

$$h_2 + \frac{w_2^2}{2} = h_1 + \frac{w_1^2}{2} + l_r \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] \quad (9.17)$$

unde l_r reprezintă energia corespunzătoare forțelor care intervin în sistemul mobil, dat de relația (9.6). Notînd diferența de entalpie $h_2 - h_1 = \Delta h''$, rezultă

$$\frac{w_2^2}{2} = \frac{w_1^2 + u_2^2 - u_1^2}{2} - \Delta h'' \quad (9.18)$$

creșterea de entalpie $\Delta h''$ corespunzînd creșterii de presiune de la p_1 la p_2 (fig. 9.8).

Dacă procesul de comprimare se desfășoară după o adiabată reversibilă, creșterea de entalpie este $\Delta h_s''$ care prezintă o valoare mai mică decît

$\Delta h''$; expresia vitezei în secțiunea de ieșire w_{2s}, în acest caz, este

$$\frac{w_{2s}^2}{2} = \frac{w_2^2 + u_2^2 - u_1^2}{2} - \Delta h_s'', \tag{9.19}$$

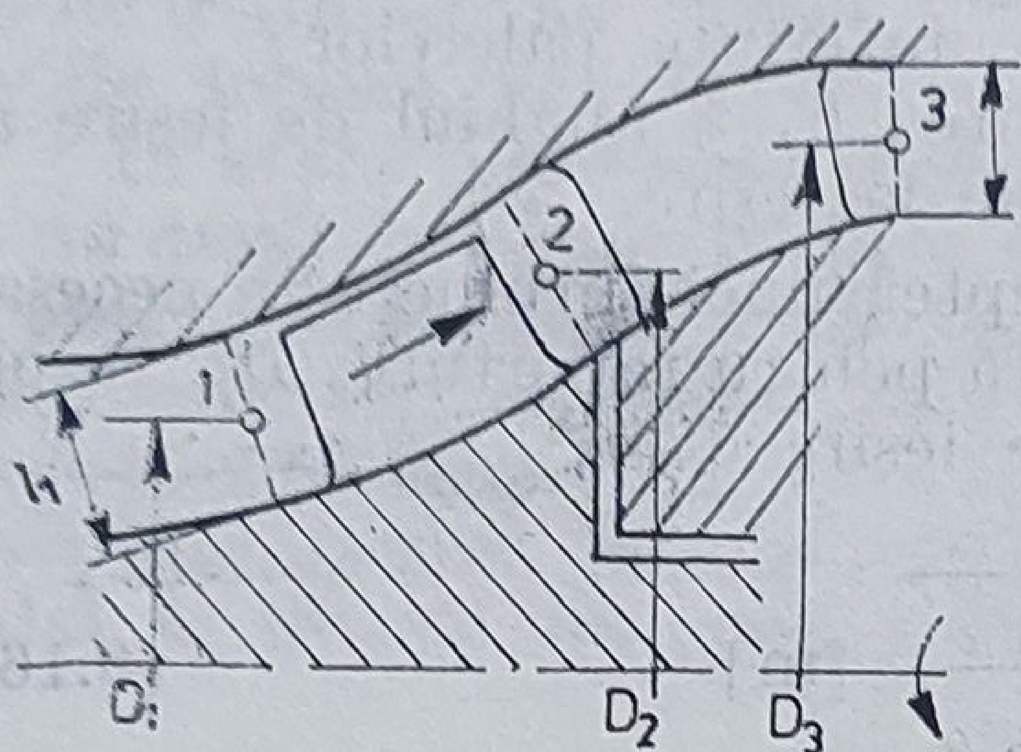


Fig. 9.7. Treaptă de comprimare a unui turbocompresor.

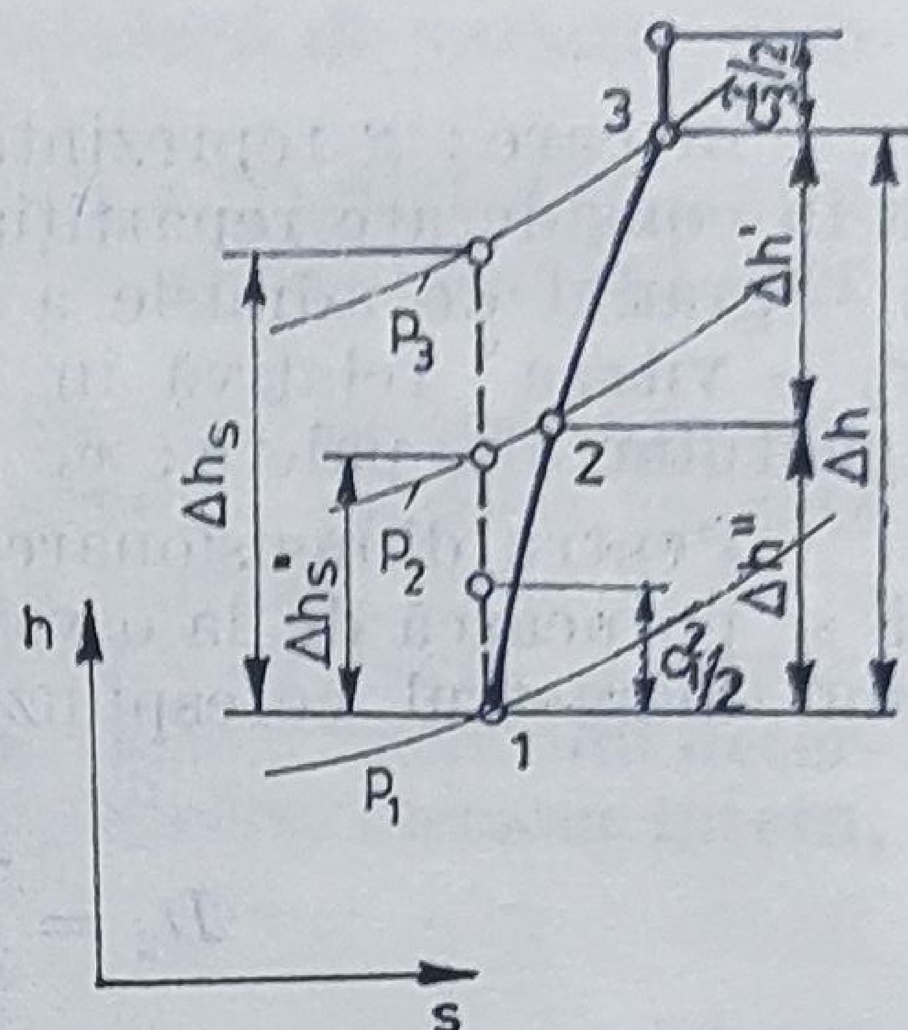


Fig. 9.8. Reprezentarea procesului de comprimare în diagrama $h-s$.

iar energia cinetică reală $w_2^2/2$ poate fi stabilită cu ajutorul relației

$$\frac{w_2^2}{2} = \eta''\left(\frac{w_1^2 - u_2^2 - u_1^2}{2} - \Delta h_s''\right) \tag{9.20}$$

în care termenul η'' reprezintă pierderile care intervin în procesul real de comprimare.

Din expresiile (9.18) și (9.20) rezultă variațiile corespunzătoare de entalpie pentru procesul real de comprimare și respectiv fără frecare:

$$\Delta h'' = \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2 + u_2^2 - u_1^2) \tag{9.21}$$

$$\Delta h_s'' = \frac{1}{2}\left(w_1^2 - \frac{w_2^2}{\eta''} + u_2^2 - u_1^2\right) \tag{9.22}$$

În difuzor, cu ajutorul triunghiului de viteze, se trece de la viteza relativă w_2 și periferică u_2 la viteza absolută c_2 (figura 9.9); se obțin astfel relațiile

$$\Delta h' = \frac{1}{2}(c_2^2 - c_3^2) \tag{9.23}$$

$$\Delta h_s' = \frac{1}{2}\left(c_2^2 - \frac{c_3^2}{\eta'}\right) \tag{9.24}$$

Expresia primului principiu al termodinamicii pentru întreaga treaptă de comprimare este

$$\left(h_3 + \frac{c_3^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{c_1^2}{2}\right) = l_c \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{9.25}$$

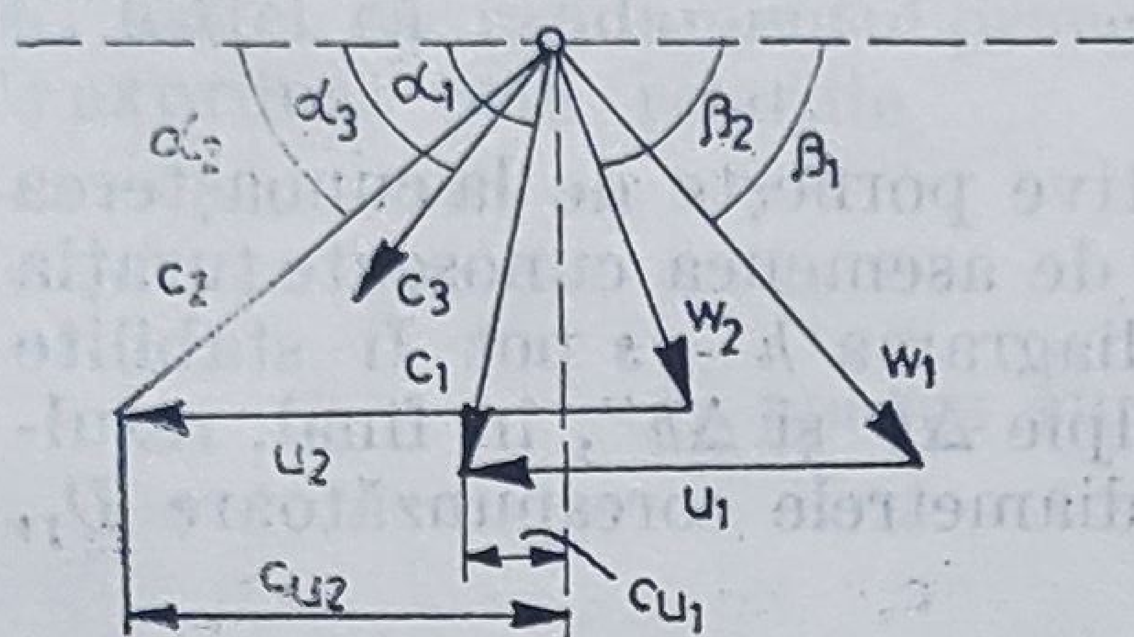


Fig. 9.9. Triunghiul de viteze pentru o treaptă de comprimare.

unde l_c este lucrul mecanic specific primit de agent în procesul de comprimare.

Cu notația $h_3 - h_1 = \Delta h' + \Delta h'' = \Delta h$ lucrul mecanic specific al compresorului este

$$l_c = h + \frac{c_3^2 - c_1^2}{2} = \Delta h' + \Delta h'' + \frac{c_3^2 - c_1^2}{2}$$

sau, folosind relațiile (9.21) și (9.23) rezultă :

$$l_c = \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2 + w_1^2 - w_2^2 + u_2^2 - u_1^2) \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{9.26}$$

Din triunghiul de viteze prezentat în figura 9.9 se obține următoarea expresie pentru lucrul mecanic specific :

$$l_c = u_2 \cdot c_{u2} - u_1 \cdot c_{u1}, \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{9.27}$$

relație care, în cazul unui proces axial de curgere, devine

$$l_c = u \cdot \Delta c_u \quad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{9.28}$$

Debitul masic de agent rezultă din ecuația de continuitate

$$\dot{m} = z k_3 \frac{\pi D_3 l_3 c_3 \cdot \sin \alpha_3}{v_3} \tag{9.29}$$

randamentul procesului de comprimare putînd fi stabilit în mai multe feluri și anume :

$$\eta_c = \frac{\Delta h + \dfrac{c_3^2 - c_1^2}{2}}{l_c} \tag{9.30}$$

$$\eta_s = \frac{\Delta h_s - \frac{c_1^2}{2}}{l_c} \tag{9.31}$$

$$\eta_{sc} = \frac{\Delta h_s}{\Delta h} \tag{9.32}$$

Dimensionarea compresoarelor rotative pornește de la cunoașterea valorilor pentru parametrii p_1 și h_1, fiind de asemenea cunoscute turația n și viteza în secțiunea de ieșire c_3. Din diagrama $h - s$ pot fi stabilite poziția punctelor 2 și 3, creșterile de entalpie $\Delta h'$ și $\Delta h''$, în final, rezultînd înălțimile paletelor l_1, l_2 și l_3, ca și diametrele corespunzătoare D_1, D_2 și D_3.

9.3. DEFINIREA RANDAMENTULUI DE CURGERE

Pierderile de energie în cazul proceselor de curgere a agenților termodinamicii prin turbine și compresoare pot fi evidențiate prin expresiile η' și η'' ale randamentelor, a căror formă explicită este

pentru turbine:

$$\eta' = \frac{\frac{c_1^2}{2}}{\frac{c_0^2}{2} + \Delta h_s'}$$

$$\eta'' = \frac{\frac{w_2^2}{2}}{\Delta h_s'' + \frac{w_1^2 + u_2^2 - u_1^2}{2}} \tag{9.33}$$

pentru compresoare rotative:

$$\eta' = \frac{\frac{c_2^3}{2}}{\frac{c_2^2}{2} - \Delta h_s'}$$

$$\eta'' = \frac{\frac{w_2^2}{2}}{\frac{w_2^2 + u_2^2 - u_1^2}{2} - \Delta h_s''} \tag{9.34}$$

În cazul cînd nu are loc schimb de energie cu exteriorul, variația de entalpie corespunde modificării energiei cinetice a agentului, intervenind o accelerare sau decelerare în raport cu forma geometrică a canalului de curgere.

Pentru turbină, viteza w_1 joacă rolul vitezei c_0, iar w_2 rolul vitezei c_1, astfel că randamentul procesului de destindere sau comprimare poate fi exprimat prin relațiile

$$\text{pentru turbine } \eta = \frac{\frac{c_1^2}{2}}{\frac{c_0^2}{2} + \Delta h_s} \tag{9.35}$$

$$\text{pentru compresoare } \eta = \frac{\frac{c_1^2}{2}}{\frac{c_0^2}{2} - \Delta h_s} \tag{9.36}$$

Variațiile de entalpie se consideră pozitive pentru turbine $\Delta h_s = h_0 - h_{1s}$, iar pentru compresoare, dacă entalpia crește $\Delta h_s = h_{1s} - h_0$. Înlocuind aceste expresii ale variației de entalpie în relația de definiție a randamentului rezultă

$$\eta = \frac{\frac{c_1^2}{2}}{\frac{c_0^2}{2} + h_0 - h_{1s}} \tag{9.37}$$

Această expresie evidențiază identitatea modului de definire a noțiunii de randament pentru turbine și pentru compresoarelor rotative.

În cazul accelerării unui curent de fluid, randamentul izentropic este

$$\eta_s = \frac{\Delta h}{\Delta h_s} \tag{9.38}$$

fiind preferabil a fi stabilit în cazul proceselor desfășurate într-o singură treaptă. Această expresie poate fi pusă în legătură cu forma generală a randamentului, precizată anterior și anume:

$$\eta_s = \frac{\eta\left[\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 - 1\right]}{\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 - \eta} \tag{9.39}$$

În cazul curgerii izocinetice ($c_0 = c_1$) rezultă anularea randamentului izentropic η_s, constatîndu-se deci că sub forma în care este definit poate fi aplicat numai proceselor de curgere puternic accelerate.

La curgerea decelerată a unui fluid, randamentul izentropic al difuzorului este definit de relația

$$\eta_s = \frac{\Delta h_s}{\Delta h} \tag{9.40}$$

sau pus în legătură cu randamentul termodinamic general η, dat de relația (9.36), capătă forma

$$\eta_s = \frac{1 - \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 \frac{1}{\eta}}{1 - \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2} \tag{9.41}$$

În unele cazuri, la difuzoare aprecierea performanțelor poate fi făcută cu ajutorul unui parametru denumit *grad de conversie* λ_D, definit prin relația

$$\lambda_D = \frac{\Delta h_s}{\frac{c_0^2}{2}} \tag{9.42}$$

sau, în funcție de expresia randamentului din relația (9.36), are expresia

$$\lambda_D = 1 - \frac{1}{\eta}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 \tag{9.43}$$

Contrar domeniului de variație a randamentului η, gradul de conversie λ_D poate fi nul sau chiar negativ, putînd astfel caracteriza orice posibilitate de desfășurare a procesului termodinamic.

Dacă procesul de curgere nu are caracter pur axial, randamentul paletelor poate fi definit prin expresia

$$\eta'' = \frac{w_2^2}{w_1^2 + u_2^2 - u_1^2 \pm 2\Delta h_s''} \tag{9.44}$$

unde semnul „+" intervine pentru turbine, iar „—" pentru compresoare.

Teoria generală a curgerii unidirecționale prin turbomașini utilizează valorile medii în secțiunea considerată a mărimilor care caracterizează mișcarea. Astfel dacă se consideră că suprafața de control este A, atunci valoarea medie a presiunii este $\bar{p} = \frac{1}{A}\int_A p\mathrm{d}A$, a entalpiei $\bar{h} = \frac{1}{\dot{m}}\int_A h\rho w \cdot \mathrm{d}A$, a densității $\bar{\rho} = \rho(\bar{p}, \bar{h})$ etc.

Considerînd componentele vitezei absolute într-un punct oarecare (tangenţială c_t, normală c_n şi axială c_a) pe baza ecuaţiei de impuls, rezultă următoarele valori medii :

$$c_{ut} = \frac{\int \rho\, c_n c_u \mathrm{d}A}{\dot{m}} \quad ; \quad c_{nt} = \frac{\int \rho c_n^2 \,\mathrm{d}A}{\dot{m}} \quad ; \quad c_{at} = \frac{\int \rho c_n c_a \mathrm{d}A}{\dot{m}} \tag{9.45}$$

De asemenea, pe baza ecuaţiei conservării energiei se obţin expresiile :

$$c_{ue}^2 = \frac{\int \rho\, c_n c_u^2 \mathrm{d}A}{\dot{m}} \quad ; \quad c_{ne}^2 = \frac{\int \rho c_n^3 \,\mathrm{d}A}{\dot{m}} \quad ; \quad c_{ae}^2 = \frac{\int \rho\, c_n c_a^2 \mathrm{d}A}{\dot{m}} \tag{9.46}$$

Ţinînd seamă de cele două moduri distincte de definiţie a valorilor medii pentru viteză, se pune întrebarea în ce mod trebuie formulată valoarea medie a vitezei care intervine în teoria curgerii unidirecţionale a fluidelor prin turbomaşini ?

Componentele normale şi axiale c_n şi c_a ale vitezei absolute prezintă aceleaşi valori atît pentru sistemul mobil cît şi pentru cel fix de axe de coordonate. Componenta tangenţială a vitezei relative este

$$w_u = c_u - u \tag{9.47}$$

în care viteza periferică locală este $u = r \cdot \omega$

Conform relaţiei (9.46), prin înlocuirea expresiei (9.47) rezultă

$$w_{ue}^2 = \frac{1}{\dot{m}} \int_A \rho\, c_n w_n^2 \mathrm{d}A = c_{ue}^2 - \frac{2}{\dot{m}} \int_A \rho\, c_n u c_u \mathrm{d}A + u_e^2 \tag{9.48}$$

unde u_e reprezintă viteza periferică medie calculată cu ajutorul ecuaţiei energiei. Expresia pătratului vitezei tangenţiale

$$w_{ue}^2 = (c_{ue} - u_e)^2 = c_{ue}^2 - 2u_e\, c_{ue} + u_e^2 = \tag{9.49}$$

$$= c_{ue}^2 - \frac{2}{\dot{m}} \sqrt{\int_A \rho c_u u^2 \,\mathrm{d}A} \sqrt{\int_A \rho\, c_n c_u^2 \,\mathrm{d}A} + u_e^2$$

prezintă cu totul o altă formă faţă de relaţia (9.48), evidenţiind că :

$$w_{ue} \neq c_{ue} - u_e \tag{9.50}$$

adică valorile medii ale vitezelor stabilite cu ajutorul ecuaţiei energiei nu corespund teoremei de adunare algebrică cunoscută, deci triunghiul de viteze obţinut cu vitezele w_{ue}, c_{ue} şi u_e este total incorect.

Dacă se repetă acelaşi raţionament pentru componentele vitezei stabilite cu valorile medii din ecuaţia impulsului (9.45), se obţine

$$w_{ut} = c_{ut} - u_t \tag{9.51}$$

adică triunghiul de viteze este corect construit numai cu aceste componente.

10. TERMOGAZODINAMICA PROCESELOR DE ARDERE

Procesele de ardere a amestecurilor combustibile în stare gazoasă sînt însoțite de mișcarea fluidului în ansamblu, procesele chimice caracteristice arderii suprapunîndu-se peste aspectele dinamice ale curgerii. În cazul general pentru stabilirea regimului de ardere este necesar să se rezolve sistemul de ecuații referitoare la cinetica reacțiilor și mișcarea amestecului combustibil.

Zona de ardere separă regiunea gazelor de ardere de cea în care se găsește amestecul combustibil; viteza de propagare a frontului de flacără este dirijată pe direcția normală la suprafața frontului, fiind determinată de viteza locală de curgere a amestecului, și intensitatea fluxului de căldură transmis amestecului combustibil inițial.

Dacă grosimea frontului de flacără este δ, mărimea ei este proporțională cu expresia $\sqrt{\mathfrak{D}\tau}$, în care $\mathfrak{D}$ reprezintă coeficientul de difuzie, iar τ —timpul cinetic caracteristic reacției chimice. Viteza de deplasare a frontului de flacără este $S = \frac{\delta}{\tau} \approx \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\tau}}$, valoarea ei fiind în general redusă față de viteza sunetului și prezentînd o puternică dependență de concentrația combustibilului în amestec.

În cazul flăcărilor de difuzie, obținute prin amestecarea oxidantului cu combustibilul, în spațiul de ardere, datorită creșterii vitezei jetului de combustibil, flacăra trece din regimul laminar în cel turbulent.

Caracteristic flăcărilor laminare este propagarea frontului de flacără de la un strat la altul de amestec, prin transfer intermolecular. Deformarea profilului de viteză datorită turbulenței produce o deformare corespunzătoare a frontului de flacără cu pulsații mai mari decît δ și în consecință are loc o creștere sensibilă a vitezei de propagare a flăcării. Atît timp cît flacăra rămîne în regim laminar, lungimea flăcării crește cu mărirea vitezei gazului combustibil pînă la un maxim, după care apare o ușoară instabilitate care se mărește pe măsura accentuării turbulenței. Această autoturbulență a flăcării nu apare pentru valori prea ridicate ale criteriului Reynolds ($Re \approx 10^5$), ceea ce evidențiază faptul că există și un alt factor cu rol important în stabilizarea frontului de flacără.

Flăcările care se propagă într-un amestec combustibil pun în mișcare și fluidul din mediul ambiant pînă la o mare distanță, astfel că apare un gradient important de viteză pe direcția transversală a jetului, cît și între viteza amestecului combustibil și cea a produselor de ardere. În multe situații acest gradient de viteză produce o undă de șoc, care nu este neapărat necesar să se propage pe direcția curgerii gazelor de ardere, direcția de propagare fiind determinată de condițiile la limită legate în principal de transferul de căldură.

Atunci cînd regimul de ardere este foarte lent, iar viteza de pătrundere a fluxului de căldură de la gazele de ardere spre amestecul de combustibil este mare, este posibilă amorsarea procesului de ardere înaintea ajungerii frontului de flacără; un astfel de mecanism de propagare a arderii se numește detonație.

10.1. UNDA DE DETONAȚIE

După ce o undă de șoc trece printr-un punct din amestecul combustibil, se poate amorsa reacția de ardere datorită modificării locale a parametrilor de stare, reacția de ardere putînd să cuprindă întreaga cantitate de amestec, deci un interval de timp τ_c caracteristic timpului cinetic al reacției. Această undă de șoc antrenează un strat de gaze cu o grosime egală cu produsul între viteza de propagare a undei și timpul τ_c. Grosimea acestui strat nu depinde de dimensiunile transversale ale secțiunii, și între unda de șoc și cea de detonație poate să apară o zonă de discontinuitate.

Aplicînd pentru două secțiuni parcurse de unda de șoc expresia primului principiu al termodinamicii, luînd în considerație și dezvoltarea adiabată a procesului, rezultă

$$h_2 - h_1 - \frac{v_1 + v_2}{2}(p_2 - p_1) = 0 \tag{10.1}$$

în care: h_1 și h_2 reprezintă entalpiile în cele două puncte; v_1 și v_2—valorile corespunzătoare ale volumului specific; $p_2 - p_1$ saltul de presiune determinat de unda de șoc.

Dependența $p_2 = f(v_2)$ rezultată din ecuația (10.1) se numește „adiabată de detonație"; contrar „adiabatei de șoc" caracteristică amestecurilor combustibile, adiabata de detonație nu trece prin punctul corespunzător stării inițiale, căci temperatura și presiunea gazelor de ardere prin care se propagă unda de detonație sînt considerabil mai mari (fig. 10.1).

Viteza de reacție, apreciată prin fluxul de masă j corespunzător saltului de presiune $p_2 - p_1$, este

$$j = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}\right] \tag{10.2}$$

sau, pentru o stare oarecare, presiunea devine

$$p = p_1 + j^2(v_1 - v_2), \tag{10.3}$$

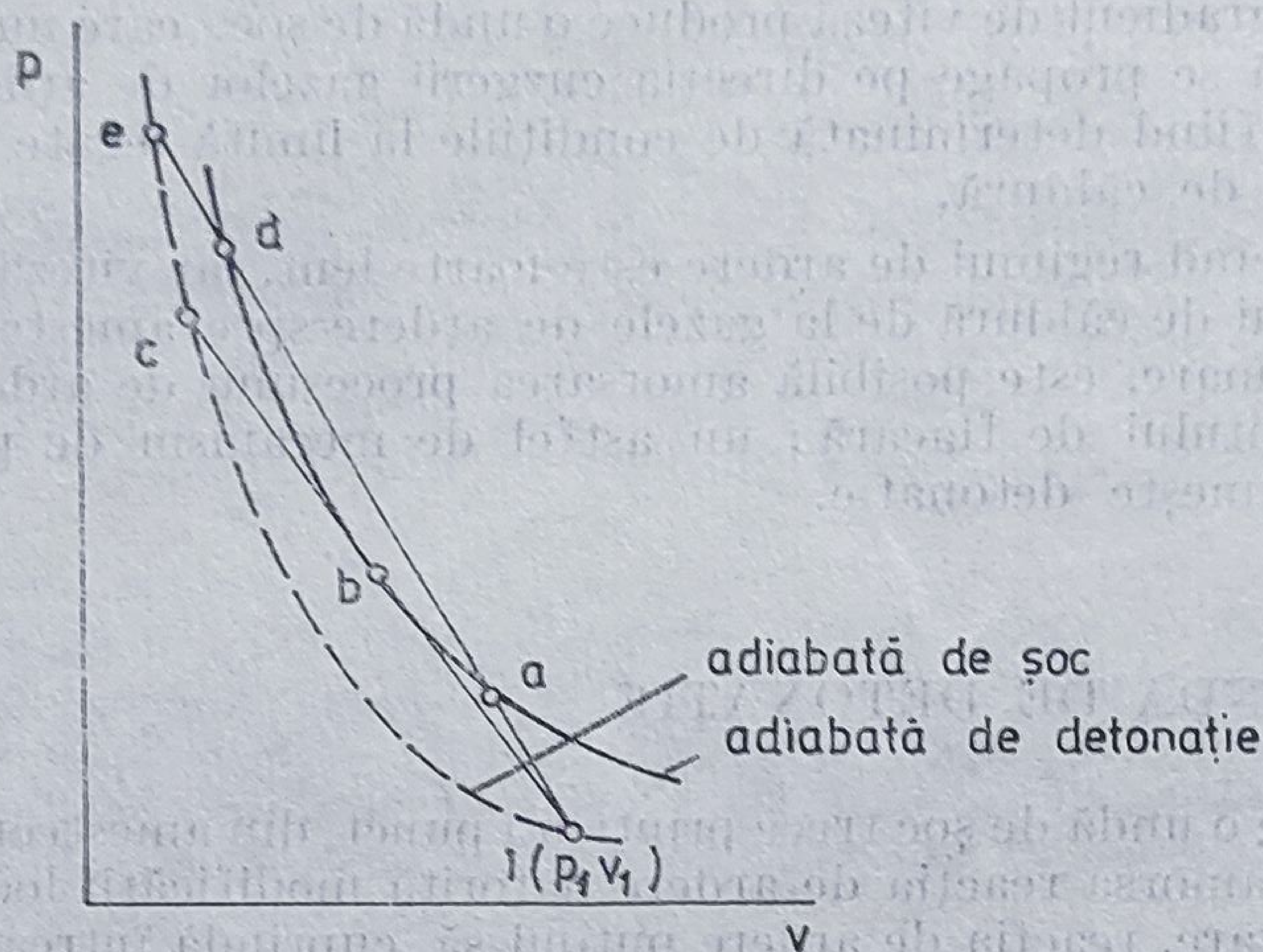


Fig. 10.1. Adiabata de detonație și de șoc.

expresie care reprezintă ideea de bază în teoria detonației fondată de V. Michelson în anul 1890.

Valoarea minimă a vitezei de reacție raportată la 1 m² suprafață de undă de detonație este j_{min} și corespunde punctului de tangență b; dependența lineară între p și v din relația (10.3) este evidențiată de coarda $1-e$ (fig. 10.1).

Frontul din fața undei de detonație este o undă de șoc $1-e$, amestecul fiind comprimat și prezentînd starea e. Dacă în amestecul combustibil se amorsează reacția chimică de ardere starea corespunzătoare se va plasa între punctele e și 1, deoarece în urma degajării de căldură presiunea scade pînă în punctul d care corespunde stării gazelor de ardere după arderea detonantă.

Stările cuprinse între punctele a și 1 (fig. 10.1) sînt inaccesibile gazelor de ardere deoarece arderea a fost provocată de comprimarea dată de unda de șoc. Tranziția discontinuă de stare între punctele d și 2 datorită unei alte unde șoc este imposibilă deoarece gazul ar evolua de la o presiune mai ridicată spre una mai scăzută, ceea ce este imposibil.

Rezultă deci că la detonație, stările posibile se găsesc deasupra punctului de tangență b, plasat pe tangenta dusă din starea inițială 1 la adiabata de detonație. În punctul de tangență b (denumit punct Jouguet), viteza undei de detonație este egală cu viteza sunetului a_2 — determinată de panta coardei $1-d$. Viteza de deplasare a undei în raport cu gazul inițial considerat imobil este w_1, iar față de gazele de ardere $w_2 = a_2$. Fluxul

de masă transferat este

$$j = \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2} \tag{10.4}$$

și pentru $v_1 > v_2$, rezultă $w_1 > w_2$, diferența $w_1 - w_2$ fiind viteza de mișcare a produselor de ardere în raport cu gazele proaspete. Această diferență este pozitivă, ceea ce arată că produsele de ardere se deplasează în sensul propagării undei de detonație cu viteza $w_2 = a_2$. Această ipoteză a formulată de D. Chapmann (1899) și E. Jouguet (1905) și verificată teoretic prin lucrările lui Zeldovitsch (1940).

Deplasarea undei de detonație duce la modificarea valorilor mărimilor de stare și în cazul gazului perfect; prin aplicarea primului principiu al termodinamicii între starea inițială *1*, corespunzătoare amestecului combustibil, și starea finală *2* a gazelor de ardere, rezultă:

$$q = h_2 - h_1 - \frac{v_1 + v_2}{2}(p_2 - p_1) \tag{10.5}$$

în care: q reprezintă căldura de reacție ($q = h_{01} - h_{02}$);

h_1 și h_2 entalpiile corespunzătoare

$$h_1 = h_{01} + c_{p_1} T_1 ; \quad h_2 = h_{02} + c_{p_2} T_2 ;$$

c_{p_1} și c_{p_2} — valorile căldurilor specifice, care pentru ipoteza menținerii constante în raport cu temperatura prezintă expresiile:

$$c_{p_1} = \frac{k_1}{k_1 - 1} R ; \quad c_{p_1} \cdot T_1 = \frac{k_1}{k_1 - 1} p_1 \cdot v_1 ;$$

$$c_{p_2} = \frac{k_2}{k_2 - 1} R ; \quad c_{p_2} \cdot T_2 = \frac{k_2}{k_2 - 1} p_2 \cdot v_2 ;$$

k_1 și k_2 — exponenții adiabatici corespunzători celor două stări;

v_1 și v_2 — volumele specifice;

p_1 și p_2 — presiunile.

Înlocuind expresiile entalpiilor în relația primului principiu (10.5) rezultă

$$2q = \frac{2k_2}{k_2 - 1} p_2 v_2 - \frac{2k_1}{k_1 - 1} p_1 v_1 - (v_1 + v_2)(p_2 - p_1) \tag{10.6}$$

Dacă presiunea p_2 crește foarte mult (deci $p_2/p_1 \to \infty$), raportul densităților obținut din relația (10.6) tinde către o valoare limită finită:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{k_1 + 1}{k_2 - 1} \tag{10.7}$$

şi deci pentru o valoare a exponentului adiabat $k = 1{,}4$, raportul $\frac{k_1 + 1}{k_2 - 1} = \frac{1{,}4 + 1}{1{,}4 - 1} = 6$, rezultînd o creştere de 6 ori a densităţii gazelor din spatele undei de detonaţie faţă de valoarea corespunzătoare amestecului combustibil.

Din ecuaţia (10.6) se constată că dependenţa $p_2 = f(v_2)$ reprezintă o hiperbolă echilateră, expresia simplificîndu-se considerabil pentru cazul unei valori mult mai mari a căldurii de reacţie q faţă de energia internă iniţială u_1, deci pentru $p_1/p_2 \to 0$:

$$p_2\left(\frac{k_1 + 1}{k_2 - 1}\, v_2 - v_1\right) = 2q \tag{10.8}$$

Înlocuind presiunea p_2 şi volumul specific v_2 în ecuaţia (10.6) cu expresiile

$$p_2 = \frac{p_1 + j^2 \cdot v_1}{k_2 + 1}\ ; \quad v_2 = \frac{k_2 \cdot p_2}{j^2} = \frac{k_2}{j^2}\,\frac{p_1 + j^2 \cdot v_1}{k_2 + 1} \tag{10.9}$$

rezultă expresia vitezelor de propagare a undei $w_1 = j \cdot v_1$.

$$w_1 = \sqrt{\frac{k_2 - 1}{2}\,[(k_2 + 1)q + (k_1 + k_2)\, c_{v_1} \cdot T_1]} + \sqrt{\frac{k_2 + 1}{2}\,[(k_2 + 1)q + (k_2 - k_1)c_{v_1} \cdot T_1]} \tag{10.10}$$

şi deci din relaţiile (10.9):

$$\frac{p^2}{p_1} = \frac{w_1^2 + (k_1 - 1)c_{v_1} \cdot T_1}{(k_2 + 1)(k_1 - 1)c_{v_1}\, T_1}\ ; \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{k_2[w_1^2 + (k_1 - 1)c_{v_1}\, T_1]}{(k_2 + 1)\ w_1^2} \tag{10.11}$$

Viteza de propagare a undei de detonaţie este $w_2 = \frac{v_2}{v_1}\, w_1$ şi deci expresia ei devine

$$w_2 = \sqrt{\frac{k_2 - 1}{2}\,[(k_2 + 1)q + (k_1 + k_2)\, c_{v_1} \cdot T_1]} + \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1}\sqrt{\frac{1 + k_2}{2}\,[(k_2 - 1)q + (k_2 - k_1)\, c_{v_1} \cdot T_1]} \tag{10.12}$$

iar diferenţa vitezelor de propagare este

$$w_1 - w_2 = \sqrt{\frac{2[(k_2 - 1)q + (k_2 - k_1)c_{v_1} \cdot T_1]}{k_2 + 1}} \tag{10.13}$$

Temperatura produselor de ardere în urma deplasării undei de detonație este

$$T_2 = \frac{w_2^2}{c_{v_2} \cdot k_2(k_2 - 1)} \tag{10.14}$$

Pentru o undă de detonație foarte puternică, relațiile (10.10)... (10.13) se simplifică foarte mult, căpătînd formele

$$w_1 = \sqrt{2(k_2^2 - 1)q}\,; \quad w_1 - w_2 = \frac{w_1}{k_2 + 1} \tag{10.15}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k_2}{1 + k_2}\,\frac{p_2}{p_1} = \frac{k_1 \cdot w_1^2}{(1 + k_2)a_1^2}$$

iar temperatura produselor de ardere în urma detonației (relația 10.14) ajunge la forma

$$T_2^{\text{det}} = \frac{2k_2}{1 + k_2}\,\frac{q}{c_{v_2}} \tag{10.16}$$

Expresia temperaturii gazelor fără ca arderea să se desfășoare cu detonație, neglijînd valoarea temperaturii inițiale a gazelor T_1, este

$$T_2 = \frac{q}{c_{p_2}} \tag{10.17}$$

și deci raportul temperaturilor gazelor cu și fără detonație este

$$\frac{T_2^{\text{det}}}{T_2} = \frac{2k_2^2}{1 + k_2} \tag{10.18}$$

ceea ce denotă că pentru orice valoare supraunitară a exponentului adiabatic k_2 temperatura gazelor în cazul arderii detonante este superioară cazului cînd nu apare detonația. De exemplu, pentru $k_2 = 1{,}4$ se obține

$$\frac{T_2^{\text{det}}}{T_2} = \frac{2 \times 1{,}4^2}{1 + 1{,}4} = 1{,}63$$

deci o creștere cu 63% a temperaturii gazelor în cazul arderii detonante.

Toate expresiile stabilite anterior sînt valabile în cazul cînd reacțiile chimice sînt exoterme ($q > 0$), inclusiv efectele termice ale reacțiilor intermediare. Rezultă de aici că modificarea parametrilor de stare în urma undei de detonație se face după o adiabată structurată între adiabata de șoc și cea de detonație limită (fig. 10.2).

Stările posibile ale gazelor în spatele undei de detonație sînt precizate de tangenta trasată din punctul *1* la adiabata de detonație *1—b*.

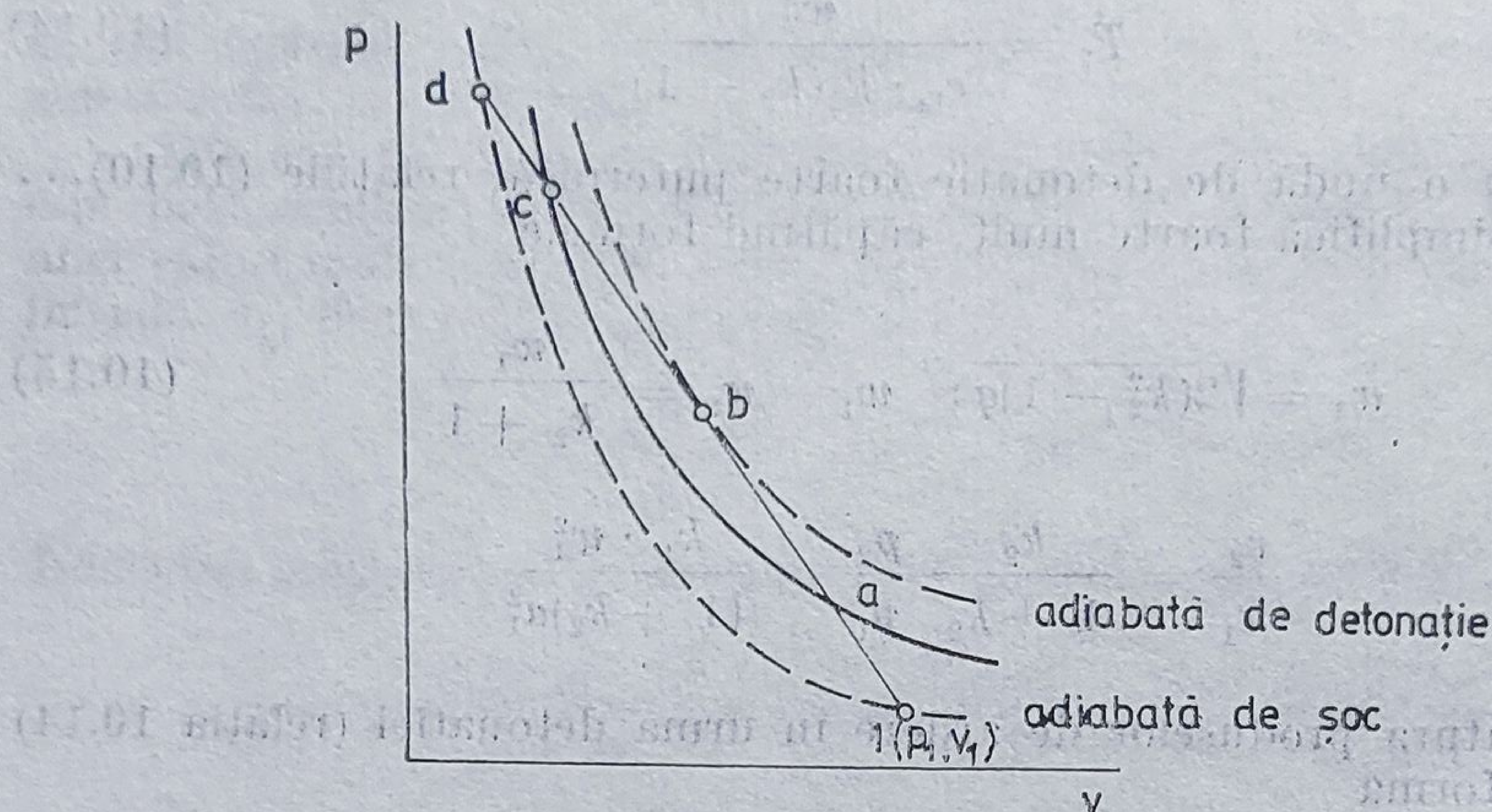


Fig. 10.2. Adiabata reală de detonație.

10.2. REGIMURI DETONANTE DE ARDERE

Detonația corespunde stărilor plasate la partea superioară a unei adiabate de detonație. Pornind de la starea inițială *1* (fig. 10.3), aflată sub adiabata de detonație, prin trasarea tangentel or, verticalei și orizontalei, rezultă stările a, b, c și d care prezintă următoarele semnificații fizice. În punctele de tangență a și d, derivata $\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0$, deci în aceste puncte viteza undei w_2 este egală cu viteza locală a sunetului a_2. Deasupra punctelor de tangență $\frac{w_2}{a_2} < 1$, iar dedesubt $\frac{w_2}{a_2} > 1$. Stările plasate pe arcul bc sînt lipsite de sens fizic, căci pe această porțiune $p_2 > p_1$, iar $v_2 > v_1$, fluxul de masă corespunzător vitezei de reacție $j = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}}$ fiind imaginar, deci fără sens.

Fig. 10.3. Regimuri detonante de ardere.

Relațiile între viteze pe adiabata de detonație sînt deci următoarele :

deasupra punctului d : $w_1 > a_1$ și $w_2 > a_2$

pe arcul dc : $w_1 > a_1$ $w_2 > a_2$

pe arcul ba: $w_1 < a_1 \; w_2 < a_2$
sub punctul a: $w_1 < a_1 \; w_2 < a_2$
în punctele a și d: $w_2 = a_2$

unde $a_1 = \sqrt{k_1RT_1}$ și $a_2 = \sqrt{k_2RT_2}$.

În apropiere de punctul c fluxul de masă j tinde spre infinit, deoarece volumul specific v_1 devine egal cu v_2, iar expresia $j = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}} \rightarrow \infty$; din contră, în apropiere de punctul b, fluxul de masă j se anulează dată fiind diferența de presiune $p_2 - p_1$ tinde spre zero.

Tronsonul de curbă ab, la care viteza de propagare a undei este subsonică, corespunde regimului obișnuit de ardere, fluxul de masă corespunzător detonației fiind foarte redus, putîndu-se deci la limită considera că

$$p_1 \approx p_2 \quad \text{și} \quad T_2 = \frac{q}{c_{p_2}} + \frac{c_{p_1}}{c_{p_2}} T_1.$$

În condiții deosebite de dezvoltare a procesului de ardere, de exemplu un transfer intens de căldură prin radiație spre amestecul combustibil, este posibil să apară detonația, trecerea de la regimul normal de ardere la cel detonant exteriorizîndu-se prin accelerarea spontană a arderii și creșterea intensității undei de șoc din fața frontului de flacără. Mecanismul cinetic de accelerare spontană a flăcării nu este suficient de bine elucidat, turbulența flăcării la perete și proprietățile electrice ale flăcării (adică concentrația de sarcini electrice libere și „durata de viață" a ionilor chimici/formați) jucînd un rol important.

În ceea ce privește regimul de ardere detonantă de deasupra punctului d, rezultă că $p_2 > p_1$, $v_2 < v_1$ și $w_2 < w_1$, deci produsele de ardere sînt comprimate față de amestecul combustibil inițial.

11. TEHNICI EXPERIMENTALE ÎN TERMOGAZODINAMICĂ

Verificarea experimentală a rezultatelor teoretice și stabilirea unor mărimi necesare completării datelor pentru proiectarea instalațiilor și pentru optimizarea exploatării utilajelor sînt obiective de cercetare de cea mai mare importanță.

În cele ce urmează se vor preciza unele aspecte fundamentale legate de măsurătorile de temperatură, presiune și debit ; nu se insistă asupra tipurilor de aparate și modului de lucru, ci numai asupra factorilor care conduc la realizarea unor măsurători exacte și erorilor care intervin.

Măsurarea unei mărimi poate fi făcută direct sau indirect. În măsurătorile directe mărimea de măsurat se comportă direct ca unitate de măsură aleasă. În măsurătorile indirecte, mărimea aleasă (de exemplu, temperatura), nu poate fi realizată ca entitate fizică, ci este pusă în corespondență cu altă mărime care poate fi direct măsurată.

Metodele de măsurare se referă la procedeul de executare a operației de măsurare, ele clasificîndu-se după numeroase criterii, între care :

a) după precizia și rapiditatea măsurătorilor :

— metode de laborator la care se ţine seamă de erorile de măsurare ;

— metode tehnice, la care nu se estimează erorile, deoarece aparatele de măsură prezintă erori corespunzătoare claselor de precizie ;

b) după poziția aparatului față de mărimea de măsurat :

— metode prin contact, în care aparatul de măsură este adus în contact direct cu mărimea de măsurat ;

— metode de măsurare de la distanță ;

c) după modul de obținere a valorii numerice a mărimii măsurate :

— metoda aprecierii directe, în care mărimea de măsurat se compară direct cu unitatea de măsură ;

— metoda diferențială, în care se măsoară diferența față de o mărime de referință (cazul manometrelor) ;

— metoda de zero sau a echilibrului (măsurarea rezistențelor cu puntea Wheatstone) ;

— metoda suprapunerii (măsurarea temperaturii cu pirometrul optic) ;

d) după natura indicației aparatului de măsură:
— metode analogice;
— metode digitale.

Alegerea aparatelor de măsură trebuie făcută în concordanță cu scopul urmărit. Astfel, clasa de precizie a aparatului trebuie să corespundă cu precizia de stabilire a mărimii respective, domeniul de măsurare trebuie să fie corespunzător variației mărimii, iar timpul de răspuns trebuie să fie cît mai mic, pentru a urmări cu fidelitate variația mărimii măsurate.

Rezultatul unei măsurători diferă întotdeauna de valoarea reală, datorită erorilor de măsurare introduse de sistemul de măsurat. Erorile de măsurare pot fi sisistematice, aleatoare sau grosolane.

11.1. MĂSURAREA TEMPERATURII

Temperatura reprezintă unul din parametri de bază din termodinamică, mecanica fluidelor, aerodinamică, chimie, fizică etc., în raport cu ea fiind definite și de ea depinzînd numeroase mărimi de stare. Spre deosebire de alte mărimi de stare, temperatura nu prezintă un etalon absolut în natură; de aceea, trebuie stabilite o serie de legături între acest concept — sesizat la scară macroscopică — și variația unor mărimi ușor de determinat experimental.

Preocupările pentru măsurarea temperaturii sînt foarte vechi. Istoria științei menționează că primul instrument pentru măsurarea „gradului de căldură sau răcire" a fost construit de Galileo Galilei în preajma anului 1600. Noțiunea de termometru a apărut pentru prima dată în literatură în anul 1624 în lucrarea lui Leurechron, intitulată „La Récréation Mathématique", autorul descriind un termometru ca un vas din sticlă prevăzut cu un mic rezervor care conține apă. Forma actuală a termometrului se datorește lui Ferdinand II, mare duce al Toscanei (1625), care a avut și ideea de a introduce alcool în rezervor.

Sesizînd natura deosebită a acestui parametru, în 1701 Newton a definit temperatura pe baza unei scări bazată pe două puncte fixe (topirea gheții notată cu zero și cea măsurată pe brațul unui om sănătos — notată de el cu 12).

Din anul 1706, Daniel Gabriel Fahrenheit a început să construiască termometre la Amsterdam, utilizînd la început scara lui Newton, iar apoi o scară proprie cu punctele de topire a gheții și de fierbere a apei, la presiunea atmosferică normală, notate respectiv cu 32 și 212.

În anul 1742 Anders Celsius, profesor de astronomie la universitatea Uppsala, a propus notarea celor două puncte de transformare de stare a apei cu 0 și respectiv 100.

Scara internațională practică de temperatură, stabilită în anul 1968, se bazează pe 6 puncte fixe cuprinse în intervalul de temperaturi —182,962°C și 1064,43°C, puncte care definesc transformările de stare ale oxigenului, apei, zincului, argintului și aurului, la presiune normală.

Pentru precizarea modului de variaţie a temperaturii între aceste puncte primare se folosesc ecuaţii standard de interpolare, ecuaţii care depind de domeniul de temperatură sau metoda de măsurare. De exemplu, în domeniul de temperatură cuprins între 0 şi 500°C, în cazul utilizării termometrelor cu rezistenţă de platină se foloseşte următoarea ecuaţie parabolică

$$t = \left(\frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0}\right) 100 + \delta \left(\frac{t}{100} - 1\right)\frac{t}{100} \tag{11.1}$$

în care: R_t este rezistenţa platinei la temperatura t;
R_0 — rezistenţa platinei introdusă într-un amestec de gheaţă şi apă, la presiunea barometrică normală;
R_{100} — rezistenţa platinei introdusă în abur saturat, la presiune barometrică normală;
δ — constanta caracteristică a termometrului.

În cazul termocuplelor, tensiunea electromotoare prezintă o dependenţă mult mai simplă de temperatură, de forma

$$E = a + bt + ct^2 \tag{11.2}$$

unde a, b şi c reprezintă constanta stabilite în raport cu punctele fixe.

Scara internaţională de temperatură, adoptată în anul 1927, se bazează pe 13 puncte fixe cuprinse între — 259,34°C şi 1064,43°C, care în marea majoritate reprezintă puncte de transformare de fază.

Măsurarea temperaturii poate fi făcută cu termometre de sticlă, termometre cu rezistenţă, termocuple sau pirometre optice. În cazul măsurării temperaturii gazelor care se deplasează cu viteze w mici şi moderate ($w < 0,3$ M), elementul sensibil trebuie protejat cu o teacă pentru a-l feri de solicitările mecanice şi chimice ale agentului măsurat. La temperaturi sub 1000°C se folosesc teci din oţel, iar peste această temperatură tecile trebuie să fie din nichel sau crom. Pentru îmbunătăţirea contactului termic între elementul sensibil şi teacă, se introduce ulei mineral, glicerină, mercur sau pilitură de fier.

În cazul termometrelor cu lichid trebuie respectată recomandarea privind gradul de cufundare a termometrului în fluidul a cărui temperatură se măsoară. În cazul unei cufundări parţiale a unui termometru cu imersie totală se face următoarea corecţie de temperatură:

$$\Delta t = kl(t_1 - t_2) \tag{11.3}$$

în care: k este coeficientul relativ de dilatare între lichidul termometric şi sticlă, egal cu 0,00016 pentru termometrele gradate în °C şi 0,00009 pentru cele gradate în °F;
l — lungimea coloanei de lichid necufundat;
t_1, t_2 — indicaţiile termometrului cufundat parţial, respectiv a fluidului din exterior.

Pentru termometrele cu rezistență, expresia de calcul a temperaturii este

$$t = A - B\sqrt{S} + 10 \cdot \Delta R \qquad (11.4)$$

unde : $A = \frac{50}{\delta}(\delta + 10^2)$

$$B = \frac{50}{\delta}\left(\frac{400}{R_{100} - R_0}\right)^{1/2}$$

$$S = C + R_i$$

$$C = (R_{100} - R_0)\left(\frac{\delta}{400} + \frac{1}{2} + \frac{25}{\delta}\right) + R_0$$

δ — constantă caracteristică termometrului cu rezistență, cu valori cuprinse între 1,488 și 1,498;

R_0 și R_{100}—valorile rezistențelor la temperatura de 0°C, respectiv 100°C;

R_i — partea întreagă a rezistenței măsurate;

ΔR — partea zecimală a rezistenței măsurate.

Puritatea sîrmei de platină din care sînt confecționate majoritatea termometrelor cu rezistență poate fi verificată prin raportul R_{100}/R_0, care trebuie să fie mai mare decît 1,3925.

Dependența tensiunii termoelectromotoare de temperatură în cazul termocuplelor este de tip parabolic, depinzînd de natura termocuplului, așa cum se arată în exemplele care urmează :

1. În cazul termocuplului cupru-constantan, utilizat în domeniul de temperatură cuprins între 0 și 400°C, expresia t.e.m. este :

$$E = (3{,}8740773840 \times 10 \cdot T + 3{,}3190198092 \times 10^{-2} \cdot T^2 + 2{,}0714183645 \times 10^{-4} \cdot T^3 - 2{,}1945834823 \times 10^{-6} \cdot T^4 + 1{,}1031900550 \times 10^{-8} \cdot T^5 - 3{,}0927581898 \times 10^{-11} \cdot T^6 + 4{,}5653337165 \times 10^{-14} \cdot T^7 - 2{,}7616878040 \times 10^{-17} \cdot T^8) \times 10^{-3}\ [\mathrm{mV}] \qquad (11.5)$$

Precizia de măsurare este de $\pm$ 0,2°C pentru domeniul (0 ... ... 400°C).

2. La termocuplul fier-constantan, utilizat în domeniul de temperatură 0 ... 760°C, expresia t.e.m. este:

$$E = (5{,}8695857799 \times 10 \cdot T + 4{,}3110945462 \times 10^{-2} \cdot T^2 + 5{,}7220358202 \times 10^{-5} \cdot T^3 - 5{,}4020668085 \times 10^{-7} \cdot T^4 + 1{,}5425922111 \times 10^{-9} \cdot T^5 - 2{,}4850089136 \times 10^{-12} \cdot T^6 + 2{,}3389721459 \times 10^{15-} \cdot T^7 - 1{,}1946296815 \times 10^{-18} \cdot T^8 + 2{,}5561127497 \times 10^{-22} \cdot T^9) \times 10^{-3}\ [\mathrm{mV}] \qquad (11.6)$$

Precizia de măsurare este $\pm$ 0,1°C pentru domeniul (0 ... 760)°C.

3. La termocuplul cromel—constantan, utilizat în domeniul de temperatură 0 ... 1000°C, precizia de măsurare este $\pm$ 0,1°C.

4. La termocuplul cromel-alumel, utilizat în domeniul de temperatură 0 ... 1372°C, precizia de măsurare este $\pm$ 0,02°C pentru intervalul 400 ... 1100°C.

5. Termocuplul platină-rodiu (10%), pentru temperaturi cuprinse între 630 și 1665°C are următoarele expresii ale t.e.m.:

a) pentru domeniul 630 ... 1064°C

$$E = (-2{,}9824481615 \times 10^2 + 8{,}2375528221 \times 10^{\circ} \cdot T + \\ + 1{,}6453909942 \cdot 10^{-3} \cdot T^2) \times 10^{-3}\ [\mathrm{mV}] \quad (11.7)$$

b) pentru domeniul 1064 ... 1665°C

$$E = (1{,}2766292175 \times 10^3 + 3{,}490908041 \times 10^{\circ} \cdot T + \\ + 6{,}3824648666 \times 10^{-3} T^2 - 1{,}5722424599 \times 10^{-6} \cdot T^3) \times 10^{-3} [\mathrm{mV}] \quad (11.8)$$

În cazul fluidelor în mișcare care curg cu o viteză cuprinsă în domeniul $0{,}3 < M < 1$ simplificarea uzuală în definirea temperaturii totale constă în considerarea procesului izentropic de decelelare a gazului în raport cu elementul sensibil ca un proces adiabatic. Efectul stratului limită asociat cu vîscozitatea și conductivitatea termică este în dezacord cu decelerarea adiabatică și deci valoarea temperaturii totale nu poate fi obținută prin măsurări în cazul gazelor reale.

Pentru suprafețe plane plasate în fața fluidelor în mișcare, temperatura în punctul de stagnare este

$$T_p = T_c + r T_d \quad (11.9)$$

în care: T_c este temperatura fluidului în curgere liberă;

r — coeficient de corecție care arată măsura în care energia cinetică a curentului se transformă în energie termică; el este o funcție de criteriul Prandtl, care reprezintă raportul dintre vîscozitatea cinematică și difuzivitatea termică a gazului, adică $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu \cdot c_p \cdot \rho}{\lambda}$. Pentru regimul laminar de curgere, coeficientul de corecție este $r = \mathrm{Pr}^{1/2}$, iar pentru cel turbulent $r = \mathrm{Pr}^{1/3}$.

T_d — temperatura dinamică, $\frac{w^2}{2 c_p}$.

În cazul unui cilindru plasat într-un curent de gaz în curgere pot fi utilizate aceleași relații pentru stabilirea coeficientului de corecție r, sau după alți autori, expresia acestui coeficient este $r' = \bar{p}S + (1 - \bar{p})\, r$,

în care $\bar{p}$ este valoarea medie a coeficientului de presiune în jurul cilindrului $\bar{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p_\alpha \cdot d\alpha$ (fig. 11.1), iar S — un factor de stagnare.

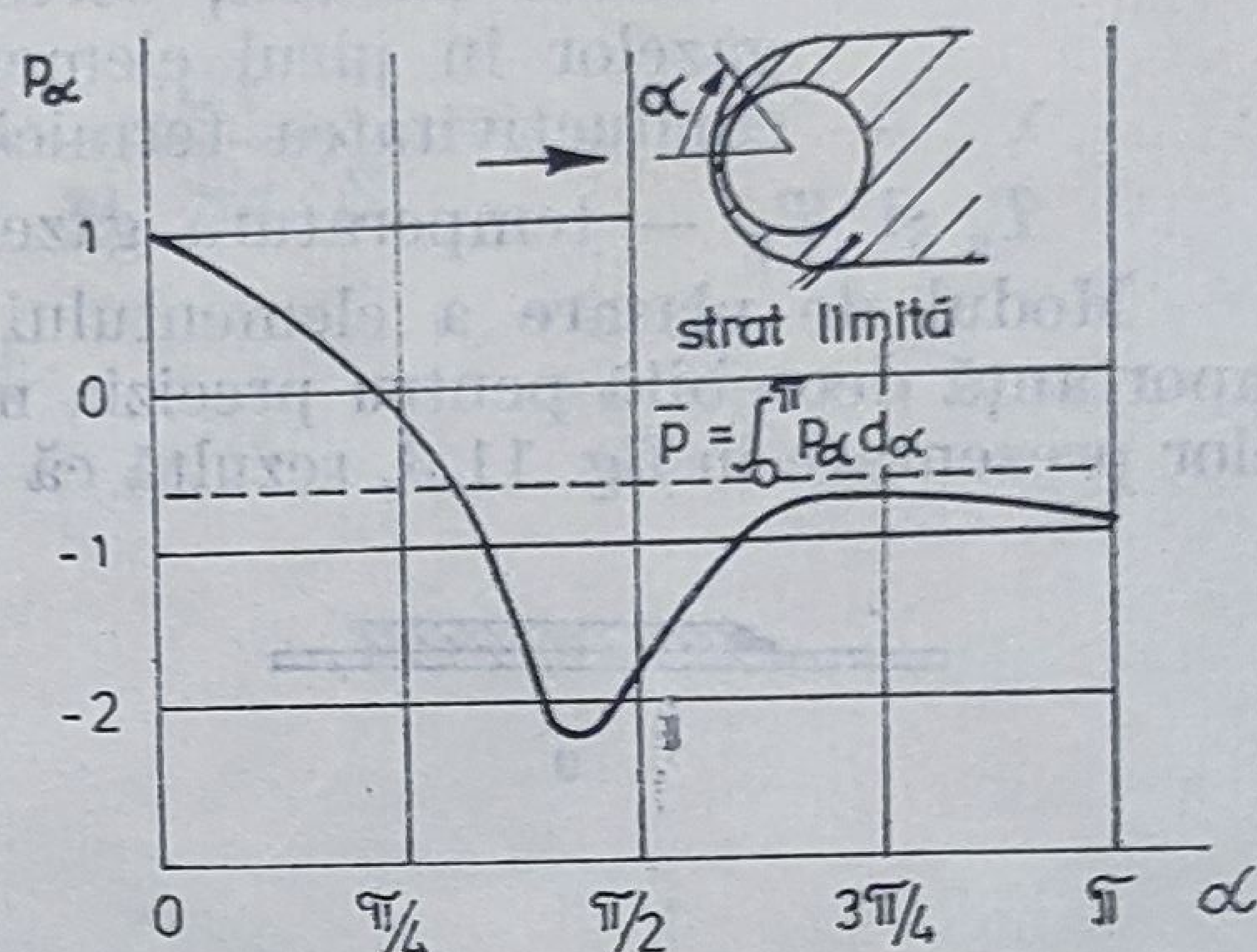


Fig. 11.1. Coeficientul de presiune în jurul unui cilindru.

Valorile factorului de stagnare S pentru aer, apă și abur la diferite presiuni și temperaturi sînt prezentate în figura 11.2.

La măsurarea temperaturii unor gaze fierbinți în condițiile în care elementul sensibil nu este prevăzut cu teacă de protecție, intervine o eroare de stabilire a temperaturii datorită radiației pereților. Expresia acestei erori de măsură este

$$\Delta t = \frac{e \cdot C_0 \cdot d}{Nu \cdot \lambda}\left[\left(\frac{T_g}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_p}{100}\right)^4\right] \tag{11.10}$$

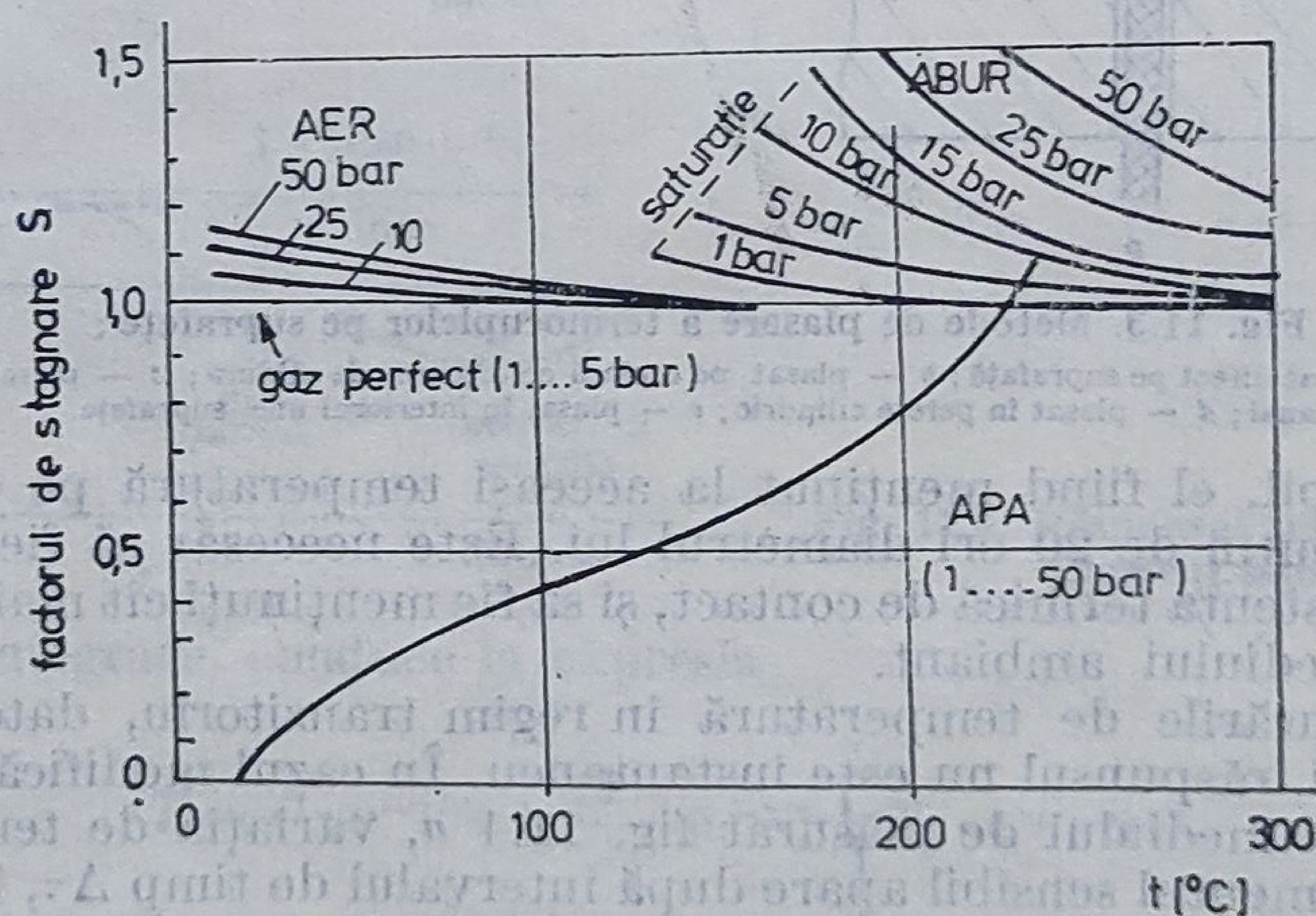


Fig. 11.2. Valorile factorului de stagnare.

în care: e reprezintă factorul energetic de emisie al elementului sensibil ($e \simeq 0,7$);

C_0 — coeficientul de emisie al corpului negru absolut, $C_0 = 5{,}76\ W/(m^2K^4)$;

d — diametrul echivalent al elementului sensibil al termometrului;

Nu — criteriul Nusselt, corespunzător regimului de curgere a gazelor în jurul elementului sensibil;

λ — conductivitatea termică a gazelor;

T_g și T_p — temperatura gazelor, respectiv a pereților.

Modul de plasare a elementului sensibil prezintă de asemenea o importanță deosebită pentru precizia măsurării de temperatură. Conform celor prezentate în fig. 11.3, rezultă că elementul sensibil trebuie să fie cît

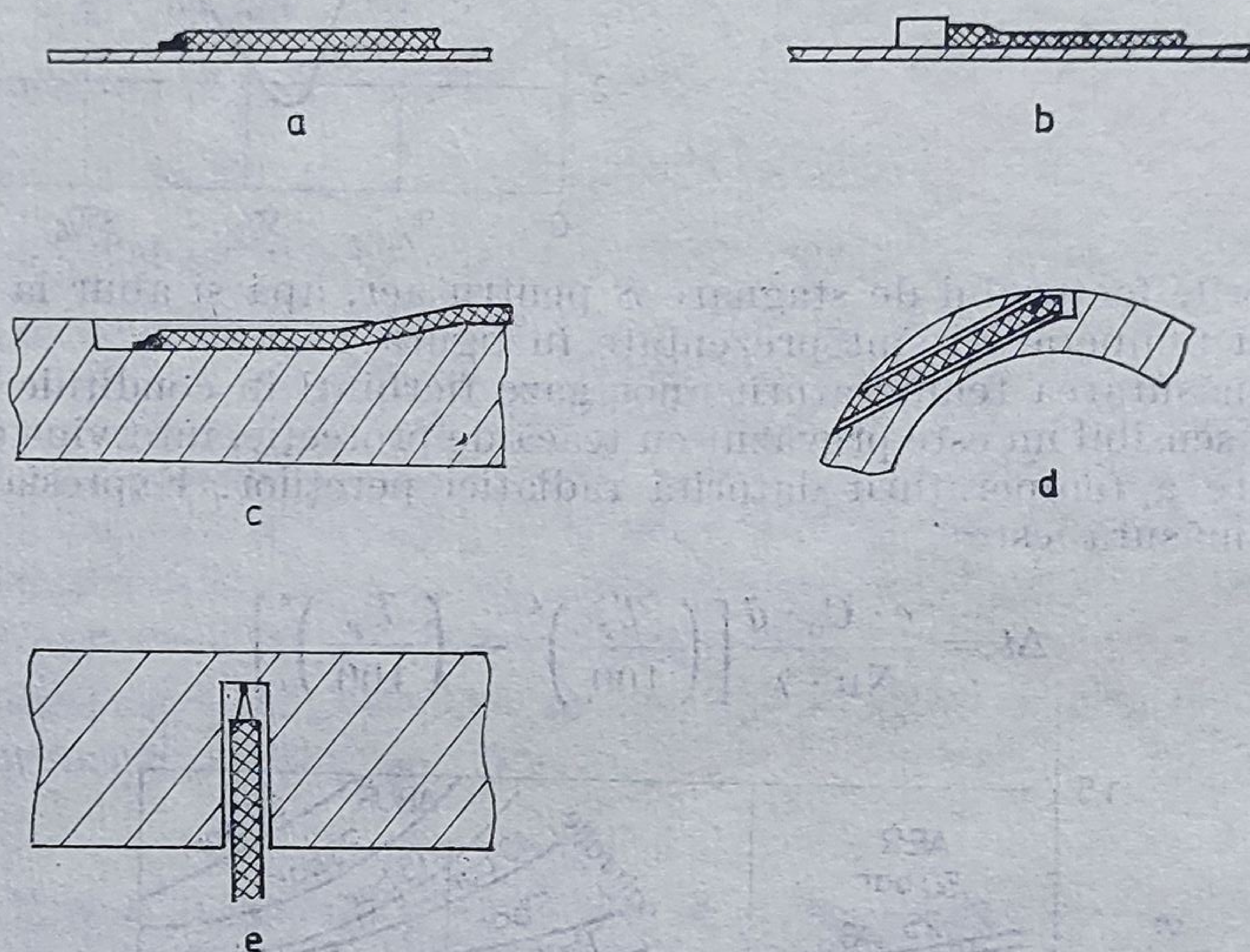


Fig. 11.3. Metode de plasare a termocuplelor pe suprafețe:
a — plasat direct pe suprafață; *b* — plasat pe o placă colectoare de căldură; *c* — plasat în canal; *d* — plasat în perete cilindric; *e* — plasat în interiorul unei suprafețe.

mai mic posibil, el fiind menținut la aceeași temperatură pe o distanță egală cu cel puțin de 20 ori diametrul lui. Este neecesar să fie redusă la minimum rezistența termică de contact, și să fie menținuți cît mai constanți parametrii mediului ambiant.

La măsurările de temperatură în regim tranzitoriu, datorită inerției aparatului, răspunsul nu este instantaneu. În cazul modificării lineare a temperaturii mediului de măsurat fig. 11.4 *a*, variația de temperatură sesizată de elementul sensibil apare după intervalul de timp $\Delta\tau$, în timp ce la modificarea în treaptă a temperaturii (fig. 11.4 *b*), linearitatea răspunsului elementului sensibil apare numai în coordonate semilogaritmice. La modificarea periodică a temperaturii agentului (fig. 11.4 *c*) apar atît un de-

calaj de timp $\Delta\tau$ corespunzător răspunsului tranzitoriu, cît şi o micşorare a amplitudinii temperaturii măsurate.

Din bilanţul de energie între fluxul de căldură primit şi cel acumulat de elementul sensibil, rezultă următorea ecuaţie diferenţială:

$$\frac{dT}{T_2 - T} = \frac{d\tau}{m \cdot c/\alpha \cdot S}$$

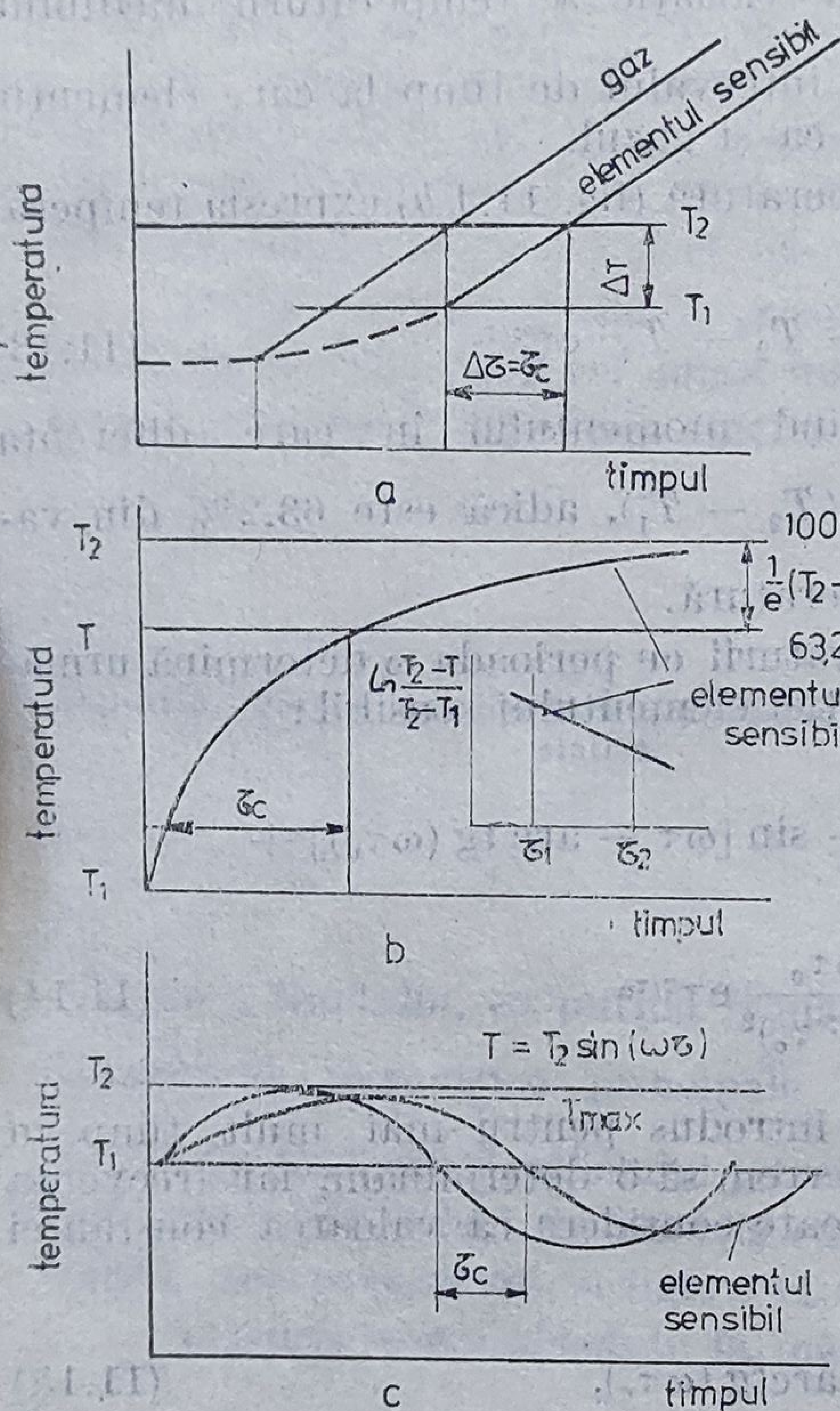


Fig. 11.4. Răspunsul tranzitoriu al unui element sensibil.

care, prin integrare, conduce la expresia

$$T = C \cdot e^{-\tau/\tau_c} + \frac{1}{\tau_c} e^{-\tau/\tau_c} \int_0^\tau T_2 \cdot e^{\tau/\tau_c} d\tau \qquad (11.11)$$

în care C este o constantă de integrare stabilită din condiţiile la limită, iar $\tau_c = \dfrac{m \cdot c}{\alpha S}$ — constantă de timp.

La modificarea liniară a temperaturii mediului de măsurat (fig. 11.4 *a*), expresia temperaturii măsurată de elementul sensibil corespunzător momentului τ este

$$T = T_1 \cdot e^{-\tau/\tau_c} + T_2 - T_2 \cdot e^{-\tau/\tau_c} + \frac{\Delta T}{\Delta \tau}(\tau - \tau_c + \tau_c \cdot e^{-\tau/\tau_c}) \quad (11.12)$$

în care $\frac{\Delta T}{\Delta \tau}$ reprezintă viteza de variație a temperaturii mediului. Constanta de timp τ_c este dată de intervalul de timp la care elementul sensibil indică aceeași temperatură ca și gazul.

Dacă intervine un salt de temperatură (fig. 11.4 *b*) expresia temperaturii este

$$T = T_1 e^{-\tau/\tau_c} + T_2 - T_2 \cdot e^{-\tau/\tau_c} \quad (11.13)$$

constanta de timp τ_c corespunzînd momentului în care diferența de temperatură $T_2 - T$ devine $\frac{1}{e}(T_2 - T_1)$, adică este 63,2% din valoarea diferenței inițiale de temperatură.

Modificarea periodică a temperaturii cu perioada ω determină următoatea expresie de variație a indicației elementului sensibil :

$$T = T_1 + \frac{T_2}{[1 + (\omega\, \tau_c)^2]^{1/2}} \sin[\omega\tau - \text{arc tg}\,(\omega\tau_c)] + \frac{T_2\omega\tau_c}{1+(\omega \cdot \tau_c)^2} e^{-\tau/\tau_c} \quad (11.14)$$

Dacă elementul sensibil este introdus pentru mai mult timp în mediul a cărui variație sinusoidală vrem să o determinăm, iar frecvența este mult mai mică decît $1/T_c$ se poate considera că valoarea constantei de timp τ_c este

$$\tau_c = \frac{1}{\omega} \text{arctg}\,(\omega\tau_c), \quad (11.15)$$

iar raportul temperaturilor T_{max}/T_2 devine

$$\frac{T_{max}}{T_2} = \frac{1}{[1 + (\omega\, \tau_c)^2]^{1/2}} \quad (11.16)$$

În expresiile (11.12), (11.13) și (11.14), termenul τ_c reprezintă constanta de timp dată de raportul $\tau_c = (m \cdot c)/(\alpha \cdot S)$ (m fiind masa elementului sensibil, c — căldura specifică, α — coeficientul de convecție, iar S — suprafața).

11.2. MĂSURAREA PRESIUNII

Presiunea este un concept mecanic de bază, definit prin relația $p = \mathrm{d}F/\mathrm{d}A_n$.

Istoria conceptului de presiune începe în anul 1643, cînd Torricelli a prezentat primul experiment pentru măsurarea presiunii atmosferice. Mai tîrziu, în 1647 Blaise Pascal, a găsit o diferență de presiune între baza și vîrful unui munte, denumind instrumentul lui de măsură — *barometru*.

În perioda 1847—1859 James Joule, Rudolf Claudius și James Clark Maxwell au dezvoltat teoria cinetică a gazelor, după ce Robert Hooke și Robert Boyle, în 1660, au arătat că presiuneile unui gaz se datoresc ciocnirilor între numărul foarte mare de particule.

Definirea conceptului de presiune presupune echilibru termodinamic, valoarea ei fiind egală cu suma între presiunea statică p_sși dinamică p_d; deci $p = p_s + p_d$. Presiunea statică este exercitată normal pe direcția de curgere a fluidului, ea putînd fi măsurată cu ajutorul unor prize a căror dimensiuni geometrice principale se recomandă să fie $0{,}5 < \frac{l}{d} < 6$ (fig. 11.5). Diametrul orificiului prizei d se recomandă să fie de 4...15 mm. Influența poziției față de direcția curgerii fluidului la măsurarea presiunii statice este prezentată în figura 11.6.

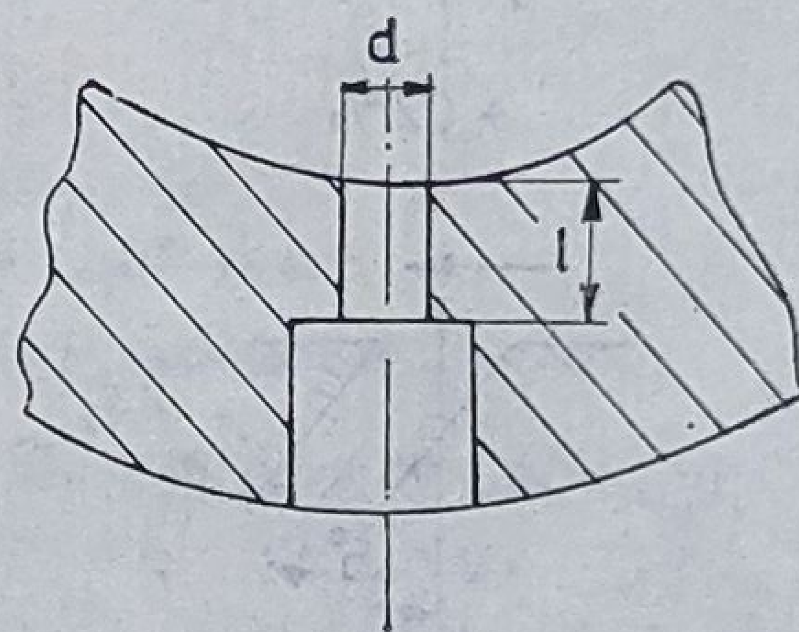


Fig. 11.5. Forma recomandată a racordului pentru prsiunea statică.

Expresia erorii absolute la măsurarea presiunii statice este

$$\Delta p_s = \varepsilon \frac{f}{4} p_d \qquad (11.17)$$

în care: ε este un factor de corecție empiric, dependent de valoarea criteriului Reynolds (pentru $\mathrm{Re}_d > 800$ se poate considera, după Franklin și Wellace, $\varepsilon = 3{,}75$);

f — factorul lui Darcy, rezultat din ecuația

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \lg(\mathrm{Re}_d \sqrt{f}) - 0{,}8$$

29 — c. 668

Re_d — criteriul Reynolds, calculat pentru diametrul orificiului prizei d: $Re_d = \frac{w \cdot d}{\nu}$;

p_d — presiunea dinamică a fluidului, $\frac{\rho w^2}{2}$.

Eroarea de calcul a presiunii statice este o funcţie de criteriul Mach al curgerii şi diametrul d al prizei; pe măsură ce valoarea criteriului M este mai ridicată, eroarea devine mai mare (fig. 11.7).

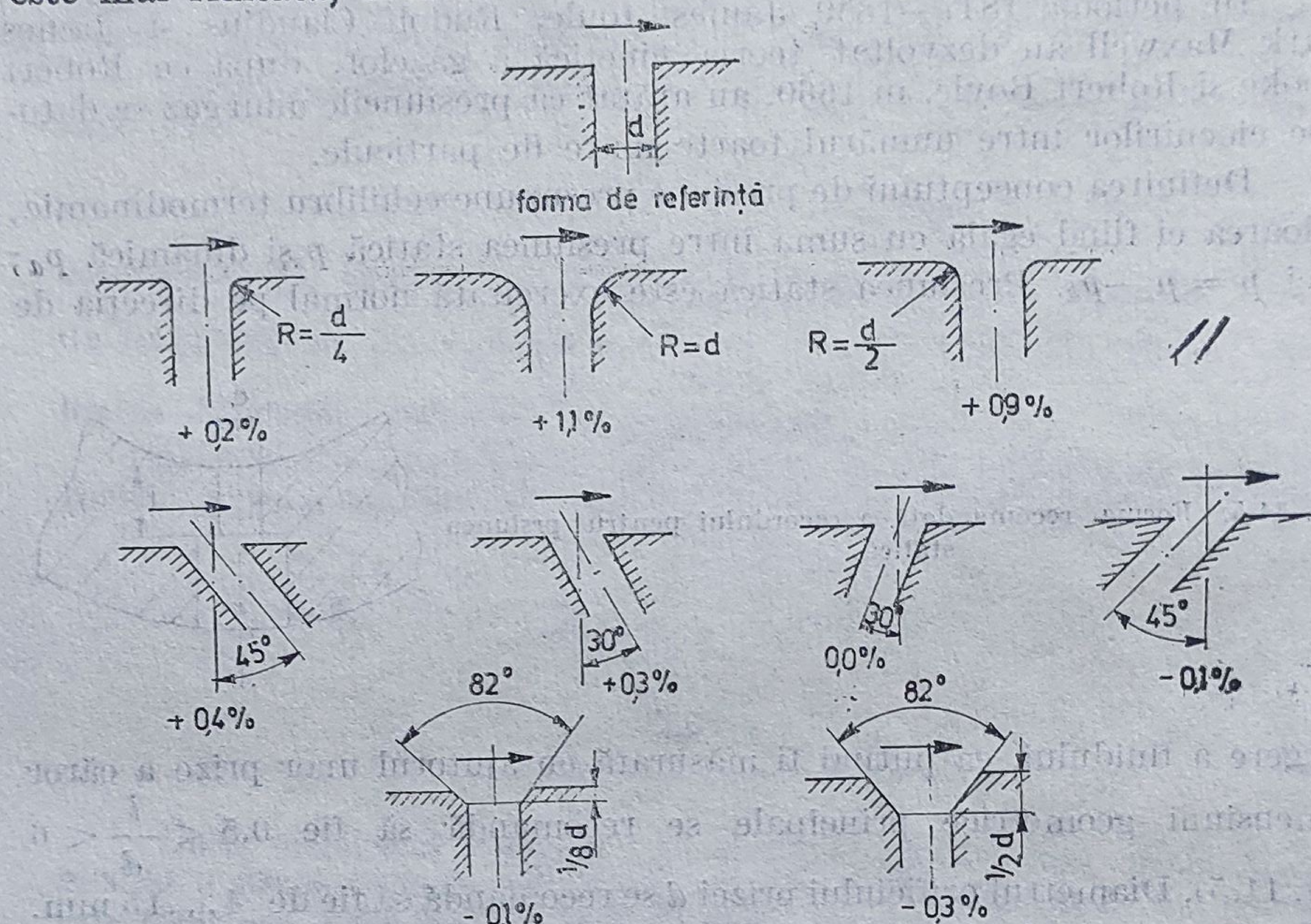


Fig. 11.6. Efectul poziţiei orificiului faţă de direcţia de curgere la măsurarea presiunii statice.

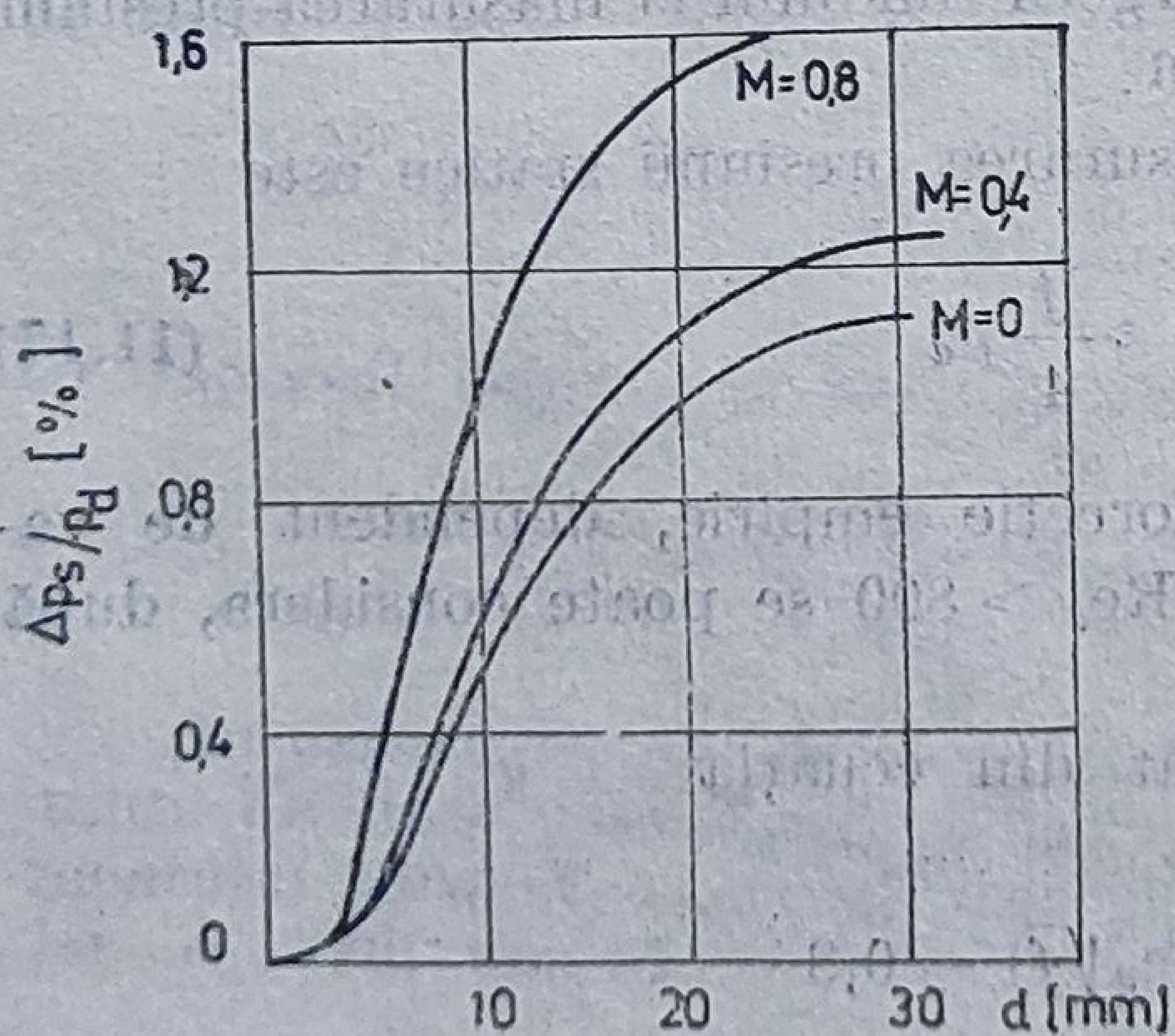


Fig. 11.7. Efectul diametrului prizei d şi a criteriului Mach M asupra erorii relative, la măsurarea presiunii statice.

Distribuţia de presiune în jurul unui cilindru folosit, de exemplu ca senzor de presiune, depinde de poziţia prizei faţă de direcţia de curgere a fluidului şi valoarea criteriului Mach. Unghiul θ_{cr}, faţă de direcţia de curgere a fluidului la care valoarea presiunii statice este minimă se numeşte *unghi critic*; dependenţa lui faţă de numărul Mach şi raportul d/D se prezintă în figura 11.8 (d este diametrul orificiului, iar D — diametrul sondei).

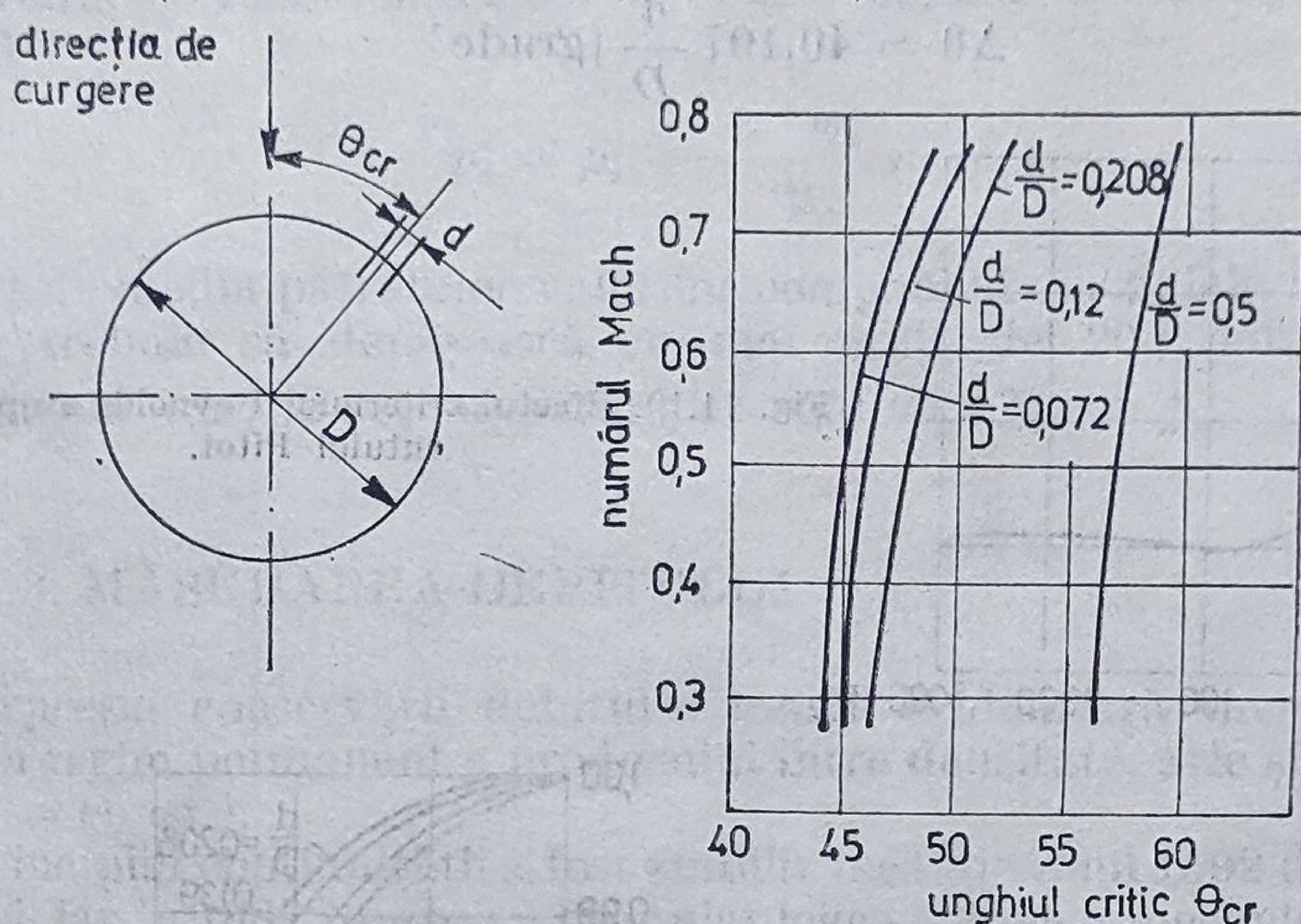


Fig. 11.8. Dependenţa unghiului critic θ_{cr} de criteriul Mach şi raportul d/D.

Ţinînd seamă de această observaţie, poate fi determinată direcţia curgerii unui fluid, folosind două orificii decalate cu unghiul $2\theta_{cr}$. Comparînd erorile relative care intervin la stabilirea presiunii statice $\frac{\Delta p_s}{p_d}$ pentru două forme posibile ale sondelor — cerc şi triunghi — se constată că în cazul triunghiului eroarea relativă se menţine în jurul valorii de zero pentru un domeniu mai larg de variaţie a raportului S/L (fig. 11.9).

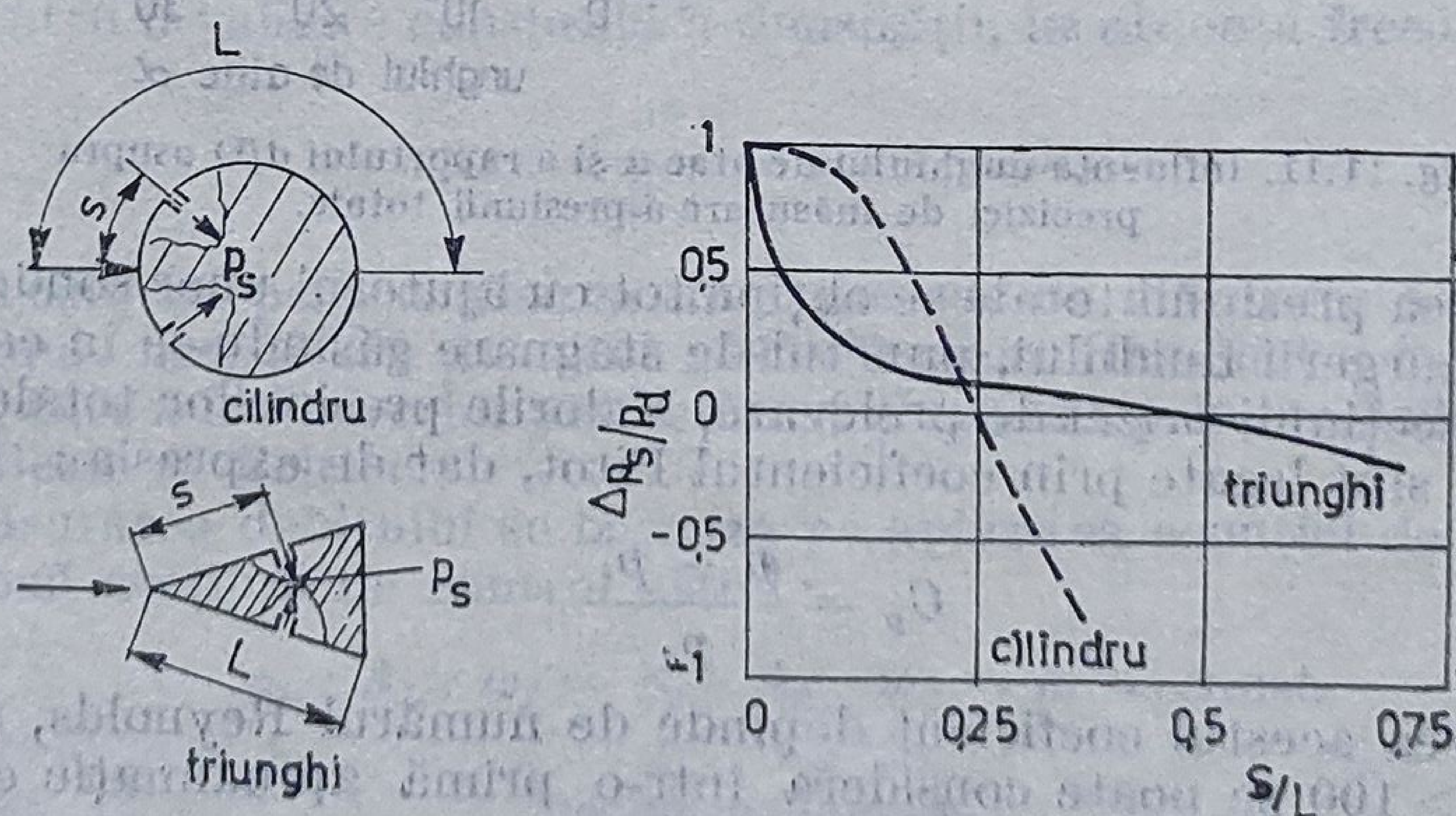


Fig. 11.9. Compararea performanţelor sondelor n formă de cerc şi triunghi.

Deşi orificiul pentru preluarea prizei de fluid nu modifică debitul curentului principal, în condiţiile unor valori ridicate ale gradientului de presiune este necesar să se modifice poziţia orificiului, astfel încît el să fie plasat departe de punctul de stagnare. Expresia unghiului de corecţie faţă de valoarea critică, pentru un cilindru sau sferă, este

$$\Delta\theta = 40{,}107 \frac{d}{D} \text{ [grade]} \tag{11.18}$$

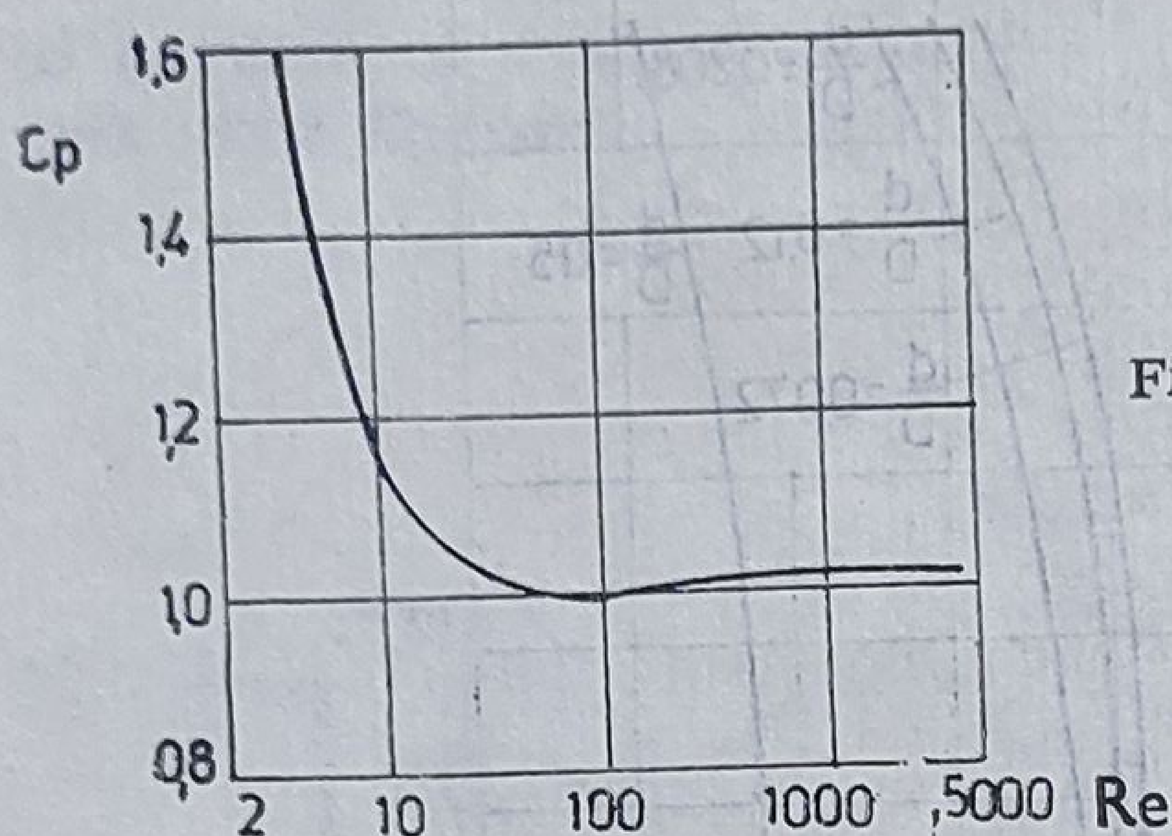


Fig. 11.10. Efectul criteriului Reynolds asupra coeficientului Pitot.

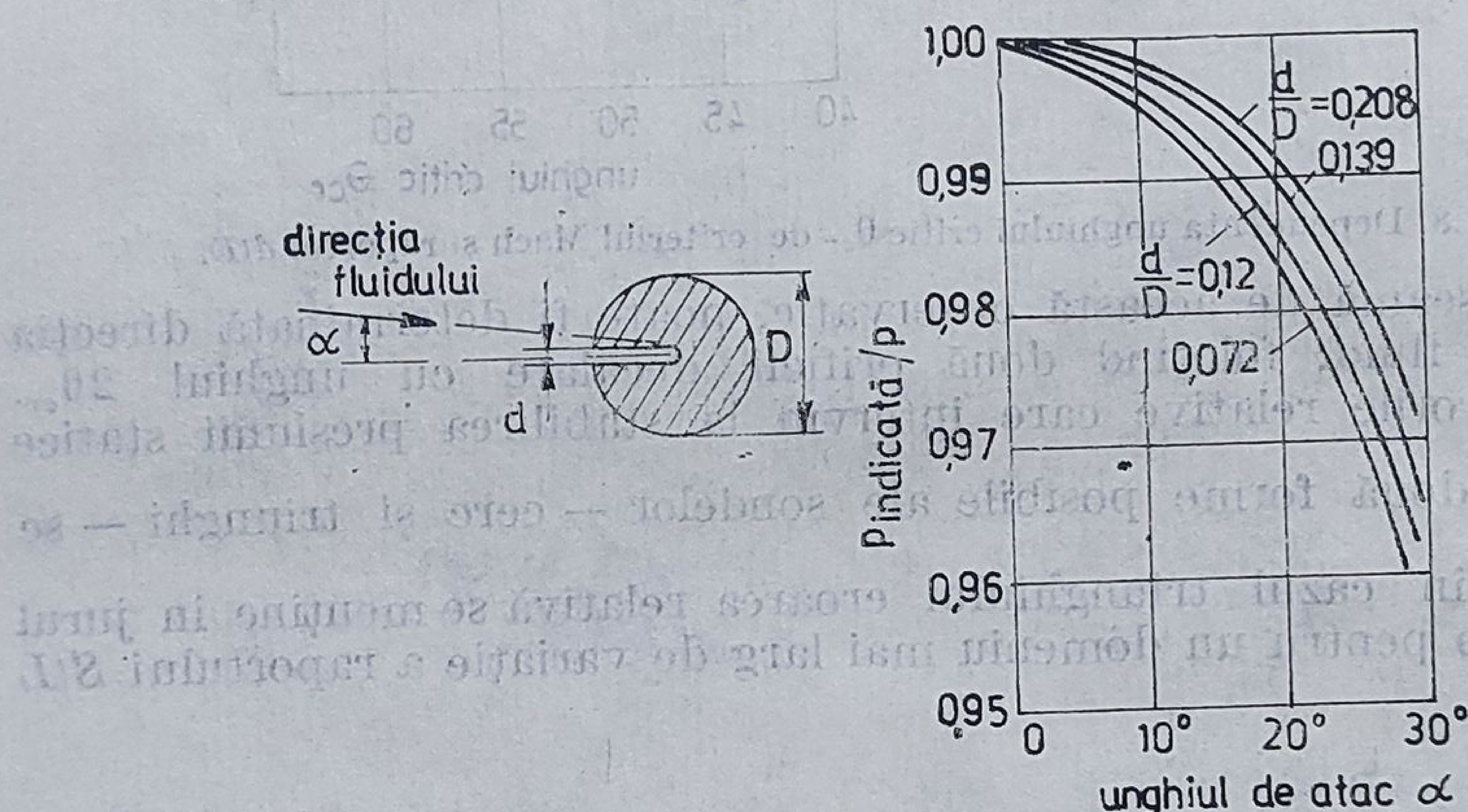


Fig. 11.11. Influenţa unghiului de atac α şi a raportului d/D asupra preciziei de măsurare a presiunii totale.

Valoarea presiunii totale se obţine tot cu ajutorul unor sonde dispuse pe direcţia curgerii fluidului, punctul de stagnare găsindu-se în centrul de greutate al secţiunii prizei de prelevare. Valorile presiunilor totale, statice şi dinamice, sînt legate prin coeficientul Pitot, dat de expresia :

$$C_p = \frac{p - p_s}{p_d} \tag{11.19}$$

Valoarea acestui coeficient depinde de numărul Reynolds, şi numai pentru $Re > 100$ se poate considera într-o primă aproximaţie că $C_p \approx 1$ (fig. 11.10).

Valoarea măsurată a presiunii totale p depinde de unghiul de atac α între direcția locală a curgerii fluidului și direcția sondei; în figura 11.11 se prezintă influența acestui unghi de atac și a raportului d/D asupra valorii relative a presiunii totale indicată de sondă.

Plasarea unei sonde în curentul de fluid (de exemplu a unui tub Pitot) produce o turbulență care afectează presiunea statică indicată, ea devenind

$$p_s' = p_s + \frac{\rho \cdot \overline{w_t^2}}{2},$$

unde $\overline{w_t^2}$ este media pătratelor valorilor componentelor axiale ale vitezelor, care nu trebuie să depășească cu mai mult de 20% viteza medie w; deci termenul $(\rho\overline{w_t^2})/2$ este aproximativ egal cu 4% din p_a.

11.3. MĂSURAREA DEBITULUI

Expresia conservării debitului masic evidențiază menținerea constantă în regim permanent a produsului între densitate, arie și viteză ($\dot{m} = \rho A w =$ const.).

Principiul continuității a fost stabilit încă din anul 1502 de Leonardo Da Vinci, iar în 1687 Newton a formulat legea a doua a mecanicii, în strînsă legătură cu noțiunea de masă.

În jurul anului 1700, Christian Huygens și Gottfried Wilhelm Leibnitz au formulat legea conservării energiei în procesele de ciocnire, iar în 1748 Daniel Bernoulli a stabilit principiul conservării energiei în general. Expresia matematică a legii de continuitate, așa cum este cunoscută astăzi, a fost stabilită de Leonhard Euler, contemporan și prieten cu Bernoulli:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_x w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_y w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_z w_z) = 0 \qquad (11.21)$$

Pentru o valoare constantă a densității, în absența frecărilor, rezultă

$$p = \frac{\rho w^2}{2} + \rho g z = \text{const.} \qquad (11.22)$$

Preocupări pentru găsirea unor metode de măsurare a debitului au apărut mult mai tîrziu. În anul 1895 Clemens Herschel a inventat tubul Venturi, care a fost ulterior perfecționat și studiat prin lucrările lui Buckingham, Bean și Beitler.

Măsurarea debitului se bazează pe aplicarea ecuației de continuitate între două secțiuni de control astfel:

$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot w_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot w_2 = \dot{m} = \text{const.} \qquad (11.23)$$

de unde:

$$w_2 = w_1 \frac{A_1}{A_2} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

În condițiile considerării procesului de curgere ca reversibil și în absența unui schimb de lucru mecanic cu mediul exterior, debitul teoretic de fluid dat de un tub Venturi are expresia

$$\dot{m} = \frac{p \cdot A_2}{T^{1/2}} \left\{ \left(\frac{p_{d2}}{p} \right)^{k/2} \left[1 - \left(\frac{p_{d2}}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \right\}^{1/2} \left(\frac{1}{R} \frac{2 \cdot k}{k-1} \right)^{1/2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \quad (11.24)$$

în care : p reprezintă presiunea totală ; p_{d2} — presiunea dinamică în secțiunea minimă ; k — exponentul adiabatic.

În cazul măsurării cu ajutorul diafragmei, debitul real de fluid este dat de expresia

$$\dot{m}_r = c_D \cdot \dot{m}_t \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \quad (11.25)$$

unde c_D reprezintă un coeficient de corecție al debitului teoretic de fluid $\dot{m}_t$.

Valoarea c_D a coeficientului de corecție al debitului ține seamă atît de contracția jetului de fluid în aval de diafragmă c_{Re}, cît și de compresibilitatea fluidului c_ε ; deci $c_D = c_{Re} \cdot c_\varepsilon$, expresiile celor doi coeficienți de corecție fiind :

$$c_{Re} = 0{,}19436 + 0{,}152884 \cdot \ln(Re_d) - 0{,}0097785(\ln Re_d)^2 + + 0{,}00020903 \, (\ln Re_d)^3 \quad (11.26)$$

$$c_\varepsilon = 1 - \frac{0{,}41 + 0{,}35 \cdot \beta^4}{k} \left(1 - \frac{p_{s2}}{p_{s1}} \right) \quad (11.27)$$

în care : $Re_d = \dfrac{Re_D}{\beta}$

Re_D — valoarea criteriului Reynolds, corespunzător diametrului D al conductei ;
β — raportul diametrelor d/D ;
k — exponentul adiabatic ;
p_{s1} și p_{s2} — valorile presiunilor statice ;
$\dot{m}_t$ — debitul teoretic de fluid, dat de expresia

$$\dot{m}_t = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \left[\frac{2 \rho_1 (p_1 - p_2)}{1 - \beta^4} \right]^{1/2} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]; \quad (11.28)$$

p_1 și p_2 — valorile presiunilor ;
ρ_1 — densitatea în secțiunea de intrare.

Pentru a limita sub 20% perturbațiile, pe o distanță de 6 dia metre în fața diagfragmei trebuie plasat un tronson rectiliniu pe o con ductă cu un diametru $D > 50$ mm și valori mai mici de 0,75 a raportului d e diametre d/D. Abaterea coeficientului de debit c_{Re}, din expresia (1 1.26),

este de $\pm 0{,}55\%$ pentru o valoare a criteriului $Re_D > 125 \cdot 10^3 \cdot D$ (în care D se înlocuieşte în mm).

11.4. STAND EXPERIMENTAL PENTRU DETERMINAREA DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI ŞI TEMPERATURI ÎNTR-UN JET

Standul experimental care se prezintă permite stabilirea distribuţiilor de viteze, presiuni şi temperaturi într-un jet liber şi turbionat, pe baza cărora se pot trage concluzii în legătură cu evoluţia jetului. De asemenea, utilizînd mai multe variante de dispozitive de generare a jeturilor, se poate stabili influenţa formei constructive şi dimensiunilor geometrice sau a configuraţiei gurii de refulare asupra structurii şi a modului de compunere şi amestecare a jeturilor.

Pentru jeturi turbionate se pot efectua studii comparative montînd succesiv pe stand mai multe tipuri de dispozitive, ca de exemplu:

— dispozitiv cu carcasă cilindrică cu unul şi cu trei canale tangenţiale de admisie;
— carcasă melcată cu admisie tangenţială;
— dispozitiv cu palete drepte dispuse tangenţial.

Modificarea intensităţii de turbionare se poate realiza fie prin schimbarea debitului de fluid, fie prin modificarea parametrilor geometrici ai turbionatorului.

Schema de principiu a standului este prezentată în figura 11.12.

Pentru a putea realiza curgerea a două sau mai multe jeturi, atît separat cît şi în interacţiune unul cu celălalt, s-a ales soluţia alimentării instalaţiei cu mai multe surse independente de aer şi anume:

— Un ventilator de aer de tip centrifugal, de 2500 m³/h, cu suprapresiune 300 mm H_2O şi turaţie maximă de 2800 rot/min, acţionat de un motor electric de curent continuu cu turaţie variabilă, de 4 kW. Debitul de aer se măsoară cu ajutorul unei diafragme cu diametrul interior de 39 mm montată pe un tronson de conductă cu diametrul de 100 mm.

— Un ventilator centrifugal de 500 m³/h, cu suprapresiune de 400 mm H_2O şi turaţia de 2800 rot/min, acţionat de un motor electric de 1 kW cu turaţia de 2750 rot/min, cuplat direct pe axul ventilatorului. Debitul de aer se măsoară, de asemenea, cu o diafragmă cu diametrul de 50 mm, montată pe un tronson de conductă cu diametrul interior de 68 mm.

— Alimentarea cu aer de la reţeaua de aer comprimat, debitul fiind măsurat cu un sistem de rotametre cu tub de sticlă, montate în paralel pentru a putea realiza o gamă mai largă de variaţie a debitului.

Încălzirea aerului (pentru studiul jeturilor neizoterme) se realizează cu o rezistenţă electrică cu puterea de 2000 W. Încălzitorul este prevăzut cu o termorezistenţă pentru măsurarea temperaturii aerului şi un sistem de reglare pentru menţinerea constantă a temperaturii. Temperatura maximă a fluidului încălzit este de 250°C.

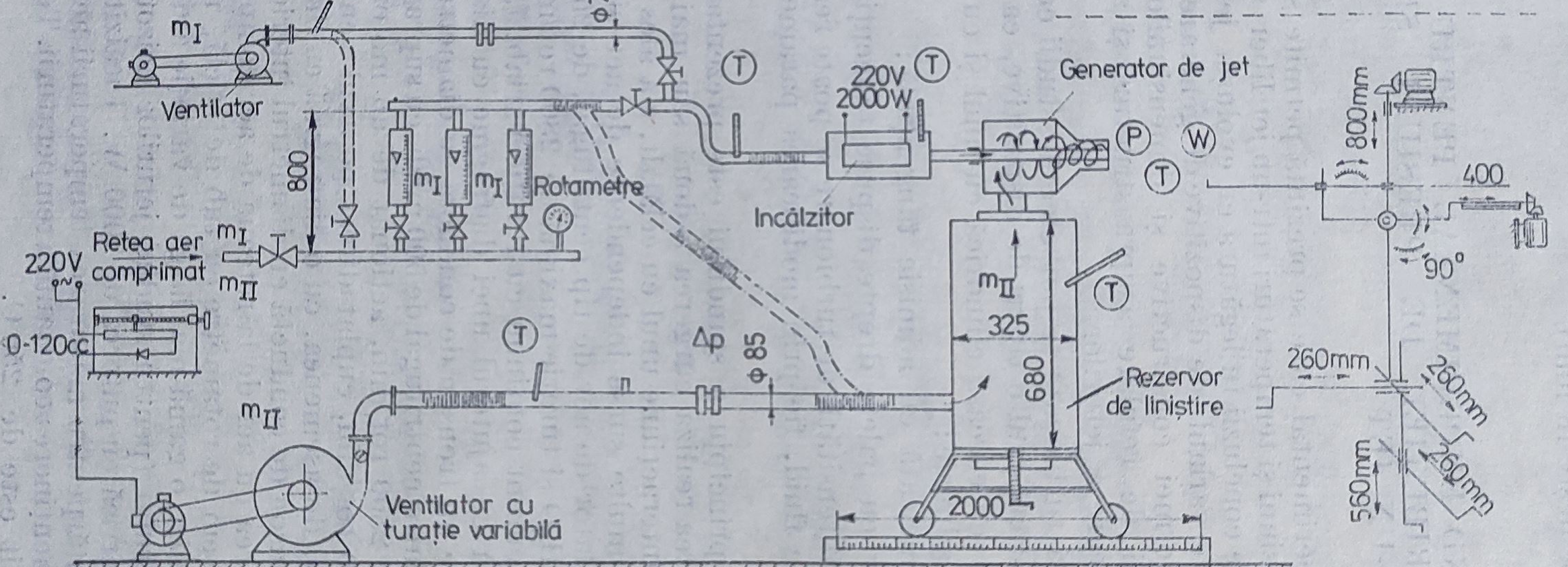


Fig. 11.12. Stand experimental pentru studiul jeturilor.

Dispozitivele de turbionare studiate sînt racordate la cu rezervor cilindric tampon cu diametrul de 325 mm și înălțimea de 680 mm, avînd rolul de liniștire și uniformizare a curgerii fluidului. Măsurarea presiunii aerului în rezervor are loc prin intermediul unei prize racordată la un manometru diferențial, iar măsurarea temperaturii cu un termometru prevăzut cu o teacă. Întregul ansamblu rezervor — dispozitiv de turbionare se poate deplasa pe o distanță de 2000 mm. Sistemul are, de asemenea, posibilitatea rotirii cu 120° în jurul axei rezervorului și blocării în poziția dorită cu ajutorul unei plăci turnante montate la partea inferioară.

Dispozitivul de fixare și poziționare spațială a sondelor de măsurare este montat pe un suport care permite deplasarea în plan vertical pe o distanță de 560 mm, iar în plan orizontal pe două direcții perpendiculare, de 260 mm lungime fiecare. Dispozitivul special de poziționare spațială a sondei propriu-zise asigură deplasări ale ei pe verticală de 800 mm și în direcția transversală de 400 mm. Deplasarea pe cele două direcții menționat a dispozitivului se face de către un motor electric cu turație de 1500 rot/min. Dispozitivul de poziționare a sondei de măsură permite și rotirea ei în plan vertical cu 170° iar în plan orizontal cu 90°. Domeniul de investigație are loc pînă la distanța axială de 20 D_0 de la secțiunea de ieșire a dispozitivului de turbionare (D_0 fiind diametrul gurii de ieșire a dispozitivului), iar în planul secțiunilor transversale, atît în direcție orizontală cît și verticală, pînă la 800 mm.

Investigarea cîmpului de viteze în diferite secțiuni transversale prin jet se face atît cu ajutorul unei sonde Pitot-Prandtl de diametru foarte mic, racordată la un micromanometru diferențial, cît și cu o sondă sferică cu cinci găuri.

Cu tubul Pitot-Prandtl (fig. 11.13) pot fi măsurate componentele axiale ale vitezelor și vitezele totale orientînd sonda paralel cu axa geometrică a dispozitivului de formare a jetului turbionat.

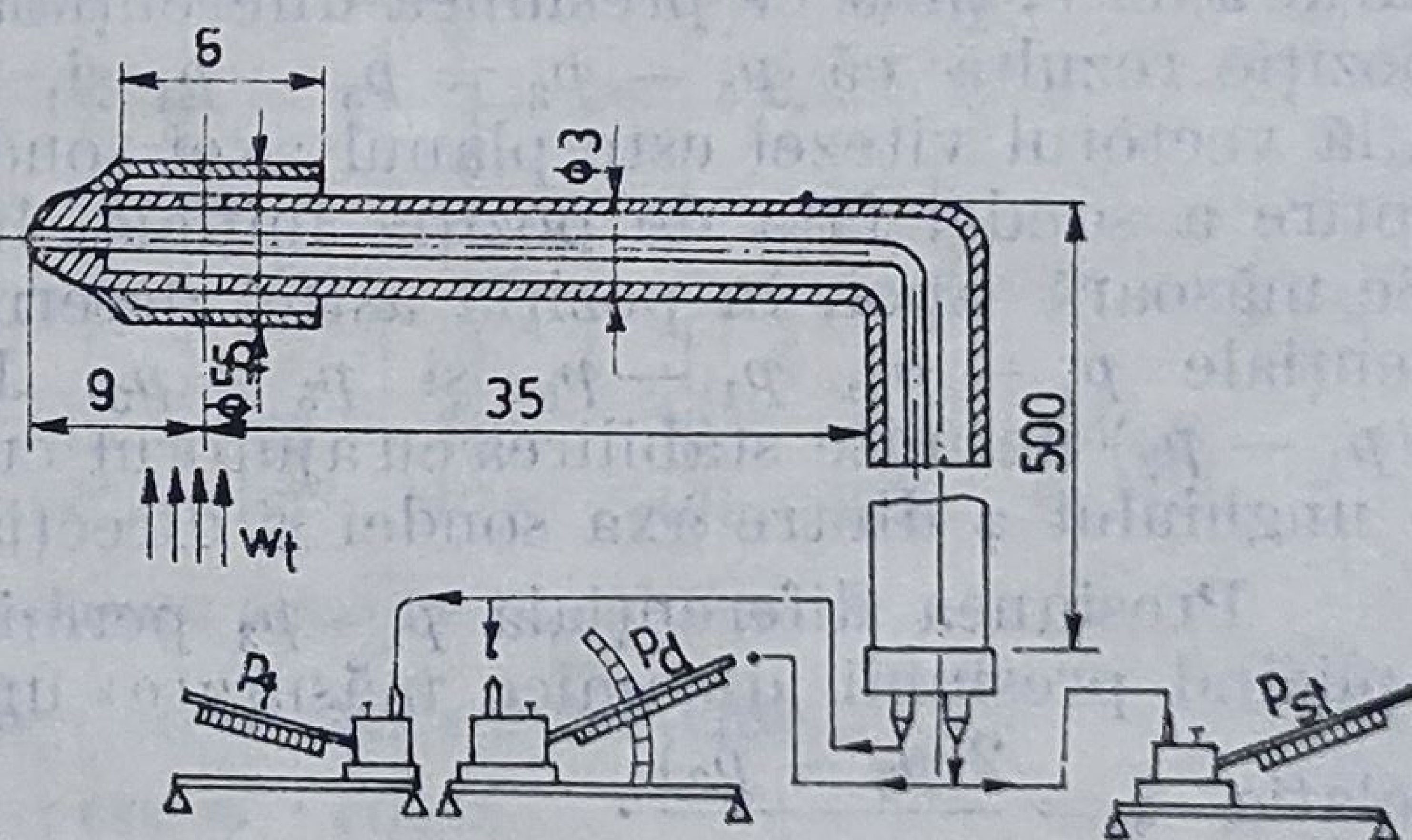


Fig. 11.13. Tub Pitot-Prandtl pentru măsurarea componentei axiale a jetului

Pentru a se anula influența componentelor tangențiale ale vitezei jetului turbionat asupra presiunii statice recepționate de priza tubului Pitot-Prandtl, se montează o teacă metalică de protecție în zona capului sondei.

Cu sonda cu cap sferic cu cinci găuri (fig. 11.14) se pot măsura simultan toate componentele vectorului viteză (w_{axial}, w_{radial} și $w_{tangențial}$) precum și presiunea statică.

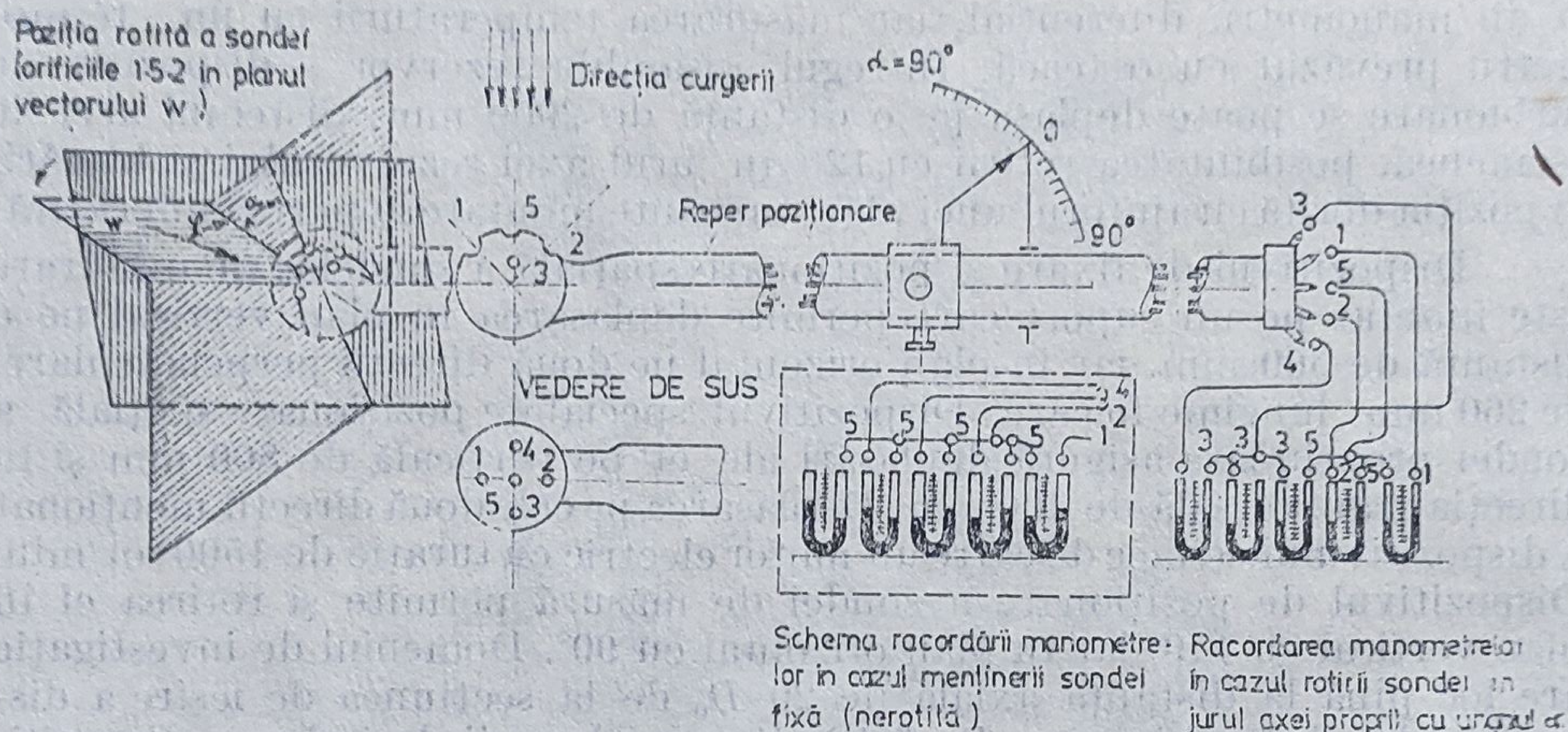


Fig. 11.14. Sondă cu cinci orificii.

Partea principală a sondei, o constituie capul sferic cu cinci orificii situate în două plane perpendiculare. Axele orificiilor laterale *1*, *2*, *3*, și *4* sînt executate sub un unghi de 45° în raport cu axa orificiului din mijloc 5. Sonda poate fi deplasată astfel încît capul sferic să se afle în punctul de măsurare dorit și poate fi rotită în jurul propriei axe pentru ca orificiile să fie orientate într-o anumită direcție.

Pentru a efectua măsurările, se aduce sonda cu ajutorul dispozitivului de poziționare în punctul de măsură dorit. Se rotește apoi sonda în jurul axei ei pînă ce presiunea diferențială $p_3 - p_4$ devine nulă. În această poziție rezultă că $p_5 - p_3 = p_5 - p_4$ și, în consecință, planul în care se află vectorul vitezei este planul axei sondei și a orificiului 5. Unghiul de rotire a sondei față de poziția inițială, luată ca referință, se notează α. Se măsoară apoi, în poziția astfel determinată, valorile presiunilor diferențiale $p_1 - p_2$, $p_1 - p_5$ și $p_5 - p_3$. Raportul presiunilor $(p_1 - p_5)/(p_1 - p_2)$ permite stabilirea cu ajutorul curbei de etalonare din fig. 11.15 a unghiului φ dintre axa sondei și direcția vectorului viteză.

Presiunea diferențială $p_5 - p_3$ permite determinarea mărimii vitezei aplicînd presiunii dinamice măsurate un coeficient de corecție dat de relația $\xi = \dfrac{2(p_5 - p_3)}{\rho w^2}$.

Pentru determinarea componentelor vitezei se efectuează următoarele calcule:

— se stabilește raportul $\psi = (p_1 - p_5)/(p_1 - p_2)$ și se citește pe curba din figura 11.15 valoarea unghiului φ;

— se determină valoarea corecției ξ și se calculează mărimea vitezei cu relația :

$$w = \sqrt{2(p_5 - p_3)/\rho \cdot \xi}$$

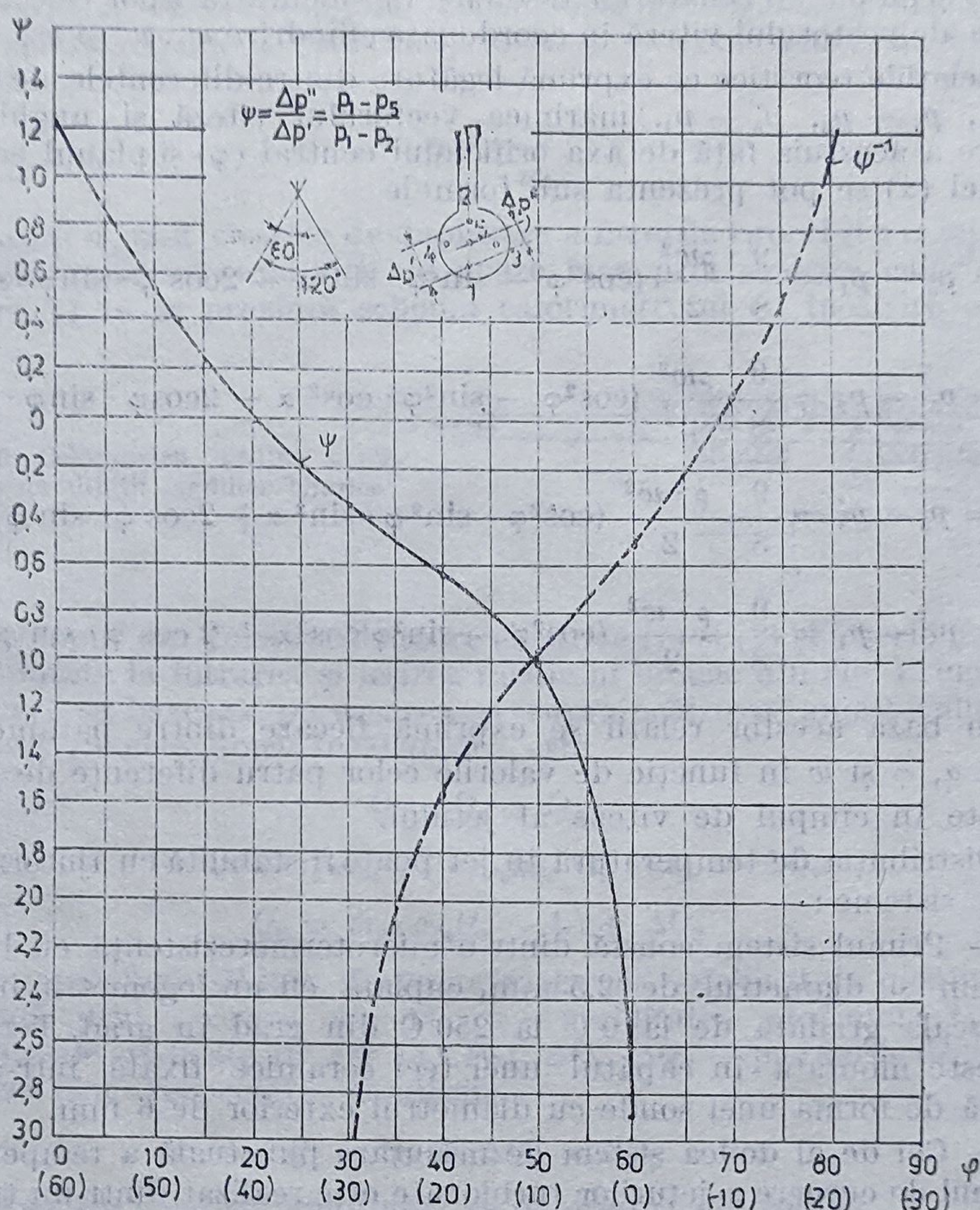


Fig. 11.15. Curba de etalonare a sondei cu cinci orificii.

— componentele vitezei se determină cu relațiile

$$w_a = w \cdot \cos \varphi \cdot \cos \alpha$$

$$w_t = w \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha$$

$$w_r = w \cdot \sin \varphi.$$

Pentru investigarea mai comodă și rapidă a cîmpului de viteze în jeturile turbionate se poate folosi și procedeul menținerii fixe a poziției sondei față de axul propriu, translatînd-o numai transversal și în lungul direcției de curgere și măsurînd diferențele de presiune dintre

orificiile *1*, *2*, *3*, *4* ale sondei și orificiul central *5*. Pe baza diferențelor de presiune măsurate se determină apoi valorile mărimii vectorului viteză și unghiurile de înclinare ale acestora în raport cu axa orificiului central al sondei φ și cu planul ecuatorial al sondei. Se calculează apoi cele trei componente ale vectorului viteză în coordonate cilindrice w_a, w_r și w_t.

Relațiile teoretice ce exprimă legătura dintre diferențele de presiune $p_5 - p_1$, $p_5 - p_3$, $p_5 - p_4$, mărimea vectorului viteză și unghiurile de înclinare a acestuia față de axa orificiului central (φ) și planul ecuatorial al sondei (α) se pot prezenta sub formele

$$\Delta p_{I} = p_5 - p_1 = \frac{9}{8} \frac{\rho w^2}{2} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\alpha - 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha);$$

$$\Delta p_{II} = p_5 - p_2 = \frac{9}{8} \frac{\rho w^2}{2} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \cos^2\alpha - 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha);$$

$$\Delta p_{III} = p_5 - p_3 = \frac{9}{8} \frac{\rho \cdot w^2}{2} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\alpha + 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha);$$

$$\Delta p_{IV} = p_5 - p_4 = \frac{9}{8} \frac{\rho \cdot w^2}{2} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cos^2\alpha + 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha).$$

În baza acestor relații se exprimă fiecare dintre parametrii necunoscuți α, φ și w în funcție de valorile celor patru diferențe de presiune măsurate în cîmpul de viteze al jetului.

Distribuția de temperatură în jet poate fi stabilită cu ajutorul următoarele sisteme:

— Primul sistem constă dintr-o microtermorezistență cu lungimea de 6 mm și diametrul de 2,5 mm, cuplată cu un logometru indicator, avînd scala gradată de la 0°C la 250°C din grad în grad. Termorezistența este montată în capătul unei teci ceramice fixată într-o manta metalică de forma unei sonde cu diametrul exterior de 6 mm.

— Cel de al doilea sistem de măsurare punctuală a temperaturilor în cîmpul de curgere a jeturilor turbionate este realizat dintr-un traductor cu o diodă de siliciu tip 1N 4148 (avînd diametrul Ø 1 mm și lungimea 2 mm) conectat printr-un circuit electronic la un miliampermetru gradat direct în °C. Reglajul cîmpului de măsură se realizează cu ajutorul a două potențiometre variabile de cîte 10 kΩ fiecare. Sistemul este alimentat la 9V de la o sursă de curent continuu. Valorile maxime ale temperaturilor măsurate se situează în jur de 130°C.

Atît termorezistența cît și traductorul cu diodă se fixează de tija dispozitivului de poziționare a sondelor, astfel încît să se poată investiga aceleași puncte ale jetului în care s-au făcut și determinările de viteze și presiune.

11.5. DETERMINAREA UMIDITĂȚII UNUI MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Problema de care depind fenomenele gazodinamice ale mediului bifazic monocomponent este umiditatea y și coeficientul de alunecare interfazic φ:

$$\varphi = \frac{w_v}{w_l} \tag{11.29}$$

în care w_v și w_l sînt vitezele de deplasare a fazei de vapori și a fazei lichide.

Determinarea umidității se poate face prin metoda calorimetrică. În figura 11.16 se prezintă schema calorimetrului cu încălzire electrică.

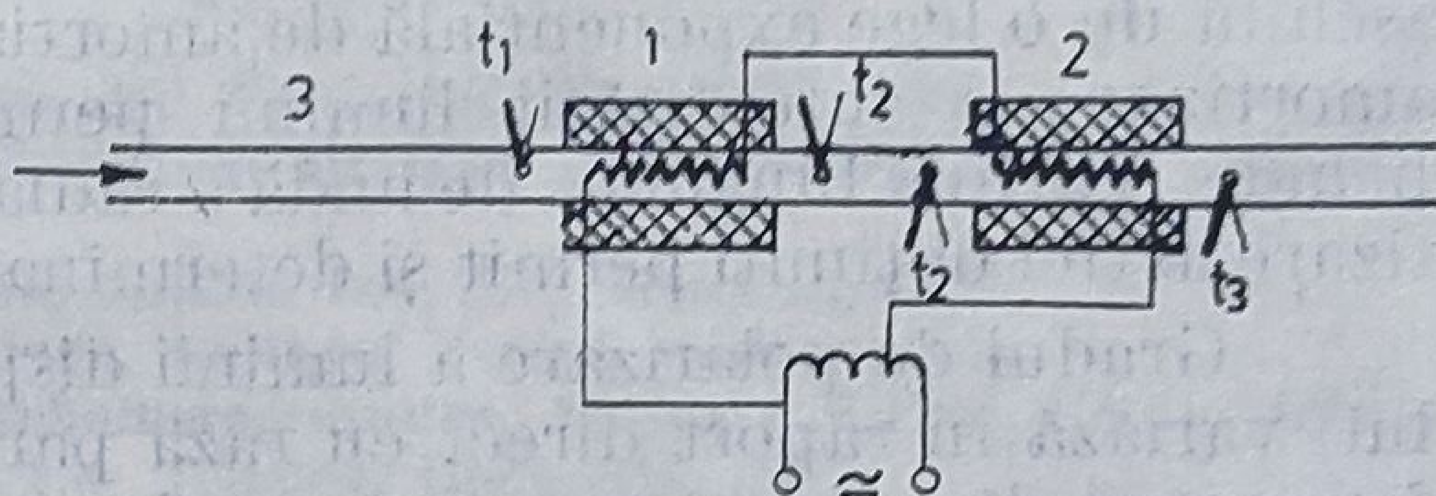


Fig. 11.16. Calorimetru pentru determinarea umidității mediilor bifazice

El este compus din două încălzitoare electrice (*1*) și (*2*) și o serie de termocuple montate la intrarea și ieșirea mediului bifazic din ele. Principiul de funcționare se bazează pe uscarea și supraîncălzirea amestecului. Căldura dată în cele două încălzitoare este

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{11.30}$$

în care:

$$Q_1 = r_1 \dot{m}_{bf}\, y + c_{p_v} \dot{m}_{bf} (t_2 - t_1) + \Delta Q_1 \tag{11.31}$$

$$Q_2 = \dot{m}_{bf}\, c_{p_v} (t_3 - t_2) + \Delta Q_2 \tag{11.32}$$

unde: r reprezintă căldura de vaporizare; $\dot{m}_{bf}$ — debitul de mediu bifazic ce circulă prin aparat; $y = 1 - x$ — umiditatea mediului; t_1, t_2, t_3 = temperaturile indicate în fig. 11.16; $\Delta Q_1, \Delta Q_2$ — pierderile de căldură. De obicei sînt respectate condițiile

$$Q_1 = Q_2 \text{ și } \Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

În aceste condiții umiditatea se determină din relația

$$y = \frac{c_{p_v}[(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)]}{r} \tag{11.33}$$

11.6. DETERMINAREA GRADULUI DE DISPERSIE A FAZEI LICHIDE ÎN FAZA GAZOASĂ

După cum s-a prezentat în capitolele anterioare, modul în care se găsește dispersată faza lichidă în faza gazoasă influențează procesul de curgere a mediului bifazic.

Una din metodele de determinare a acestei mărimi este cea optică, care se bazează pe fenomenul de dispersare a luminii la trecerea ei prin mediul bifazic. Dimensiunile particulelor lichide dispersate în faza de gaz determină gradul de opacizare a mediului bifazic, iar numărul lor în unitatea de volum determină intensitatea și caracterul luminii dispersate.

Prin metoda optică se pot efectua următoarele măsurări :

— măsurarea gradului de transparență a mediului bifazic ;
— măsurarea gradului de polarizare a luminii dispersate ;
— măsurarea indicelui de dispersare (de difracție) a luminii.

Toate măsurătorile se efectuează folosind o sursă de lumină monocromatică.

Scăderea intensității luminii ce trece prin jetul de mediu bifazic ascultă de o lege exponențială de amortizare. Cunoașterea coeficientului de amortizare a intensității luminii permite determinarea razei picăturii lichide. Variind lungimea de undă a radiației incidente, coeficienții de amortizare astfel obținuți permit și determinarea numărului de particule lichide.

Gradul de polarizare a luminii dispersate (în zona vizuală a spectrului) variază în raport direct cu raza particulei, așa încît, cu ajutorul unui fotometru de polarizare, se poate determina raza particulei în funcție de intensitatea luminii polarizate trecute prin jetul de mediu bifazic.

În cazul picăturilor cu diametru mare, se pot folosi și fotografii cu expunere rapidă a jetului bifazic.

11.7. MĂSURAREA PRESIUNII ÎN MEDIUL BIFAZIC

La măsurarea presiunii frînate sau statice într-un mediu bifazic în curgere, sau a direcției vitezei de curgere, cu aparatura folosită la gazul perfect, este posibilă apariția unor erori necontrolabile și importante.

În primul rînd, trebuie evitată pe conducta de legătură sondă — aparat de măsură apariția fenomenului de condensare, ceea ce este foarte dificil de realizat practic. De asemenea aderența și aglomerarea particulelor lichide pe sondă duce la apariția unor erori de măsură a căror valoare depinde de umiditatea y a mediului bifazic.

S-a constant experimental că erorile ce apar la măsurarea presiunii statice sînt foarte mici, nedepășind 2,5%, dar cele ce apar la măsurarea presiunii dinamice pot depăși și 35%. Ca urmare, aparatura de măsură este specifică fiecărei cercetări și este confecționată special cazului respectiv.

BIBLIOGRAFIE

1. *Ştefănescu, D.*, ş.a., **Bazele termotehnicii**, EDP, Bucureşti, 1970.
2. *Ştefănescu, D., Marinescu, M.*, **Termotehnică**, EDP, Bucureşti, 1983.
3. *Abramovici, G.N.*, **Angewandte Gasdynamik**, VEB Verlag, Berlin, 1968.
4. *Rotty, R.M.*, **Introduction to Gas Dynamics**, Ed. John Wiey and Sons, New York, 1962.
5. *Liepmann, H.W., Roshko, A.*, **Elements of Gasdynamics**, John Wiley and Sons, New York, 1957.
6. *Shapiro, A.H.*, **The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow**, Ronald Press, New York, 1953.
7. *Mc. Adams, W.H.*, **Heat Transmission**, Mc Graw-Hill, New-York, 1942.
8. *Carafoli, E., Constantinescu, V.N.*, **Dinamica fluidelor incompresibile**, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1981.
9. *Landau, L., Lifchitz, E.*, **Mécanique des fluidès**, Izd. Mir, Moscova, 1971.
10. *Traupel, W.*, **Thermische Turbomaschinen**, Springer Verlag, Berlin, 1958.
11. *Eckert, B.*, **Axialkompressoren und Radialkompressoren**, Springer Verlag, Berlin, 1953.
12. *Stambuleanu, A.*, **Flacăra industrială**, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1971.
13. *Benedict, R.P.*, **Fundamentals of Temperature, Pressure and Flow Measurements**, John Wiley and Sones, New York, 1977.
14. *Vasilescu, Al.A.*, **Analiza dimensională şi teoria similitudinii**, Ed. Academiei RSR, Bucureşti 1969.
15. *Seifert, H.*, **Instationäre Strüngsvorgänge in Rohrleitungen und Verbrennungskraftomaschinen** Springer Verlag, Berlin, 1962.
16. *Sissom, L.E., Pitts, D.R.*, **Elements of Transport Phenomena**, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1972.
17. *Ahmedov R.B.* ş.a., **Aerodinamika zakrucennoi strui**, Moskva, Izd. Energhia, 1977.
18. *Bradshaw, P.*, **An introduction to Turbulence and its Measurement**. Oxford, Pergamon Press, 1971.
19. *Hinze J.O.*, **Turbulence** (ed. a II-a). New York, McGraw-Hill, 1975.
20. *Loițiianskii L.G.*, **Mehanika jidkosti i gaza** Izd. Nauka, 1973.
21. *Rajaratnam N.*, **Turbulent Jets**. Elsevier Scientific Publishing Company (cap. 7 „Circular jets with swirl", p. 130—148), 1976.
22. *Reynolds A.J.* **„Curgeri turbulente în tehnică"** (Trad. din l. engleză), Editura Tehnică 1982.
23. *Schlichting H.*, **„Boundary Layer Theory"** New York, McGraw Hill, Book Company Inc, 1970.
24. *Deici, Filipov.* **Gazodinamica mediilor bifazice**, Moskwa, 1968
25. *Beér J. M., Chigier N.A.* **Combustion Aerodynamics**. Londra, Applied Science Publischers, 1972.
26. *Mihăescu L., Cristea E., Ganea I., Pănoiu N., Totolo C.* **Arzătoare turbionare**. Bucureşti, Editura Tehnică, 1986.